Name:______________________________ **Matrikelnummer:** __________________

Nachholklausur 22.3.2019

Diskrete Strukturen, WS 2018/19, Prof. Dr. G. Hiß

Die ersten 5 Aufgaben sind Rechenaufgaben. Bitte schreiben Sie Ihre Ergebnisse in den dafür vorgesehenen Platz. Sie brauchen Ihre Ergebnisse bei diesen Aufgaben nicht zu begründen. Es gibt für Ansätze und Begründungen auch keine Punkte.

Aufgabe 1.

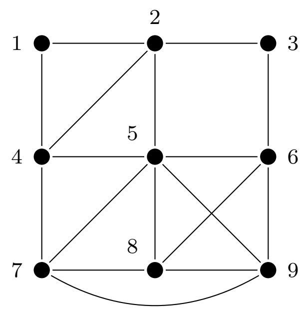
(a) Berechnen Sie in $\mathbb{Z}$ die Zahl $d = \mathrm{ggT}(784, 602)$ sowie $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $x \cdot 784 + y \cdot 602 = d$.

$d = \boxed{}$ $x = \boxed{}$ $y = \boxed{}$ (3 Punkte)

(b) Bestimmen Sie in $\mathbb{Z}_{79}$ eine Lösung der Gleichung $\overline{73} \cdot x - \overline{31} = \overline{0}$. $x = \boxed{}$ (2 Punkte)

(c) Wieviele Einheiten hat der Ring $\mathbb{Z}_{200}$? $|Z_{200}^{\times}| = \boxed{}$ (2 Punkte)

Aufgabe 2. Gegeben sei der folgende Graph $G = (V, E)$:



(a) Geben Sie n_G, m_G und r_G an. $n_G = \boxed{}$ $m_G = \boxed{}$ $r_G = \boxed{}$ (1 Punkt)

(b) Was ist die Summe der Grade aller Knoten von G? $\boxed{}$ (1 Punkt)

(c) Bestimmen Sie eine Eulertour mit Anfangspunkt 8 in G. Wenn Sie bei einem Schritt mehrere Möglichkeiten haben, gehen Sie jeweils zu dem Knoten mit der kleineren Nummer.

Geben Sie die Tour als Folge der durchlaufenen Knoten an ("$8, \ldots$").

$\boxed{}$ (3 Punkte)

Aufgabe 3. Seien $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 9 & 1 & 3 & 7 & 6 & 5 & 4 & 8 \end{pmatrix}$ und $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 4 & 3 & 8 & 5 & 2 & 7 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ Permutationen aus S_9.

(a) Geben Sie $\sigma \circ \pi$ in disjunkter Zykelschreibweise an.

$\sigma \circ \pi =$ $\boxed{}$ (2 Punkte)

(b) Was ist das kleinste k, so dass $\sigma^k = \mathrm{id}$ ist? $k =$ $\boxed{}$ (1 Punkt)

(c) Was ist das Signum von π? $\mathrm{sgn}(\pi) =$ $\boxed{}$ (1 Punkt)

(d) Geben Sie σ^{-1} in disjunkter Zykelschreibweise an.

$\sigma^{-1} =$ $\boxed{}$ (2 Punkte)

Aufgabe 4. Geben Sie bei den folgenden Aufgaben die Ergebnisse als Zahl an (nicht als Formel mit Binomialkoeffizienten oder Fakultäten).

(a) Wieviele Tupel aus $\{0, 1, 2\}^6$ gibt es, in denen genau drei Mal die 2 vorkommt?

$\boxed{}$ (1 Punkt)

(b) Wieviele Wörter lassen sich durch Umordnen der Buchstaben des Wortes NIZZAALLEE bilden?

$\boxed{}$ (1 Punkt)

(c) Wieviele natürliche Zahlen n mit $n \leq 200$ gibt es, die durch 6, 8 oder 20 teilbar sind?

$\boxed{}$ (1 Punkt)

(d) Wieviele Ergebnisse gibt es beim Wurf von drei (ununterscheidbaren) Würfeln, in denen keine 6 vorkommt?

$\boxed{}$ (1 Punkt)

(e) Wieviele natürliche Zahlen mit 5-stelliger Dezimaldarstellung (ohne führende 0) gibt es, in der genau eine Ziffer 8 vorkommt?

$\boxed{}$ (1 Punkt)

Name: ____________________ **Matrikelnummer:** ________________

Aufgabe 5.

Sei $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 9 & 0 \\ -1 & 9 & 19 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{4\times 4}$ und seien $b_1 = \begin{pmatrix} -9 \\ -9 \\ -20 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{4\times 1}$ und $b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{4\times 1}$.

(a) Geben Sie die Lösungsmenge des homogenen Gleichungssystems $Ax = 0$ an.

$\mathbb{L}_0 =$ $\boxed{}$ (2 Punkte)

(b) Wieviele freie Unbekannte hat das Gleichungssystem $Ax = 0$? $\boxed{}$ (1 Punkt)

(c) Geben Sie die Lösungsmenge des inhomogenen Gleichungssystems $Ax = b_1$ an.

$\mathbb{L}_1 =$ $\boxed{}$ (2 Punkte)

(d) Geben Sie die Lösungsmenge des inhomogenen Gleichungssystems $Ax = b_2$ an.

$\mathbb{L}_2 =$ $\boxed{}$ (2 Punkte)

In den folgenden schriftlichen Aufgaben müssen Sie alle Ihre Aussagen begründen.
Bitte benutzen Sie für jede Aufgabe eine neue Seite.
Erinnerung: *Die natürlichen Zahlen* $\mathbb{N}$ *enthalten nach der Konvention dieser Vorlesung nicht die* 0.

Aufgabe 6. Sei

$$R = \{a + b\sqrt{-5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}.$$

(a) Zeigen Sie, dass R mit der in $\mathbb{C}$ definierten Addition und Multiplikation ein kommutativer Ring ist.

(b) Sei $f : R \to \mathbb{Z}$, $a+b\sqrt{-5} \mapsto (a+b\sqrt{-5})(a-b\sqrt{-5}) = a^2+5b^2$. Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in R$ gilt $f(xy) = f(x)f(y)$.

(c) Bestimmen Sie alle Einheiten $R^\times$ von R.

(2+1+2 Punkte)

Aufgabe 7. Sei M eine Menge und $R \neq \emptyset$ eine reflexive Relation auf M. Zeigen Sie, dass R genau dann eine Äquivalenzrelation ist, wenn für alle $x, y, z \in M$ gilt: $((x, z) \in R \wedge (y, z) \in R) \Rightarrow (x, y) \in R$.

(5 Punkte)

Aufgabe 8. Sei K ein Körper. Zeigen Sie, dass

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in K^{2\times 2} \;\middle|\; a, b, c \in K, ac = 1 \right\}$$

eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_2(K)$ ist.

(5 Punkte)

Aufgabe 9. Sei $n \in \mathbb{N}$ gerade. Zeigen Sie, dass

$$\sum_{k=0}^{n/2} \binom{n}{2k} = \sum_{k=0}^{n/2-1} \binom{n}{2k+1} = 2^{n-1}$$

ist.

(5 Punkte)