2.8.2004

Scheinklausur Diskrete Strukturen, SS 2004

Prof. Dr. U. Schoenwaelder

Tragen Sie bitte auf diesem Deckblatt leserlich und in **Blockbuchstaben** Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer ein und unterschreiben Sie.

Name: ______________________________

Vorname: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

Eigenhändige Unterschrift: ______________________________

	Krz	Erg	7	8	9	10	Σ
Punkte							
Nachk.							

Zum Ankreuzteil:

Kreuzen Sie bei jeder Frage entweder „Ja“ oder „Nein“ oder nichts an.
Auswertung: Jedes richtige Kreuz gibt einen Pluspunkt, jedes falsche Kreuz einen Minuspunkt. Jede Aufgabe gibt immer mindestens 0 Punkte, Minuspunkte wirken also nicht über Aufgaben hinweg. Wenn Sie bei einer Frage unsicher sind, machen Sie einfach kein Kreuz.
Sie brauchen Ihre Kreuze nicht zu begründen!

Zum Ergebnisteil:

In diesem Teil müssen Sie Ihre Aussagen **nicht** begründen. Es zählt nur das richtige Ergebnis.

Zu den Aufgaben mit Begründungen:

In diesem Teil müssen Sie alle Aussagen begründen.
Natürlich brauchen Sie Aussagen aus der Vorlesung nicht noch einmal zu beweisen.

Scheinklausur, 2.8.2004

Diskrete Strukturen, SS 2004, Prof. Dr. U. Schoenwaelder

Name: ______________________ **Matrikelnummer:** ______________

Kreuzen Sie bei jeder Frage entweder „Ja“ oder „Nein“ oder nichts an.
Auswertung der Multiple-Choice-Aufgaben: Ein richtiges Kreuz ergibt $+1$ Punkt, ein falsches Kreuz ergibt -1 Punkt, keine Angabe zählt 0 Punkte. In jeder Aufgabe bekommen Sie mindestens 0 Punkte.

1	*Welche der folgenden Aussagen sind richtig?*	
	Jeder hamiltonsche Graph ist zusammenhängend.	☐ Ja ☐ Nein
	Jeder hamiltonsche Graph besitzt eine Eulertour.	☐ Ja ☐ Nein
	Jeder hamiltonsche Graph besitzt genau einen Hamiltonkreis oder Hamiltonweg.	☐ Ja ☐ Nein
	Jeder Graph, der eine Eulertour besitzt, ist zusammenhängend.	☐ Ja ☐ Nein
2	*Welche der folgenden Aussagen sind richtig?*	
	Jeder Graph enthält einen Spannbaum als Teilgraph.	☐ Ja ☐ Nein
	Jeder Baum enthält eine Brücke.	☐ Ja ☐ Nein
	Ein endlicher Graph G ist ein Wald genau dann, wenn jede Kante von G eine Brücke ist.	☐ Ja ☐ Nein
	Alle Wälder haben die gleiche Zusammenhangszahl.	☐ Ja ☐ Nein

Bearbeiten Sie die folgenden Rechenaufgaben und schreiben Sie die Ergebnisse in die dafür vorgesehenen Kästchen. Sie brauchen Ihre Ergebnisse **nicht** zu begründen, für Begründungen und Ansätze gibt es aber auch **keine** Punkte. Für die richtige Antwort bekommen Sie die angegebene Punktzahl. Für eine falsche Antwort gibt es **null** Punkte.

3	*Bestimmen Sie die folgenden Anzahlen. Dabei ist bis auf Isomorphie zu zählen, d.h. zueinander isomorphe Graphen zählen nur einmal.* *(Jeweils 2 Punkte)*	
	Die Anzahl schlichter Graphen mit 3 Ecken ist	4
	Die Anzahl schlichter Graphen mit 5 Ecken und 3 Kanten ist	4
	Die Anzahl zusammenhängender Graphen mit 4 Ecken und 3 Kanten ist	2
	Die Anzahl von Graphen mit 10 Ecken und 2 Kanten ist	7
4	*Bestimmen Sie die folgenden Anzahlen.* *(Jeweils 1 Punkt)*	
	Die Anzahl der Permutationen von $\{1,2,3,4,5\}$ ist	120
	Die Anzahl der 3-elementigen Teilmengen einer 6-elementigen Menge ist	20
	Die Anzahl der Partitionen einer 4-elementigen Menge ist	15
	Die Anzahl der Teilmengen einer 5-elementigen Menge ist	32
	Die Anzahl der injektiven Abbildungen $f : \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4,5,6\}$ ist	360
	Die Anzahl der surjektiven Abbildungen $f : \{1,2,3,4\} \to \{1,2\}$ ist	14

Name: ______________________ **Matrikelnummer:** ______________

5	*Es seien die Permutationen* $\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 1 & 2 & 8 & 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ *sowie* $\tau := (1\ 7\ 3)(2\ 6\ 4\ 5)$ *aus* $S_{\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}}$ *gegeben.* *(Jeweils* 1 *Punkt)*	
	Die Zykeldarstellung von σ ist	$(1\ 5\ 2\ 7\ 4)(3\ 9)(6\ 8)$
	Die Ordnung von τ ist	12
	Die Zykeldarstellung von $(\tau^{-1})^2$ ist	$(1\ 7\ 3)(2\ 4)(5\ 6)$
	Die Zykeldarstellung von τ^{98} ist	$(1\ 3\ 7)(2\ 4)(5\ 6)$
	Die Zykeldarstellung von $\sigma^{-1} \cdot \tau \cdot \sigma$ ist	$(5\ 4\ 9)(7\ 8\ 1\ 2)$

6	*Berechnen Sie einen größten gemeinsamen Teiler* d *von 612 und 572, wobei* $d > 0$ *gelten soll. Bestimmen Sie dann* $x, y \in \mathbb{Z}$*, so daß* $d = x \cdot 612 + y \cdot 572$ *mit* $0 \leq x < \frac{572}{d}$ *gilt. (Jeweils* 2 *P.)*	
	Die Lösung für d ist	4
	Die Lösung für x ist	43
	Die Lösung für y ist	-46

Beantworten Sie die folgenden Aufgaben schriftlich. Beweisen Sie alle Ihre Behauptungen.
Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
Fangen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite an.

7 Es seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \mid n$ (das heißt m teilt n in $\mathbb{Z}$). *(4 Punkte)*
Zeigen Sie, dass dann auch $\varphi(m) \mid \varphi(n)$ gilt. Hier ist φ die Eulersche Phi-Funktion.

8 Es sei $G = S_\Omega$ die symmetrische Gruppe auf der Menge $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Die Menge $M = \{\{a, b\} \mid a, b \in \Omega, a \neq b\}$ der zweielementigen Teilmengen von Ω ist eine G-Menge, wenn man für $g \in G$

$$\{a, b\} * g := \{a^g, b^g\}$$

festlegt.
Bestimmen Sie die Länge der Bahn $\{3, 7\} * G$ und die Ordnung des Stabilisators $G_{\{3,7\}}$.
(4 Punkte)

9 Zehn befreundete Radrennfahrer nehmen an einem Radrennen teil und fahren immer hintereinander. Jeden Kilometer wechseln sie ihre Reihenfolge wie folgt (siehe auch folgende Abbildung):

- Der erste Fahrer wird der letzte,
- der zweite Fahrer der vorletzte,
- der dritte Fahrer der drittletzte und
- alle anderen Fahrer wechseln um 3 Positionen nach vorne.

A B C D E F G H I K → D E F G H I K C B A

(a) Nach wievielen Wechseln fährt Fahrer A erstmals wieder ganz vorne?
(b) Nach wievielen Wechseln fahren alle erstmals wieder in der Reihenfolge wie am Anfang?
($2 + 2$ *Punkte)*

10 Es sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$ und $G = (V, E, f)$ ein schlichter Graph mit $|V| = n$ und $|E| > \binom{n-1}{2}$.
(a) Zeigen Sie, dass G zusammenhängend ist. (b) Gibt es einen unzusammenhängenden, schlichten Graphen G mit $|V| = n$ und $|E| = \binom{n-1}{2}$? *(*$3 + 2$ *Punkte)*