16.12.2005

Scheinklausur zur Linearen Algebra I, WS 05/06, 1. Teil

Prof. Dr. G. Hiß

Tragen Sie bitte auf diesem Deckblatt leserlich und in **Blockbuchstaben** Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer ein und unterschreiben Sie.

Name: ______________________________

Vorname: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

Eigenhändige Unterschrift: ______________________________

	Krz	Erg	9	10	11	12	Σ
Punkte							
Nachk.							

Zum Ankreuzteil:

Kreuzen Sie bei jeder Frage entweder „Ja“ oder „Nein“ oder nichts an.
Auswertung: Jedes richtige Kreuz gibt einen Pluspunkt, jedes falsche Kreuz einen Minuspunkt. Jede Aufgabe gibt immer mindestens 0 Punkte, Minuspunkte wirken also nicht über Aufgaben hinweg. Wenn Sie bei einer Frage unsicher sind, machen Sie einfach kein Kreuz.
Sie brauchen Ihre Kreuze nicht zu begründen!

Zum Ergebnisteil:

In diesem Teil müssen Sie Ihre Aussagen **nicht** begründen. Es zählt nur das richtige Ergebnis.

Zu den Aufgaben mit Begründungen:

In diesem Teil müssen Sie alle Aussagen begründen.
Natürlich brauchen Sie Aussagen aus der Vorlesung nicht noch einmal zu beweisen.

Gruppe A

Scheinklausur 1. Teil, 16.12.2005

Lineare Algebra I, WS 2005/06, Prof. Dr. G. Hiß

Name: ______________________________ **Matrikelnummer:** ____________________

Kreuzen Sie bei jeder Frage entweder „Ja“ oder „Nein“ oder nichts an.
Auswertung der Multiple-Choice-Aufgaben: Ein richtiges Kreuz ergibt $+1$ Punkt, ein falsches Kreuz ergibt -1 Punkt, keine Angabe zählt 0 Punkte. In jeder Aufgabe bekommen Sie mindestens 0 Punkte.

1	Sind die folgenden Aussagen über lineare Gleichungssysteme richtig?		
	Jedes inhomogene lineare Gleichungssystem mit mehr Gleichungen als Unbekannten hat keine Lösung.	☐ Ja	$\boxed{\square}$ Nein
	Jedes homogene lineare Gleichungssystem über $\mathbb{Q}$ mit weniger Gleichungen als Unbekannten hat unendlich viele Lösungen.	$\boxed{\square}$ Ja	☐ Nein
	Ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{Q}^{m \times 1}$ hat genau dann eine Lösung, wenn b im Spaltenraum von A liegt.	$\boxed{\square}$ Ja	☐ Nein
2	Beantworten Sie die folgenden Fragen über Restklassenringe.		
	Ist $\overline{21}$ eine Einheit in $\mathbb{Z}/133\mathbb{Z}$?	☐ Ja	$\boxed{\square}$ Nein
	Ist $\overline{3}^{2005} = \overline{3}^{2001}$ in $\mathbb{Z}/80\mathbb{Z}$?	$\boxed{\square}$ Ja	☐ Nein
	Sei $a \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ eine Einheit. Ist dann auch a^3 eine Einheit?	$\boxed{\square}$ Ja	☐ Nein
3	Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Sind die folgenden Aussagen für alle Vektoren $v_1, v_2, v_3 \in V$ richtig?		
	Wenn $v_3 \in \langle v_1, v_2 \rangle$ ist, dann gilt $v_1 \in \langle v_2, v_3 \rangle$.	☐ Ja	$\boxed{\square}$ Nein
	Wenn $v_1 \in \langle v_2, v_3 \rangle$ ist, dann ist $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \langle v_2, v_3 \rangle$.	$\boxed{\square}$ Ja	☐ Nein
	Wenn $\langle v_1 \rangle = \langle v_2 \rangle$ ist, dann existiert ein $a \in K$ mit $a \cdot v_1 = v_2$.	$\boxed{\square}$ Ja	☐ Nein
4	Es seien K ein Körper und $\varphi : V \to W$ und $\psi : W \to V$ lineare Abbildungen zwischen den K-Vektorräumen V und W. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr?		
	Bild $\psi \circ \varphi \subseteq$ Bild ψ	$\boxed{\square}$ Ja	☐ Nein
	Kern $\psi \circ \varphi \subseteq$ Kern ψ	☐ Ja	$\boxed{\square}$ Nein
	Kern $\psi \circ \varphi \subseteq$ Kern $\varphi \circ \psi$	☐ Ja	$\boxed{\square}$ Nein
5	Es sei $f : M \to N$ eine Abbildung zwischen zwei nicht-leeren Mengen M und N. Sind die folgenden Aussagen richtig?		
	f ist surjektiv genau dann, wenn f keine leeren Fasern hat.	$\boxed{\square}$ Ja	☐ Nein
	f ist injektiv genau dann, wenn jede Faser genau ein Element hat.	☐ Ja	$\boxed{\square}$ Nein
	f ist bijektiv genau dann, wenn jede Faser mindestens ein Element hat.	☐ Ja	$\boxed{\square}$ Nein

Bearbeiten Sie die folgenden Rechenaufgaben und schreiben Sie die Ergebnisse in die dafür vorgesehenen Kästchen. Sie brauchen Ihre Ergebnisse **nicht** zu begründen, für Begründungen und Ansätze gibt es aber auch **keine** Punkte. Für die richtige Antwort bekommen Sie die angegebene Punktzahl. Für eine falsche Antwort gibt es **Null** Punkte.

6 Bestimmen Sie die folgenden Anzahlen: *(je 1 Punkt)*

(a) Anzahl der injektiven Abbildungen $\{1,2,3\} \to \{4,5\}$
(b) Anzahl der surjektiven Abbildungen $\{1,2,3\} \to \{4,5\}$
(c) Anzahl der injektiven Abbildungen $\{1,2\} \to \{4,5,6\}$
(d) Anzahl der surjektiven Abbildungen $\{1,2\} \to \{4,5,6\}$
(e) Anzahl der injektiven Abbildungen $\{1,2,3\} \to \{4,5,6\}$
(f) Anzahl der surjektiven Abbildungen $\{1,2,3\} \to \{4,5,6\}$

(a) $\boxed{}$ (b) $\boxed{}$ (c) $\boxed{}$ (d) $\boxed{}$ (e) $\boxed{}$ (f) $\boxed{}$

7 Bestimmen Sie eine Matrix $N \in \mathbb{Z}^{2\times 4}$, für die $MN = P$ gilt mit den folgenden Matrizen M und P: *(4 Punkte)*

$$M := \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}^{2\times 2} \qquad \text{und} \qquad P := \begin{bmatrix} 10 & -1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -3 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}^{2\times 4}$$

N :

8 Es sei $\mathbb{F}_2 = \{0,1\}$ der Körper mit 2 Elementen. Bestimmen Sie die Menge aller $x \in \mathbb{F}_2^{5\times 1}$ mit $Ax = b$, wobei $A \in \mathbb{F}_2^{4\times 5}$ und $b \in \mathbb{F}_2^{4\times 1}$ die folgenden sind: *(6 Punkte)*

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad b := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ergebnis: $\boxed{}$

Beantworten Sie die folgenden Aufgaben schriftlich. Beweisen Sie alle Ihre Behauptungen.
Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
Fangen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite an.

9 Eine quadratische Matrix A heißt **symmetrisch**, wenn $A = A^t$ ist.
Es seien K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ und $A, B \in K^{n\times n}$ symmetrisch.
Zeigen Sie, dass AB genau dann gleich BA ist, wenn AB symmetrisch ist. *(6 Punkte)*

10 Es sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ und $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{Q}^{n\times n}$ eine Teilmenge. Zeigen Sie, dass die Menge $\{A \in \mathbb{Q}^{n\times n} \mid AX = XA \text{ für alle } X \in \mathcal{M}\}$ ein Untervektorraum von $\mathbb{Q}^{n\times n}$ ist. *(4 Punkte)*

11 Es sei $A \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$ mit $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ und $\varphi : \mathbb{Q}^{2\times 2} \to \mathbb{Q}^{2\times 2}, X \mapsto AX + XA$.

(a) Zeigen Sie, dass φ linear ist. *(1 Punkt)*
(b) Bestimmen Sie den Kern von φ. *(2 Punkte)*
(c) Bestimmen Sie das Bild von φ. *(2 Punkte)*

12 Es seien M, N und S nicht-leere Mengen und $\varphi : M \to N$ und $\psi : N \to S$ Abbildungen. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Sind φ und ψ injektiv, dann ist auch $\psi \circ \varphi$ injektiv. *(1 Punkt)*
(b) Ist φ injektiv und ψ surjektiv, dann ist $\psi \circ \varphi$ surjektiv. *(1 Punkt)*
(c) Sind φ und ψ surjektiv, dann ist auch $\psi \circ \varphi$ surjektiv. *(1 Punkt)*
(d) Ist φ surjektiv und ψ injektiv, dann ist $\psi \circ \varphi$ injektiv. *(1 Punkt)*

Gruppe B

Scheinklausur 1. Teil, 16.12.2005

Lineare Algebra I, WS 2005/06, Prof. Dr. G. Hiß

Name: ________________________________ **Matrikelnummer:** ____________________

Kreuzen Sie bei jeder Frage entweder „Ja“ oder „Nein“ oder nichts an.
Auswertung der Multiple-Choice-Aufgaben: Ein richtiges Kreuz ergibt $+1$ Punkt, ein falsches Kreuz ergibt -1 Punkt, keine Angabe zählt 0 Punkte. In jeder Aufgabe bekommen Sie mindestens 0 Punkte.

1	Es sei $f : M \to N$ eine Abbildung zwischen zwei nicht-leeren Mengen M und N. Sind die folgenden Aussagen richtig?		
	f ist injektiv genau dann, wenn jede Faser genau ein Element hat.	☐ Ja	$\boxed{\square}$ Nein
	f ist bijektiv genau dann, wenn jede Faser mindestens ein Element hat.	☐ Ja	$\boxed{\square}$ Nein
	f ist surjektiv genau dann, wenn f keine leeren Fasern hat.	$\boxed{\square}$ Ja	☐ Nein
2	Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Sind die folgenden Aussagen für alle Vektoren $v_1, v_2, v_3 \in V$ richtig?		
	Wenn $v_1 \in \langle v_2, v_3 \rangle$ ist, dann ist $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \langle v_2, v_3 \rangle$.	$\boxed{\square}$ Ja	☐ Nein
	Wenn $v_3 \in \langle v_1, v_2 \rangle$ ist, dann gilt $v_1 \in \langle v_2, v_3 \rangle$.	☐ Ja	$\boxed{\square}$ Nein
	Wenn $\langle v_1 \rangle = \langle v_2 \rangle$ ist, dann existiert ein $a \in K$ mit $a \cdot v_1 = v_2$.	$\boxed{\square}$ Ja	☐ Nein
3	Beantworten Sie die folgenden Fragen über Restklassenringe.		
	Ist $\overline{3}^{2005} = \overline{3}^{2001}$ in $\mathbb{Z}/80\mathbb{Z}$?	$\boxed{\square}$ Ja	☐ Nein
	Sei $a \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ eine Einheit. Ist dann auch a^3 eine Einheit?	$\boxed{\square}$ Ja	☐ Nein
	Ist $\overline{21}$ eine Einheit in $\mathbb{Z}/133\mathbb{Z}$?	☐ Ja	$\boxed{\square}$ Nein
4	Sind die folgenden Aussagen über lineare Gleichungssysteme richtig?		
	Ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{Q}^{m \times 1}$ hat genau dann eine Lösung, wenn b im Spaltenraum von A liegt.	$\boxed{\square}$ Ja	☐ Nein
	Jedes inhomogene lineare Gleichungssystem mit mehr Gleichungen als Unbekannten hat keine Lösung.	☐ Ja	$\boxed{\square}$ Nein
	Jedes homogene lineare Gleichungssystem über $\mathbb{Q}$ mit weniger Gleichungen als Unbekannten hat unendlich viele Lösungen.	$\boxed{\square}$ Ja	☐ Nein
5	Es seien K ein Körper und $\varphi : V \to W$ und $\psi : W \to V$ lineare Abbildungen zwischen den K-Vektorräumen V und W. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr?		
	Kern $\psi \circ \varphi \subseteq$ Kern ψ	☐ Ja	$\boxed{\square}$ Nein
	Bild $\psi \circ \varphi \subseteq$ Bild ψ	$\boxed{\square}$ Ja	☐ Nein
	Kern $\psi \circ \varphi \subseteq$ Kern $\varphi \circ \psi$	☐ Ja	$\boxed{\square}$ Nein

Bearbeiten Sie die folgenden Rechenaufgaben und schreiben Sie die Ergebnisse in die dafür vorgesehenen Kästchen. Sie brauchen Ihre Ergebnisse **nicht** zu begründen, für Begründungen und Ansätze gibt es aber auch **keine** Punkte. Für die richtige Antwort bekommen Sie die angegebene Punktzahl. Für eine falsche Antwort gibt es **Null** Punkte.

6 Bestimmen Sie eine Matrix $N \in \mathbb{Z}^{2\times 4}$, für die $MN = P$ gilt mit den folgenden Matrizen M und P: *(4 Punkte)*

$$M := \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}^{2\times 2} \qquad \text{und} \qquad P := \begin{bmatrix} 10 & -1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -3 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}^{2\times 4}$$

N :

7 Es sei $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ der Körper mit 2 Elementen. Bestimmen Sie die Menge aller $x \in \mathbb{F}_2^{5\times 1}$ mit $Ax = b$, wobei $A \in \mathbb{F}_2^{4\times 5}$ und $b \in \mathbb{F}_2^{4\times 1}$ die folgenden sind: *(6 Punkte)*

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad b := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ergebnis:

8 Bestimmen Sie die folgenden Anzahlen: *(je 1 Punkt)*

(a) Anzahl der injektiven Abbildungen $\{1, 2, 3\} \to \{4, 5\}$
(b) Anzahl der surjektiven Abbildungen $\{1, 2, 3\} \to \{4, 5\}$
(c) Anzahl der injektiven Abbildungen $\{1, 2\} \to \{4, 5, 6\}$
(d) Anzahl der surjektiven Abbildungen $\{1, 2\} \to \{4, 5, 6\}$
(e) Anzahl der injektiven Abbildungen $\{1, 2, 3\} \to \{4, 5, 6\}$
(f) Anzahl der surjektiven Abbildungen $\{1, 2, 3\} \to \{4, 5, 6\}$

(a) ☐ (b) ☐ (c) ☐ (d) ☐ (e) ☐ (f) ☐

Beantworten Sie die folgenden Aufgaben schriftlich. Beweisen Sie alle Ihre Behauptungen.
Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
Fangen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite an.

9 Eine quadratische Matrix A heißt **symmetrisch**, wenn $A = A^t$ ist.
Es seien K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ und $A, B \in K^{n\times n}$ symmetrisch.
Zeigen Sie, dass AB genau dann gleich BA ist, wenn AB symmetrisch ist. *(6 Punkte)*

10 Es sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ und $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{Q}^{n\times n}$ eine Teilmenge. Zeigen Sie, dass die Menge $\{A \in \mathbb{Q}^{n\times n} \mid AX = XA \text{ für alle } X \in \mathcal{M}\}$ ein Untervektorraum von $\mathbb{Q}^{n\times n}$ ist. *(4 Punkte)*

11 Es sei $A \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$ mit $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ und $\varphi : \mathbb{Q}^{2\times 2} \to \mathbb{Q}^{2\times 2}, X \mapsto AX + XA$.

(a) Zeigen Sie, dass φ linear ist. *(1 Punkt)*
(b) Bestimmen Sie den Kern von φ. *(2 Punkte)*
(c) Bestimmen Sie das Bild von φ. *(2 Punkte)*

12 Es seien M, N und S nicht-leere Mengen und $\varphi : M \to N$ und $\psi : N \to S$ Abbildungen. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Sind φ und ψ injektiv, dann ist auch $\psi \circ \varphi$ injektiv. *(1 Punkt)*
(b) Ist φ injektiv und ψ surjektiv, dann ist $\psi \circ \varphi$ surjektiv. *(1 Punkt)*
(c) Sind φ und ψ surjektiv, dann ist auch $\psi \circ \varphi$ surjektiv. *(1 Punkt)*
(d) Ist φ surjektiv und ψ injektiv, dann ist $\psi \circ \varphi$ injektiv. *(1 Punkt)*