Aufgabenblatt 1 zur
Vordiplom-Klausur Lineare Algebra (16. 3. 1998)

Professor Dr. G. Hiß, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

---

Aufgabe 1.
Es seien V_1 der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 über $\mathbb{Q}$,
V_2 der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 über $\mathbb{R}$,
V_3 der von $\{ [3,-1,3,2,1], [4,2,-1,1,3], [5,1,1,2,3] \}$ erzeugte Untervektorraum von $\mathbb{R}^5$,
V_4 der Quotientenvektorraum $\mathbb{R}^5/V_3$.

(a) Welche der Vektorräume V_1 bis V_4 sind isomorph, welche nicht?
(Bei dieser Aufgabe kommt es auf vollständige Begründung und sorgfältige Argumentation an.)

(b) Geben Sie für ein Paar $V_i \cong V_j$ mit $i \neq j$ einen konkreten Isomorphismus von V_i nach V_j an.
(Erläutern Sie Ihre Rechnung.) *6 + 4 = 10 Punkte*

Aufgabe 2.
Es sei K ein endlicher Körper mit q Elementen und $V = \{f \in K[X] \mid \deg(f) \leq 20\}$ der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 20 über K, und es sei n eine beliebige natürliche Zahl. Wie viele linear unabhängige n-Tupel von Vektoren gibt es in V?

Finden Sie eine geschlossene Formel, und beweisen Sie sie. *7 Punkte*

Aufgabe 3.
Es seien $V = \mathbb{Q}^{1\times 3}$ und $W = \mathbb{Q}^{1\times 2}$, und es seien $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ und $\mathcal{B}' = (v_2 + v_3,\ 2v_1 + 3v_3,\ v_1 - v_2)$ Basen von V und $\mathcal{C} = (w_1, w_2)$ und $\mathcal{C}' = (3w_1 + 2w_2,\ 7w_1 + 5w_2)$ Basen von W. Weiter sei φ die durch die Abbildungsmatrix $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ definierte lineare Abbildung von V nach W.

(a) Berechnen Sie die Basiswechselmatrizen $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_V)$ sowie $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'}(\mathrm{id}_W)$ und $M_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{C}}(\mathrm{id}_W)$.

(b) Berechnen Sie mit Hilfe der obigen Matrizen die Abbildungsmatrix $M_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{B}'}(\varphi)$.

(c) Es sei $v = v_1 + v_2 + v_3 \in V$. Berechnen Sie die Koordinatenvektoren $\kappa_{\mathcal{C}}(\varphi(v))$ und $\kappa_{\mathcal{C}'}(\varphi(v))$.

Erklären Sie Ihre Rechnung, soweit nötig. *3 + 3 + 3 = 9 Punkte*

Aufgabe 4.
Welches ist die kleinste Zahl m, für die es ein lineares Gleichungssystem mit m Gleichungen und 5 Unbekannten über einem geeigneten Körper K gibt, das genau 64 Lösungen besitzt?

(Antwort mit Beweis.) *4 Punkte*

Aufgabe 5.
Es sei $V < \mathbb{R}[X]$ der Vektorraum der rellen Polynome vom Grad ≤ 3. In V seien die Teilräume

$$U = \langle X^3 + 2X^2 - X - 2,\ X^3 + 3X^2 - 2X + 1,\ X^3 + 5X^2 - 4X + 7 \rangle \quad \text{und}$$
$$W = \langle X^3 + X^2 + 3X - 2,\ 2X^3 + 3X^2 + 8X + 2 \rangle$$

gegeben. Berechnen Sie eine Basis von $U \cap W$ und eine Basis von $U + W$.

Erläutern Sie Ihre Rechnung (und vergewissern Sie sich am Schluß, daß die Basen, die Sie angeben, tatsächlich aus Polynomen bestehen). *5 Punkte*

Aufgabenblatt 2 zur

Vordiplom-Klausur Lineare Algebra (16. 3. 1998)

Professor Dr. G. Hiß, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

---

Aufgabe 6.
Invertieren Sie die Matrix $A = \begin{bmatrix} 10 & 1 & -2 \\ -19 & -2 & 4 \\ 25 & 3 & -5 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$.

Sie brauchen dabei nicht anzugeben, welche elementaren Umformungen Sie benutzen. Sie müssen aber am Schluß die Matrix A^{-1} explizit angeben. Empfehlung: Vermeiden Sie bei der Rechnung Brüche. (Das Ergebnis ist ganzzahlig.) *5 Punkte*

Aufgabe 7.
Für welche Werte des Parameters $t \in \mathbb{R}$ ist die Matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & t & 4 \\ 2 & t^2 & 5 \\ 3 & t^3 & 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ invertierbar, für welche nicht? (Antwort mit Beweis.) *3 Punkte*

Aufgabe 8.
Berechnen Sie die Determinante der Matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}^{4\times 4}$ mit Hilfe des Laplaceschen Entwicklungssatzes. Entwickeln Sie dabei $|A|$ und alle vorkommenden 3×3-Unterdeterminanten jeweils nach der letzten Spalte. (Also keine vorherigen elementaren Umformungen, Entwicklung nach anderen Spalten oder Zeilen oder Anwendung der Regel von Sarruss.) *3 Punkte*

Aufgabe 9.
Es sei $V = \mathbb{R}^{1\times 3}$ und $\varphi : V \to V$ der durch $\varphi([\,a, b, c\,]) = [\,2a,\ a + b + 2c,\ -b + 4c\,]$ definierte Endomorphismus von V.

(a) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ von φ bezüglich der Standardbasis $\mathcal{B}$ von V.

(b) Berechnen Sie die Eigenwerte von φ und ihre algebraischen Vielfachheiten.

(c) Berechnen Sie für jeden Eigenwert von φ seinen Eigenraum und seine geometrische Vielfachheit.

1 + 3 + 6 = 10 Punkte

Aufgabe 10.
Es sei K ein Körper und $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in K^{2\times 2}$.

(a) Berechnen Sie die zu A komplementäre Matrix $\tilde{A}$. (Geben Sie nicht nur das Ergebnis an, sondern zeigen Sie, wie Sie darauf gekommen sind.)

(b) Zeigen Sie, daß die zu $\tilde{A}$ komplementäre Matrix $\tilde{\tilde{A}}$ gleich A ist. *3 + 1 = 4 Punkte*

Aufgabe 11.
Es sei K ein Körper und $a, b \in K$. Zeigen Sie: Die Matrizen $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ und $B = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ sind ähnlich.

4 Punkte
