Aufgabenblatt 1 (Lineare Algebra I) zur
Vordiplom-Klausur Mathematik II (15. 3. 1999)

Professor Dr. G. Hiß, Lehrstuhl D für Mathematik
Professor Dr. E. Triesch, Lehrstuhl II für Mathematik
RWTH Aachen

Aufgabe 1.
Gegeben seien zwei Vektorräume V und W, ein Untervektorraum U von W und eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to W$. Beweisen Sie: $\varphi^{-1}(U) := \{v \in V \mid \varphi(v) \in U\}$ ist ein Untervektorraum von V. *4 Punkte*

Aufgabe 2.
Untersuchen Sie
(a) im Fall $V = \mathbb{Q}^{1\times 2}$,
(b) im Fall $V = \mathbb{F}_2^{1\times 2}$,
ob die Abbildung $\varphi\colon V \to V,\ [\,a,\, b\,] \mapsto [\,a + b,\ a^2 + b^2\,]$ linear ist. *2 + 3 = 5 Punkte*

Aufgabe 3.
(a) Gegeben seien zwei lösbare, nicht homogene lineare Gleichungssysteme über einem endlichen Körper K, das eine mit 2 Gleichungen und 4 Unbekannten, das andere mit 4 Gleichungen und 2 Unbekannten. Können die beiden Systeme gleich viele Lösungen haben?
(b) Untersuchen Sie die gleiche Frage für den Fall, dass die beiden Systeme über verschiedenen endlichen Körpern K_1 und K_2 gegeben sind.
Antwort jeweils mit Beweis der Unmöglichkeit oder konkretem Beispiel. *4 + 3 = 7 Punkte*

Aufgabe 4.
Gegeben sei die Matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & a & 3 \\ 2 & a & 1 & 0 \\ a & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$.
(a) Berechnen Sie die Determinante von A mit Hilfe des Laplaceschen Entwicklungssatzes. Entwickeln Sie dabei $|A|$ und alle vorkommenden 3×3-Unterdeterminanten jeweils nach der letzten Spalte. (Also keine vorherigen elementaren Umformungen, Entwicklung nach anderen Spalten oder Zeilen oder Anwendung der Regel von Sarruss.)
(b) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist A invertierbar, für welche nicht?
(c) Für welche $a \in \mathbb{Z}$ ist A ganzzahlig invertierbar?
Antwort jeweils mit Begründung. *4 + 1 + 1 = 6 Punkte*

Aufgabe 5.
Es sei K ein Körper mit $\operatorname{char}(K) \neq 2$, und es sei $A \in K^{n\times n}$ mit $n \in \mathbb{N}$.
(a) Es sei $\det(A) = d$. Berechnen Sie $\det(-A)$.
(Geben Sie nicht nur das Ergebnis an, sondern begründen Sie es.)
(b) Zeigen Sie: Wenn n eine ungerade Zahl ist, gilt: Ist $A^t = -A$, so ist A nicht invertierbar.
(Wo geht hier die Charakteristik von K ein?)
(c) Zeigen Sie: Wenn n eine gerade Zahl ist, gilt die Aussage in (b) nicht.
(Betrachten Sie zunächst den Fall $n = 2$.) *2 + 3 + 3 = 8 Punkte*

Aufgabenblatt 2 (Lineare Algebra I) zur
Vordiplom-Klausur Mathematik II (15. 3. 1999)

Professor Dr. G. Hiß, Lehrstuhl D für Mathematik
Professor Dr. E. Triesch, Lehrstuhl II für Mathematik
RWTH Aachen

Aufgabe 6.
Im $\mathbb{R}$-Vektorraum V der reellen Polynome vom Grad ≤ 3 seien zwei Basen $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ und $\mathcal{C} = (w_1, w_2, w_3, w_4)$ mit der Basiswechselmatrix $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\mathrm{id}_V) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ sowie zwei Untervektorräume

$$U_1 = \langle\, v_1 + 3v_2 + v_4,\ v_1 - 3v_3 + v_4,\ v_1 + 4v_2 + v_3 + v_4 \,\rangle,$$
$$U_2 = \langle\, w_1 - w_3 + w_4,\ w_2 + 2w_3 - 2w_4 \,\rangle$$

gegeben.

(a) Stellen Sie die Erzeugenden von U_2 als Linearkombinationen aus $\mathcal{B}$ dar.

(b) Berechnen Sie mit Hilfe des Zassenhaus-Algorithmus eine Basis von $U_1 \cap U_2$ und eine Basis von $U_1 + U_2$. (Erläutern Sie Ihre Rechnung außerhalb des eigentlichen Zassenhaus-Schemas, insbesondere den Ansatz, und geben Sie die resultierenden Basen an.)

(c) Berechnen Sie nun die Basiswechselmatrix $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_V)$.

(d) Es seien $w_1 = X^3 - X^2 + 1$ und $w_2 = X^2 - X + 1$. Berechnen Sie eine Darstellung des Durchschnitts $U_1 \cap U_2$ als <u>Menge</u> von Polynomen. (Wenn Sie sich beim Zassenhaus-Algorithmus nicht verrechnet haben, geht das.) *4 + 5 + 3 + 3 = 15 Punkte*

Aufgabe 7.
Es sei $\mathbb{C}$ der Körper der komplexen Zahlen und $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$.

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte von A.

(b) Zeigen Sie, ohne irgendwelche Potenzen von A auszurechnen, dass A^5 gleich $16 \cdot A$ ist. (Auf die Argumentation kommt es an.) *4 + 3 = 7 Punkte*

Aufgabe 8.
Es sei $V = \mathbb{R}^{1\times 3}$ und $\varphi\colon V \to V$ der durch $\varphi(\,[a, b, c]\,) = [5a + 2c,\ 2a + 3b + 2c,\ -4a - c]$ definierte Endomorphismus von V.

(a) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ von φ bezüglich der Standardbasis $\mathcal{B}$ von V.

(b) Berechnen Sie die Eigenwerte von φ und ihre algebraischen Vielfachheiten.

(c) Berechnen Sie die Eigenräume von φ. (Achtung: Das müssen Untervektorräume von V sein.)

(d) Berechnen Sie eine Basis $\mathcal{C}$ von V, die aus Eigenvektoren von φ besteht, und geben Sie $\mathcal{C}$, die Basiswechselmatrix $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\mathrm{id}_V)$ und die Abbildungsmatrix $M_{\mathcal{C}}(\varphi)$ an.

1 + 3 + 4 + 3 = 11 Punkte

Aufgabe 9.
Es sei K ein Körper, $a \in K$ und $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$. Bestimmen Sie die Menge aller zu A ähnlichen Matrizen aus $K^{2\times 2}$. (Antwort mit Beweis.) *3 Punkte*

Aufgabenblatt 3 (Diskrete Strukturen) zur
Vordiplom-Klausur Mathematik II (15. 3. 1999)

Professor Dr. G. Hiß, Lehrstuhl D für Mathematik
Professor Dr. E. Triesch, Lehrstuhl II für Mathematik
RWTH Aachen

Aufgabe 10.
Es seien $a_1, ..., a_n$ beliebige natürliche Zahlen. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

a) Zwei der Zahlen aus der Menge $N = \{0, a_1, a_1 + a_2, ..., a_1 + a_2 + ... + a_n\}$ ergeben bei Division durch n denselben Rest.

b) Es gibt zwei Zahlen $0 \leq k < l \leq n$, so dass $\sum_{i=k+1}^{l} a_i$ ein Vielfaches von n ist. *8 Punkte*

Aufgabe 11.
Es sei a_n für $n \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Mengen $S \subseteq \{1, ..., n\}$ mit der Eigenschaft, dass

$$\{x, x+1 \,|\, x \in S\} = \{1, ..., n\}$$

ist. Drücken Sie die Zahlen a_n für $n \in \mathbb{N}$ mit Hilfe der Fibonacci-Zahlen aus.
(Hinweis: Beweisen Sie eine Rekursion für die a_n.) *8 Punkte*

Aufgabe 12.
Gegeben sei eine Folge von Graphen $(G_n)_{n\geq 1}$, so dass $G_1 = (\{v_1\}, \emptyset)$ und für $n \geq 2$ der Graph $G_n = (V_n, E_n)$ aus $G_{n-1} = (V_{n-1}, E_{n-1})$ entsteht, indem man zu V_{n-1} eine Ecke v_n hinzufügt und mit mehr als $\frac{n-1}{2}$ Ecken von G_{n-1} verbindet, d.h. $|N(v_n)| > \frac{n-1}{2}$.
Zeigen Sie, dass G_n für $n \geq 3$ hamiltonsch ist. *8 Punkte*

Aufgabe 13.
Zeigen Sie, dass $P_{n,k}$ für $n, k \in \mathbb{N}$ die Anzahl der ungeordneten Zahlpartitionen

$$n + k^2 - k = n_1 + n_2 + ... + n_k$$

von $n + k^2 - k$ in genau k Summanden ist, für die $|n_i - n_j| \geq 2$ für alle $1 \leq i < j \leq k$ gilt. *9 Punkte*

Aufgabe 14.
Die Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ genüge der Rekursion $a_{n+4} + 3\,a_{n+3} + a_{n+2} = 3\,a_{n+1} + 2\,a_n$ mit den Anfangsbedingungen $a_0 = 8$, $a_1 = -8$ und $a_2 = 24$. Bestimmen Sie eine explizite Darstellung dieser Folge.
7 Punkte

Aufgabenblatt 4 (Diskrete Strukturen) zur
Vordiplom-Klausur Mathematik II (15. 3. 1999)

Professor Dr. G. Hiß, Lehrstuhl D für Mathematik
Professor Dr. E. Triesch, Lehrstuhl II für Mathematik
RWTH Aachen

Aufgabe 15.

Die Mengen $A_1, ..., A_n \subseteq \{1, ..., n\}$ mit $n \in \mathbb{N}$ bilden eine „*Kette*“, falls $A_i \subseteq A_{i+1}$ und $A_i \neq A_{i+1}$ für $1 \leq i \leq n-1$ gilt. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

a) Für jede Kette $A_1, ..., A_n$ gilt $|A_i| = i$ für $1 \leq i \leq n$, und es gibt genau $n!$ verschiedene Ketten.

b) Zu einer Menge $B \subseteq \{1, ..., n\}$ gibt es genau $|B|! \cdot (n - |B|)!$ verschiedene Ketten $A_1, ..., A_n$ mit $A_{|B|} = B$.

c) Gilt für die Mengen $B_1, ..., B_m \subseteq \{1, ..., n\}$, dass $B_i \not\subseteq B_j$ für $1 \leq i \neq j \leq m$, dann gilt

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\binom{n}{|B_i|}} \leq 1.$$

12 Punkte

Aufgabe 16.

Es sei $G = (U \cup W, E)$ ein bipartiter Graph mit den Partitionsmengen U und W mit $|U| = |W| = n$. Es sei $d(x, G) = |N(x, G)| \geq \frac{n}{2}$ für alle $x \in U \cup W$.

Zeigen Sie, dass G ein perfektes Matching besitzt.

(Hinweis: Betrachten Sie eine minimale Eckenüberdeckung.) *8 Punkte*

Aufgabe 17.

Bestimmen Sie einen maximalen Fluss und einen minimalen Schnitt in dem Netzwerk $N = (V, B, q, s, c)$ mit

$$\begin{aligned} V &= \{q = 1, 2, 3, ..., 8, s = 9\}, \\ B &= \{(1,2), (1,5), (2,3), (2,6), (2,9), (3,4), (4,7), (5,4), \\ &\quad (5,7), (5,8), (6,3), (6,7), (7,9), (8,6), (8,9)\}, \end{aligned}$$

$c((1,2)) = 5$, $c((1,5)) = 10$, $c((2,3)) = 1$, $c((2,6)) = 2$, $c((2,9)) = 1$, $c((3,4)) = 2$, $c((4,7)) = 7$, $c((5,4)) = 5$, $c((5,7)) = 2$, $c((5,8)) = 3$, $c((6,3)) = 3$, $c((6,7)) = 1$, $c((7,9)) = 8$, $c((8,6)) = 2$ und $c((8,9)) = 1$. *8 Punkte*
