13.10.2006

# Scheinklausur Intensivkurs Lineare Algebra I

Prof. Dr. G. Nebe

Tragen Sie auf diesem Deckblatt bitte Ihren Namen in *Blockbuchstaben* sowie Ihre Matrikelnummer ein.

Name, Vorname: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

Bearbeitungszeit: 120 Minuten
erlaubte Hilfsmittel: keine

| Aufgabe | maximal | erreicht | Korrektor |
|---|---|---|---|
| 1 | 9 | | |
| 2 | 10 | | |
| 3 | 10 | | |
| 4 | 18 | | |
| 5 | 18 | | |
| 6 | 8 | | |
| 7 | 7 | | |
| Summe | 80 | | |

Tragen Sie bei den ersten beiden Aufgaben Ihre Antworten in die entsprechenden Kästchen ein. Falsche Antworten ergeben 0 Punkte.

Falls eine Frage keine Lösung besitzt, so vermerken Sie dies ebenfalls in dem entsprechenden Kästchen.

**Aufgabe 1** Bestimmen Sie (je 3 Punkte)

(a) alle $a \in \mathbb{Z}$ mit $a+144\mathbb{Z} = (11+144\mathbb{Z})^{-1}$ und $0 \leq a < 144$.

(b) alle $a \in \mathbb{Z}$ mit $a+144\mathbb{Z} = (10+144\mathbb{Z})^{-1}$ und $0 \leq a < 144$.

(c) $\mathrm{ggT}(X^3+\omega X^2+X+\omega,\ X^3+\omega X^2+\omega^2 X+1)$ in $\mathbb{F}_4[X]$.

**Aufgabe 2** Sei $H = \mathrm{Hom}(\mathbb{F}_2^3, \mathbb{F}_2^4)$. (je 2 Punkte)

(a) Bestimmen Sie $|H|$.

(b) Wieviele $\varphi \in H$ sind surjektiv?

(c) Wieviele verschiedene dreidimensionale Teilräume besitzt $\mathbb{F}_2^4$?

(d) Wieviele verschiedene zweidimensionale Teilräume besitzt $\mathbb{F}_2^4$?

(e) Wieviele $\varphi \in H$ sind injektiv?

Die folgenden fünf Fragen sind schriftlich zu bearbeiten.

Bitte fangen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite an.

Beachten Sie, daß für die folgenden Aufgaben der Lösungsweg und die Rechnungen mit in die Bewertung eingehen.

**Aufgabe 3** (10 Punkte)

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_2^{4\times 5}$. Weiter seien $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_2^{4\times 1}$.

(a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $Ax = b$.

(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $Ax = c$.

**Aufgabe 4** (10+2+3+3 Punkte)

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_5^{4\times 4}$.

(a) Bestimmen Sie $\mu_A(X)$ sowie alle Eigenwerte und Eigenräume von $A$.

(b) Zeigen Sie, daß $A$ diagonalisierbar ist und finden Sie eine Matrix $T \in \mathrm{GL}(4, \mathbb{F}_5)$ so, daß $T^{-1}AT$ Diagonalgestalt annimmt.

(c) Bestimmen Sie $\mathrm{Spur}(A^{2006})$.

(d) Geben Sie $\chi_A(X)$ und $\det(A)$ an.

**Bitte wenden!**

**Aufgabe 5** (3+4+1+4+6 Punkte)

Sei $\mathcal{V} = \mathbb{R}[X]_{\text{Grad}<3}$ versehen mit dem Skalarprodukt

$$\Phi\colon \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R},\ (p,q) \mapsto \frac{1}{2} \cdot \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\mathrm{d}x\ .$$

Weiter sei $\mathcal{U} = \{p(X) \in \mathcal{V} \mid p(0) = 0\}$. Ferner bezeichne $B = (1, X, X^2)$ die Standardbasis von $\mathcal{V}$.

(a) Bestimmen Sie ${}_B\Phi^B$.

(b) Geben Sie Orthonormalbasen von $\mathcal{U}$ und $\mathcal{U}^\perp$ an.

(c) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $\mathcal{V}$.

(d) Was ist die beste Approximation von $X^2 + X + 1$ an $\mathcal{U}$?

(e) Sei $\varphi\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V},\ p(X) \mapsto p(X) + p'(X)$. Bestimmen Sie ${}^B\varphi^B$ sowie das Minimalpolynom $\mu_\varphi(t) \in \mathbb{R}[t]$. Ist $\varphi$ normal? Begründen Sie Ihre Antwort.

**Aufgabe 6** (4+2+2 Punkte)

Es sei $K$ ein Körper. Weiter seien $A \in K^{n\times n}$ und $B = A - c \cdot I_n$ mit $c \in K$.
Zeigen Sie:

(a) Es ist $\lambda \in K$ genau dann ein Eigenwert von $A$, wenn $\lambda - c$ ein Eigenwert von $B$ ist.

(b) Es ist $A$ genau dann invertierbar, wenn $-c$ kein Eigenwert von $B$ ist.

(c) Es ist $A$ genau dann diagonalisierbar, wenn $B$ diagonalisierbar ist.

**Aufgabe 7** (7 Punkte)

Es seien $K$ ein Körper und $\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}$ drei $K$-Vektorräume. Weiter seien $\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ und $\psi \in \mathrm{Hom}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ so, daß $\psi \circ \varphi$ ein Isomorphismus ist. Zeigen Sie

$$\mathcal{V} = \mathrm{Bild}(\varphi) \oplus \mathrm{Kern}(\psi)\ .$$