Nachholklausur zur Linearen Algebra I Teil 1 (WS 92/93)

Lesezeit: 15 Minuten Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Bitte bearbeiten Sie auf jedem Blatt nur eine Aufgabe und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Es sind keine Hilfsmittel zugelassen. Bitte beachten Sie, daß ausführliche Begründungen einen `wesentlichen` Teil der Lösung einer Aufgabe bilden. Die Aufgaben können in beliebiger Reihenfolge bearbeitet werden. Viel Erfolg!

Aufgabe 1.
Welche der folgenden Relationen auf $\mathbb{Z}$ sind reflexiv, welche symmetrisch und welche transitiv? (jeweils Beweis oder Gegenbeispiel)

1. $x \sim y \Leftrightarrow x + y$ gerade. *3 Punkte*
2. $x \sim y \Leftrightarrow x \leq y - 1$. *3 Punkte*

Aufgabe 2.
Es sei $\mathbb{F}_3 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$ der Körper mit drei Elementen. Man bestimme die Dimensionen von T_1, T_2 und des Durchschnitts der Teilräume

$$T_1 = \left\langle \begin{pmatrix} \overline{1} \\ \overline{1} \\ \overline{1} \\ \overline{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{0} \\ \overline{2} \\ \overline{1} \\ \overline{1} \end{pmatrix} \right\rangle \text{ und } T_2 = \left\langle \begin{pmatrix} \overline{2} \\ \overline{2} \\ \overline{1} \\ \overline{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{0} \\ \overline{1} \\ \overline{2} \\ \overline{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{1} \\ \overline{0} \\ \overline{0} \\ \overline{2} \end{pmatrix} \right\rangle \text{ von } {\mathbb{F}_3}^4.$$

4 Punkte

Aufgabe 3.
Es sei $V = \{a + bx + cx^2 \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}$ der Vektorraum aller Polynome $p \in \mathbb{Q}[x]$ mit $\operatorname{Grad} p \leq 2$. Bestimmen Sie die Dimension und eine Basis für den Teilraum
$T = \{p \in V \mid p(5) = 0\}$. *3 Punkte*

Aufgabe 4.

Es sei $V = \mathbb{R}^4$ und $T = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$.

a) Man berechne eine Basis von T und ergänze sie zu einer Basis von V. *3 Punkte*

b) Man gebe eine Basis von V/T an. *1 Punkt*

Aufgabe 5.
Es sei $V = \{a + bx + cx^2 \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}$ der Vektorraum aller Polynome $p \in \mathbb{Q}[x]$ mit $\operatorname{Grad} p \leq 2$ und φ die lineare Abbildung von V nach V mit $\varphi : V \to V, p \to \varphi(p)$ mit $(\varphi(p))(x) = p'(x) + p'(x + 1)$, wobei p' wie üblich die Ableitung von p nach x bezeichnet. (Die Linearität von φ braucht nicht gezeigt zu werden.) Man bestimme alle Elemente von V, die durch φ auf $x - 2$ abgebildet werden. *4 Punkte*

Aufgabe 6.
Es sei V ein K-Vektorraum, und es seien X, Y und Z drei verschiedene Vektoren aus V. Man widerlege (durch Angabe eines Gegenbeispiels) oder beweise die folgende Behauptung: Sind die Mengen $\{X, Y\}$, $\{Y, Z\}$ und $\{Z, X\}$ linear unabhänigig, so ist auch die Menge $\{X, Y, Z\}$ linear unabhängig. *3 Punkte*

Aufgabe 7.
Es sei $V = \mathbb{Q}^3$, $W = \mathbb{Q}^2$, B eine Basis von V und C eine Basis von W. Es seien lineare Abbildungen φ_1, φ_2, φ_3 und φ_4 gegeben mit ${}_B\varphi_{1C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, ${}_B\varphi_{2C} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, ${}_C\varphi_{3B} = ({}_B\varphi_{1C})^t$ und ${}_C\varphi_{4B} = ({}_B\varphi_{2C})^t$. Welche der Abbildungen sind injektiv, welche sind surjektiv? (kurze Begründung) *4 Punkte*

Aufgabe 8.
Man beweise oder widerlege: Der Vektorraum $V = K^5$ hat für jeden Körper K mit p Elementen (p Primzahl) genauso viele ein- wie vierdimensionale Teilräume. *5 Punkte*

Aufgabe 9.
Es sei $V = \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der Vektorraum aller Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Welche der folgenden Teilmengen von V sind Teilräume? (jeweils Beweis oder Gegenbeispiel)

a) $M_1 = \{f \in V \mid f(5) = f(-5)\}$ *3 Punkte*

b) $M_2 = \{f \in V \mid f(5) \cdot f(-5) = 0\}$ *3 Punkte*

Aufgabe 10.
Es sei $V = \mathbb{Q}^3$ und $W = \mathbb{Q}^2$. Dann ist $B = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\}$ eine Basis von V und $D = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}$ Basis von W. Es sei weiter eine lineare Abbildung φ von V nach W definiert durch $\varphi(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix}$. Man bestimme die Matrix ${}_D\varphi_B$ der linearen Abbildung φ. *3 Punkte*

Aufgabe 11.
Es sei V ein Vektorraum, T ein Teilraum von V, der nicht nur aus dem Nullvektor besteht, und $X_1, ..., X_n \in V$, so daß $(T + X_1, ..., T + X_n)$ eine Basis von V/T ist. Man beweise oder widerlege:

a) $(X_1, ..., X_n)$ ist ein Erzeugendensystem von V. *1 Punkt*

b) $(X_1, ..., X_n)$ ist linear unabhängig in V. *2 Punkte*

c) $(X_1, ..., X_n)$ ist eine Basis von V. *1 Punkt*

Aufgabe 12.
Es sei $\mathbb{F}_4$ der Körper mit vier Elementen. Wieviele invertierbare Matrizen gibt es in ${\mathbb{F}_4}^{3\times 3}$? *4 Punkte*