Aufgabenblatt 1 zur

Vordiplom-Klausur Lineare Algebra I (14. 4. 1993)

Professor Dr. J. Neubüser, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

---

Aufgabe 1.

Geben Sie jeweils eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, daß

a) ein inhomogenes lineares Gleichungssystem lösbar ist, *2 Punkte*

b) ein homogenes lineares Gleichungssystem eindeutig lösbar ist. *2 Punkte*

Aufgabe 2.

Welche der folgenden Relationen auf $\mathbb{Z}$ sind reflexiv, welche symmetrisch und welche transitiv? (jeweils Beweis oder Gegenbeispiel!)

a) $x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{ggT}(x,y) = 7$ *3 Punkte*

b) $x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad 1 < xy$ *3 Punkte*

Aufgabe 3.

Es sei $V = \{a + bx + cx^2 \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}$ der Vektorraum aller Polynome $p \in \mathbb{Q}[x]$ mit $\mathrm{Grad}\, p \leq 2$. Welche der folgenden Teilmengen von V sind Teilräume? (jeweils Beweis oder Gegenbeispiel!)

a) $M_1 = \{p \in V \mid p(0) = 1\}$ *2 Punkte*

b) $M_2 = \{p \in V \mid p(-2) = 0\}$ *3 Punkte*

Aufgabe 4.

Es sei $V = \mathbb{R}^2$, und es sei $E = \mathrm{Hom}(V,V)$ der Endomorphismenring von V. Geben Sie einen Endomorphismus von V an, der Nullteiler von E ist, und zeigen Sie, daß er ein Nullteiler ist. *3 Punkte*

Aufgabe 5.

Gilt für alle Paare (φ, ψ) von linearen Abbildungen φ und ψ von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$, daß

a) Φ_1 mit $\Phi_1(X,Y) := \varphi(X) + \psi(Y)$ eine Bilinearform auf $\mathbb{R}^2$ ist, *3 Punkte*

b) Φ_2 mit $\Phi_2(X,Y) := \varphi(X) \cdot \psi(Y)$ eine Bilinearform auf $\mathbb{R}^2$ ist? *3 Punkte*

(jeweils Beweis oder Gegenbeispiel!)

Aufgabe 6.

Es sei V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum und V^{**} der Bidualraum von V, und es sei $T : V \to V^{**},\ X \mapsto X^{**}$ mit $X^{**}(\varphi) = \varphi(X)$ der aus der Vorlesung bekannte Isomorphismus von V auf V^{**}. Zeigen Sie: Für jeden Teilraum $U \leq V$ gilt

$$\mathrm{An}\, U = \bigcap_{X \in U} \mathrm{Kern}\, X^{**}.$$

5 Punkte

Aufgabenblatt 2 zur

Vordiplom-Klausur Lineare Algebra I (14. 4. 1993)

Professor Dr. J. Neubüser, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

---

Aufgabe 7.

Es sei $V = \mathbb{R}^3$ und $\mathcal{B} = (B_1, B_2, B_3)$ eine Basis von V. Ein Skalarprodukt Φ auf V sei gegeben durch ${}_{\mathcal{B}}\Phi_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie eine Basis für das Radikal von V bezüglich Φ.

5 Punkte

Aufgabe 8.

Invertieren Sie die Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$. *5 Punkte*

Aufgabe 9.

Es sei $V = \{a + bx + cx^2 \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}$ der Vektorraum aller Polynome $p \in \mathbb{Q}[x]$ mit $\operatorname{Grad} p \leq 2$. Eine Basis $\mathcal{B}$ von V ist $\{1, x, 1 + x^2\}$ (dies ist **nicht** zu zeigen). Man bestimme die Matrix ${}_{\mathcal{B}}\varphi_{\mathcal{B}}$ der linearen Abbildung $\varphi : V \to V, p \to \varphi(p)$ mit $(\varphi(p))(x) = p'(x) + p(x + 1)$, wobei p' wie üblich die Ableitung von p nach x bezeichnet. (Die Linearität von φ braucht **nicht** gezeigt zu werden.)

5 Punkte

Aufgabe 10.

Es sei V der Vektorraum aller Polynome $p \in \mathbb{Q}[x]$ mit $\operatorname{Grad} p \leq 3$ und T der von $\{x^3 + 1, x^2 + x + 3, 2x^3 - x^2 - x - 1\}$ erzeugte Teilraum.

a) Bestimmen Sie eine Basis für T. *3 Punkte*

b) Bestimmen Sie eine Basis für V/T. *3 Punkte*

Aufgabe 11.

Es sei $\mathcal{B}$ die Standardbasis von $V = \mathbb{R}^3$. Eine lineare Abbildung φ von V nach V sei durch ${}_{\mathcal{B}}\varphi_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gegeben. Man bestimme eine Fächerbasis für V bezüglich φ.

7 Punkte

Aufgabe 12.

Es sei $V = \mathbb{R}^3$ und $\mathcal{B} = (B_1, B_2, B_3)$ eine Basis von V. Ein Skalarprodukt Φ auf V sei gegeben durch ${}_{\mathcal{B}}\Phi_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 9 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie eine normierte Orthogonalbasis von V.

7 Punkte
