Semesterklausur zur Linearen Algebra I (15. 2. 97)

Professor Dr. J. Neubüser, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

Bitte bearbeiten Sie auf jedem Blatt nur eine Aufgabe, und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Von den 16 gegebenen Aufgaben für insgesamt 84 Punkte können Sie eine beliebige Auswahl in beliebiger Reihenfolge bearbeiten. Beachten Sie, daß ausführliche Begründungen einen wesentlichen Teil der Lösung einer Aufgabe bilden. Die Bearbeitungszeit beträgt 180 Minuten.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1.

Auf der Menge $M = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ der positiven geraden Zahlen definieren wir eine Verknüpfung $\circ$ durch $a \circ b = \dfrac{a \cdot b}{2}$ für alle $a, b \in M$.

(a) Ist $\circ$ assoziativ?

(b) Gibt es in M ein neutrales Element bezüglich $\circ$? Wenn ja, welches?

(c) Ist $(M, \circ)$ eine Gruppe? *3 Punkte*

Aufgabe 2.

Es sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$.

(a) Ist $M_1 = \{f \in V \mid f(3) + f(5) = f(8)\}$ ein Teilraum von V?

(b) Ist $M_2 = \{f \in V \mid f(2) \cdot f(4) = f(8)\}$ ein Teilraum von V?

Antwort jeweils mit Begründung. *4 Punkte*

Aufgabe 3.

Es sei φ die durch $\varphi\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3x_1 + 2x_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 - 2x_3 \end{bmatrix}$ gegebene Abbildung von $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$.

(a) Zeigen Sie, daß φ linear ist.

(b) Berechnen Sie eine Basis von Kern φ.

(c) Berechnen Sie eine Basis von Bild φ. *6 Punkte*

Aufgabe 4.

Es sei V ein 2-dimensionaler K-Vektorraum. Untersuchen Sie, ob die durch

$$R = \{\, (X, Y) \in V \times V \mid (X, Y) \text{ ist linear abhängig} \,\}$$

definierte Relation auf V reflexiv, symmetrisch oder transitiv ist. (Antwort jeweils mit Begründung) *4 Punkte*

Aufgabe 5.

Im <u>dreidimensionalen K-Vektorraum $V = K^3$</u> seien Vektoren X_1, X_2, Y_1, Y_2 gegeben, so daß jede der Folgen (X_1, X_2) und (Y_1, Y_2) linear unabhängig ist. Wir setzen $T = \langle X_1, X_2 \rangle$ und betrachten im Restklassenraum V/T die Folge (R_1, R_2) der Restklassen $R_1 = T + Y_1$ und $R_2 = T + Y_2$. Welche der folgenden Aussagen ist richtig? (Auf die Begründung Ihrer Antwort kommt es an.)

(a) (R_1, R_2) ist linear unabhängig.

(b) (R_1, R_2) ist linear abhängig.

(c) Beides kann vorkommen, es hängt von der Wahl der Vektoren ab. *4 Punkte*

Aufgabe 6.

Für verschiedene Körper K sei jeweils der Vektorraum $V = K^3$ gegeben und darin die Vektoren $X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $X_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $X_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Für welche Körper K gibt es zu jeder Wahl von Vektoren Y_1, Y_2, $Y_3 \in V$ eine lineare Abbildung $\varphi : V \to V$ mit $\varphi(X_i) = Y_i$ für $i = 1, 2, 3$? Antwort mit Beweis.

Hinweis: Beachten Sie die Charakteristik von K. *6 Punkte*

Aufgabe 7.

In $V = \mathbb{R}^2$ seien die Basen $\mathcal{B} = (B_1, B_2) = (\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix})$ und $\mathcal{C} = (C_1, C_2) = (\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix})$ gegeben.

(a) Berechnen Sie die Basiswechselmatrizen ${}_{\mathcal{B}}id_{\mathcal{C}}$ und ${}_{\mathcal{C}}id_{\mathcal{B}}$.

(b) Wir nehmen weiter an, die obigen Basisvektoren B_1 und B_2 seien Eigenvektoren eines Endomorphismus φ von V mit den zugehörigen Eigenwerten $c_1 = 5$ und $c_2 = -5$. Geben Sie die Abbildungsmatrix ${}_{\mathcal{B}}\varphi_{\mathcal{B}}$ an.

(c) Berechnen Sie aus den unter (a) und (b) berechneten Matrizen die Abbildungsmatrix ${}_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{C}}$ und dann die Abbildungsmatrizen ${}_{\mathcal{B}}\psi_{\mathcal{B}}$ und ${}_{\mathcal{C}}\psi_{\mathcal{C}}$ für $\psi = \varphi^{11}$. (Soweit darin hohe Potenzen von Zahlen vorkommen, brauchen Sie diese nicht auszumultiplizieren.) *8 Punkte*

Aufgabe 8.

In $V = \mathbb{R}^3$ seien die Teilräume $T_1 = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \rangle$ und $T_2 = \langle \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \rangle$ gegeben. Bestimmen Sie mit Hilfe des Zassenhaus-Algorithmus eine Basis von $\langle T_1, T_2 \rangle$ und eine Basis von $T_1 \cap T_2$. *6 Punkte*

Aufgabe 9.

Es sei V ein K-Vektorraum und $\varphi \in \operatorname{End}(V)$. Beweisen Sie: Ist φ ein Monomorphismus, aber kein Automorphismus von V, so ist $\dim V = \infty$. *4 Punkte*

Aufgabe 10.

(a) Ist jedes lineare Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 10 Unbekannten lösbar? (Antwort mit Beweis)

(b) Wie viele Elemente kann ein Körper haben, über dem es ein homogenes lineares Gleichungssystem mit genau 64 Lösungen gibt? Geben Sie alle Möglichkeiten an. (Nur aufzählen, ohne Beweis)

(c) Gibt es ein lineares Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 10 Unbekannten (über einem geeigneten Körper), das genau 64 Lösungen hat? (Antwort mit Beweis) *4 Punkte*

Aufgabe 11.

Es sei π die durch

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$i\pi$	7	8	11	10	9	12	3	2	6	5	1	4

gegebene Permutation auf der Menge $M = \{1, 2, \ldots, 12\}$.

(a) Schreiben Sie π und π^{-1} jeweils als Produkt ziffernfremder Zykel.

(b) Geben Sie die Bahnen auf M unter π an.

(c) Schreiben Sie π als Produkt von Transpositionen.

(d) Zeigen Sie, daß man π nicht als Produkt von Dreierzykeln schreiben kann.

(e) Berechnen Sie die Ordnung von π.

(f) Wie viele Elemente der Gruppe S_{12} haben die gleiche Zykelstruktur wie π? (Sie brauchen das Ergebnis nicht auszumultiplizieren, müssen es aber begründen.) *8 Punkte*

Aufgabe 12.

Berechnen Sie die Determinante der Matrix $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}^{4\times 4}$ mit Hilfe des Entwicklungssatzes. Entwickeln Sie dabei A und alle vorkommenden Unterdeterminanten jeweils nach der ersten Zeile. (Also keine vorherigen elementaren Umformungen und keine Entwicklung nach anderen Zeilen oder Spalten.) *3 Punkte*

Aufgabe 13.
Es sei $\mathbb{Z}_2[x]$ der Polynomring über $\mathbb{Z}_2$ und $P(\mathbb{Z}_2)$ der Ring aller Polynomabbildungen von $\mathbb{Z}_2$ in $\mathbb{Z}_2$, und es sei ε der Homomorphismus von $\mathbb{Z}_2[x]$ auf $P(\mathbb{Z}_2)$, der jedem Polynom

$$f = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n \in \mathbb{Z}_2[x]$$

die durch

$$\overline{f}\colon k \mapsto a_0 + a_1k + \ldots + a_nk^n \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}_2$$

definierte Polynomabbildung $\overline{f} \in P(\mathbb{Z}_2)$ zuordnet. Weiter sei

$$g = x^2 + x \in \mathbb{Z}_2[x] \quad \text{und} \quad G = \{f \cdot g \mid f \in \mathbb{Z}_2[x]\} \subseteq \mathbb{Z}_2[x].$$

Beweisen Sie: Es ist $G = \operatorname{Kern}\varepsilon$ (also gleich $\{f \in \mathbb{Z}_2[x] \mid \varepsilon(f) = 0 \in P(\mathbb{Z}_2)\}$).
Hinweis: Zeigen Sie zuerst $G \subseteq \operatorname{Kern}\varepsilon$ und dann $\operatorname{Kern}\varepsilon \subseteq G$. *9 Punkte*

Aufgabe 14.
Gegeben sei die Matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$.

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte von A und ihre Vielfachheiten.

(b) Berechnen Sie zu jedem Eigenwert von A den zugehörigen Eigenraum.

(c) Berechnen Sie eine Matrix $T \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$, so daß $T^{-1}AT$ Diagonalgestalt hat. *7 Punkte*

Aufgabe 15.
Es sei V ein K-Vektorraum, $\mathcal{B}$ eine Basis von V und $T \leq V$. Geben Sie (jeweils ohne Beweis) eine Definition an für

(a) den Dualraum V^* von V,

(b) den Annihilator $\operatorname{An}(T)$ in V^*,

(c) die zu $\mathcal{B}$ duale Basis von V^*. *3 Punkte*

Aufgabe 16.
Es sei $V = \mathbb{R}^4$ und $T = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} \rangle \leq V$. Berechnen Sie den Annihilator von T im Dualraum V^* von V. Stellen Sie dabei die Elemente φ aus $\operatorname{An}(T)$ durch ihre Abbildungsmatrizen ${}_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{B}}$ bezüglich der Standardbasen $\mathcal{B}$ von V und $\mathcal{C}$ von $\mathbb{R}$ dar. (Wichtig ist eine ausreichende Erläuterung Ihrer Rechnung.) *5 Punkte*
