Ankreuzteil

20.9.2000

Aufgabe 1.

Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum, $v_1, \ldots, v_n \in V$ und $1 \leq i, j \leq n$.
Sind folgende Aussagen richtig?

Ist $(v_1, \ldots, v_n)$ linear unabhängig, so ist $v_i \neq v_j$ für $i \neq j$ .... $\boxed{\square}$ Ja $\square$ Nein
Ist $\{v_1, \ldots, v_n\}$ linear unabhängig, so ist $v_i \neq v_j$ für $i \neq j$ .... $\square$ Ja $\boxed{\square}$ Nein
Ist (v_1, v_2) linear abhängig, so gibt es $s \in K$ mit $v_2 = s \cdot v_1$ .... $\square$ Ja $\boxed{\square}$ Nein
Sind (v_1, v_2), (v_2, v_3) und (v_1, v_3) linear unabhängig, so ist
(v_1, v_2, v_3) linear unabhängig .... $\square$ Ja $\boxed{\square}$ Nein
(v_1, v_2) ist linear unabhängig genau dann, wenn $(v_1 + v_2, v_2)$
linear unabhängig ist .... $\boxed{\square}$ Ja $\square$ Nein

---

Aufgabe 2.

Ein lineares Gleichungssystem mit m Gleichungen und n Unbekannten über dem Körper $\mathbb{F}_2$

– ist nicht eindeutig lösbar, wenn $m > n$ ist .... $\square$ Ja $\boxed{\square}$ Nein
– kann genau 6 Lösungen haben, wenn $m < n$ ist .... $\square$ Ja $\boxed{\square}$ Nein
– ist stets lösbar, wenn $m < n$ ist .... $\square$ Ja $\boxed{\square}$ Nein
– hat immer eine nicht-triviale Lösung, wenn es homogen ist .... $\square$ Ja $\boxed{\square}$ Nein
– kann genau 4 Lösungen haben, wenn $m = n - 1$ ist .... $\boxed{\square}$ Ja $\square$ Nein

---

Aufgabe 3.

Sei $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ und $\varphi_1 : V \to V$ definiert durch $\varphi_1(f)(x) = f(x+1)$, $\varphi_2 : V \to V$ durch $\varphi_2(f)(x) = f(x) + 1$ und $\varphi_3 : V \to V$ durch $\varphi_3(f)(x) = f(x^2)$ für $f \in V$ und $x \in \mathbb{R}$.

φ_1 ist injektiv .... $\boxed{\square}$ Ja $\square$ Nein
φ_1 ist linear .... $\boxed{\square}$ Ja $\square$ Nein
φ_2 ist linear .... $\square$ Ja $\boxed{\square}$ Nein
φ_2 ist surjektiv .... $\boxed{\square}$ Ja $\square$ Nein
φ_3 ist linear .... $\boxed{\square}$ Ja $\square$ Nein

Aufgabe 4.

Es sei (e_1, e_2, e_3) die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$. Es gibt eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$\varphi(e_1) = \varphi(e_2) = \varphi(e_1 + e_2) = e_3$ .... $\square$ Ja $\boxed{\square}$ Nein
$\varphi(e_1) = \varphi(e_3) = \varphi(e_1 + e_2) = e_3$ .... $\boxed{\square}$ Ja $\square$ Nein
$\mathrm{Kern}(\varphi) = \mathrm{Bild}(\varphi)$ .... $\square$ Ja $\boxed{\square}$ Nein
$\mathrm{Kern}(\varphi) \geq \mathrm{Bild}(\varphi)$ .... $\boxed{\square}$ Ja $\square$ Nein
$\varphi(e_1 + e_2) = \varphi(e_2 + e_3) = \varphi(e_1 + e_3) = e_3$ .... $\boxed{\square}$ Ja $\square$ Nein

---

Aufgabe 5.

Es sei $V = K^{2\times 2}$ mit einem beliebigen Körper K. Welche der folgenden Mengen sind Teilräume von V?

$\{A \in V \mid \mathrm{Spur}\, A = 0\}$ .... $\boxed{\square}$ Ja $\square$ Nein
$\{A \in V \mid \mathrm{Rg}\, A = 1\}$ .... $\square$ Ja $\boxed{\square}$ Nein
$\left\{A \in V \mid A \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}$ .... $\boxed{\square}$ Ja $\square$ Nein
$\{A \in V \mid A^2 = 0\}$ .... $\square$ Ja $\boxed{\square}$ Nein
$\{A \in V \mid A = A^T\}$ .... $\boxed{\square}$ Ja $\square$ Nein

---

Aufgabe 6.
Für jeden Körper K, jedes $n \in \mathbb{N}$, alle $A, B \in K^{n\times n}$ und alle $s \in K$ gilt:
$\det(A+B) = \det A + \det B$ .... $\square$ Ja $\boxed{\square}$ Nein
$\det(sA) = s \det A$ .... $\square$ Ja $\boxed{\square}$ Nein
$\det(AB) = \det(BA)$ .... $\boxed{\square}$ Ja $\square$ Nein
$\det A = \det B \quad \Longrightarrow \quad \det(A-B) = 0$ .... $\square$ Ja $\boxed{\square}$ Nein
Ist $A^2 = E_n$, so ist $\det A = 1$ .... $\square$ Ja $\boxed{\square}$ Nein

---

Aufgabe 7.
Für $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ sei $\chi = \chi_A = \det(X \cdot E_n - A)$ das charakteristische Polynom und $\mu = \mu_A$ das Minimalpolynom von A. Dann gilt für jedes solche A:
Ist $f \in \mathbb{C}[X]$ mit $f(A) = 0$, so ist $\chi \mid f$ .... $\square$ Ja $\boxed{\square}$ Nein
Ist $f \in \mathbb{C}[X]$ mit $\chi \mid f$, so ist $f(A) = 0$ .... $\boxed{\square}$ Ja $\square$ Nein
Ist $A^n = 0$, so ist $\chi = X^n$ .... $\boxed{\square}$ Ja $\square$ Nein
Ist $A^n = 0$, so ist $\mu = X^n$ .... $\square$ Ja $\boxed{\square}$ Nein
Ist $\mu = X^n - 3$, so ist $\chi = X^n - 3$ .... $\boxed{\square}$ Ja $\square$ Nein

---

Aufgabe 8.
Für alle Vektorräume V und alle $\varphi \in \operatorname{End} V$ gilt:
Hat φ den Eigenwert 1, so ist φ invertierbar .... $\square$ Ja $\boxed{\square}$ Nein
Hat φ den Eigenwert 0, so ist φ nicht invertierbar .... $\boxed{\square}$ Ja $\square$ Nein
Hat φ den Eigenwert 1, so hat $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$ ebenfalls den Eigenwert 1 $\boxed{\square}$ Ja $\square$ Nein
Hat φ^2 den Eigenwert 0, so hat φ ebenfalls den Eigenwert 0 .... $\boxed{\square}$ Ja $\square$ Nein
Ist $\varphi^2 = \mathrm{id}_V$ und t Eigenwert von φ, so ist $t \in \{1, -1\}$. .... $\boxed{\square}$ Ja $\square$ Nein

---

Aufgabe 9. Sei $2 < n \in \mathbb{N}$ und $A = [a_{ij}] \in \mathbb{Q}^{2n\times 2n}$ mit

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{für } i \equiv j \pmod 2 \text{ (d.h. } i-j \text{ ist gerade)} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Dann gilt:
$\operatorname{Rg} A = n$ .... $\square$ Ja $\boxed{\square}$ Nein
$\operatorname{Rg} A = 2$ .... $\boxed{\square}$ Ja $\square$ Nein
$\det A = 1$ .... $\square$ Ja $\boxed{\square}$ Nein
A ist diagonalisierbar .... $\boxed{\square}$ Ja $\square$ Nein
Das Minimalpolynom ist $X^3 - n^2 X$ .... $\boxed{\square}$ Ja $\square$ Nein

---

Aufgabe 10. Es seien K ein Körper und $A, B \in K^{n\times n}$.
Ist A kongruent zu einer Diagonalmatrix, dann ist A symmetrisch .. $\boxed{\square}$ Ja $\square$ Nein
Jede symmetrische Matrix ist kongruent zu einer Diagonalmatrix ... $\square$ Ja $\boxed{\square}$ Nein
Sind A und B kongruent, so sind sie ähnlich .... $\square$ Ja $\boxed{\square}$ Nein
Sind A und B kongruent, so haben sie die gleiche Determinante .... $\square$ Ja $\boxed{\square}$ Nein
Sind A und B ähnlich, so haben sie die gleiche Spur .... $\boxed{\square}$ Ja $\square$ Nein

---

Aufgaben mit Begründung

Aufgabe 11.
Bestimmen Sie alle $t \in \mathbb{R}$, für die das Gleichungssystem über $\mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcrcrcl} tx_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & tx_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \end{array}$$

(a) lösbar ist,

(b) eindeutig lösbar ist.

(c) Zu jedem t gebe man die Dimension des Lösungsraums des zugehörigen homogenen Systems an. *(6 Punkte)*

Aufgabe 12.
Es sei K ein Körper, $V = K^{2\times 2}$,

$$\begin{array}{rcl} \varphi : V & \to & V \\ A & \mapsto & A^T + A \end{array}$$

und $\mathcal{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$. Hierbei ist E_{ij} die Matrix, die an der Stelle (i, j) eine Eins und sonst lauter Nullen hat, und A^T ist die transponierte Matrix zu A.

(a) Zeigen Sie, dass φ linear ist.

(b) Berechnen Sie ${}_{\mathcal{B}}[\varphi]_{\mathcal{B}}$.

(c) Geben Sie je eine Basis von $\operatorname{Bild}\varphi$ und von $\operatorname{Kern}\varphi$ an.

(d) Welche Bedingung muss K erfüllen, damit $V = \operatorname{Bild}\varphi + \operatorname{Kern}\varphi$ ist? *(6 Punkte)*

Aufgabe 13.
Bestimmen Sie die Determinante der Matrix $A_n = (a_{ij})_{1\le i,j\le n} \in \mathbb{Q}^{n\times n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, wobei

$$a_{ij} = \begin{cases} i+1 & \text{für } i = j \\ j & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

ist. Alle Umformungen sind zu erklären. *(6 Punkte)*

Aufgabe 14.
Es sei $V = \mathbb{F}_2^{4\times 1}$ und

$$\begin{array}{rcl} \varphi : V & \to & V \\ v & \mapsto & Av \end{array} \quad \text{mit} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{F}_2^{4\times 4}$$

(a) Berechnen Sie das Minimalpolynom und das charakteristische Polynom von φ.

(b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von φ.

(c) Geben Sie zu jedem Eigenraum eine Basis an.

(d) Berechnen Sie die Jordansche Normalform von φ. *(7 Punkte)*
