16.4.2004

Nachholklausur zur Linearen Algebra I, WS 03/04

Prof. Dr. H. Pahlings

Tragen Sie bitte auf diesem Deckblatt leserlich und in **Blockbuchstaben** Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer ein und unterschreiben Sie.

Name: ______________________________

Vorname: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

Eigenhändige Unterschrift: ______________________________

	Krz	Erg	9	10	11	12	Σ
Punkte							
Nachk.							

Zum Ankreuzteil:

Kreuzen Sie bei jeder Frage entweder „Ja“ oder „Nein“ oder nichts an.
Auswertung: Jedes richtige Kreuz gibt einen Pluspunkt, jedes falsche Kreuz einen Minuspunkt. Jede Aufgabe gibt immer mindestens 0 Punkte, Minuspunkte wirken also nicht über Aufgaben hinweg. Wenn Sie bei einer Frage unsicher sind, machen Sie einfach kein Kreuz.
Sie brauchen Ihre Kreuze nicht zu begründen!

Zum Ergebnisteil:

In diesem Teil müssen Sie Ihre Aussagen **nicht** begründen. Es zählt nur das richtige Ergebnis.

Zu den Aufgaben mit Begründungen:

In diesem Teil müssen Sie alle Aussagen begründen.
Natürlich brauchen Sie Aussagen aus der Vorlesung nicht noch einmal zu beweisen.

Nachholklausur, 16.4.2004 **Gruppe A**

Lineare Algebra I, WS 2003/04, Prof. Dr. H. Pahlings

Name: ______________________ **Matrikelnummer:** ______________

Kreuzen Sie bei jeder Frage entweder „Ja“ oder „Nein“ oder nichts an.
Auswertung der Multiple-Choice-Aufgaben: Ein richtiges Kreuz ergibt $+1$ Punkt, ein falsches Kreuz ergibt -1 Punkt, keine Angabe zählt 0 Punkte. In jeder Aufgabe bekommen Sie mindestens 0 Punkte.

1	Es seien K ein Körper und V und W K-Vektorräume mit $\dim_K V = 2$ und $\dim_K W = 3$ und $\varphi : V \to W$ eine injektive lineare Abbildung. Dann gibt es Basisfolgen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ von V bzw. W mit ...	
	$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.	☐ Ja ☐ Nein
	$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.	☐ Ja ☐ Nein
	$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$.	☐ Ja ☐ Nein

2	Es sei K ein Körper.	
	Gibt es einen K-Algebrenhomomorphismus $\varphi : K[X] \to K^{n\times n}$ mit $\varphi(X^2) = E_n$?	☐ Ja ☐ Nein
	Gibt es zu jedem $A \in K^{n\times n}$ ein Polynom $f \in K[X]$ vom Grad kleiner n mit $f(A) = 0$?	☐ Ja ☐ Nein
	Ist $K = \mathbb{Z}_3$, so ist $K[X]$ ein 3-dimensionaler K-Vektorraum.	☐ Ja ☐ Nein

3	Es seien $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 1$ und $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Mit μ_A (bzw. μ_B) sei das Minimalpolynom von A (bzw. von B) und mit χ_A (bzw. χ_B) sei das charakteristische Polynom von A (bzw. B) bezeichnet.	
	Ist $\chi_A = \chi_B$ und ein Produkt von n paarweise verschiedenen Linearfaktoren, dann sind A und B ähnlich.	☐ Ja ☐ Nein
	Ist A symmetrisch, dann ist μ_A ein Produkt von paarweise verschiedenen Linearfaktoren.	☐ Ja ☐ Nein
	Ist $\mu_A = \mu_B$, dann sind A und B ähnlich.	☐ Ja ☐ Nein

4	Kreuzen Sie jeweils “Ja” an, wenn die Aussage stimmt, oder “Nein”, wenn sie nicht stimmt!	
	Die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ ist injektiv.	☐ Ja ☐ Nein
	Die Abbildung $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, (x, y) \mapsto x + y$ ist surjektiv.	☐ Ja ☐ Nein
	Die Abbildung $f : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, (x, y) \mapsto (x + y, x - y)$ ist surjektiv.	☐ Ja ☐ Nein
	Die Abbildung $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, x \mapsto (x, -x)$ ist surjektiv.	☐ Ja ☐ Nein

5	Sind die folgenden Abbildungen K-linear, wobei K jeweils der angegebene Körper ist?	
	$K = \mathbb{R}$, $f : K^{2\times 2} \to K^{2\times 2}, T \mapsto T \cdot A$ für $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$	☐ Ja ☐ Nein
	$K = \mathbb{Q}$, $g : K^{1\times 2} \to K^{1\times 2}, [x, y] \mapsto [y, x]$	☐ Ja ☐ Nein
	$K = \mathbb{Z}_2$ (Körper mit 2 Elementen), $h : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2, x \mapsto x^2$	☐ Ja ☐ Nein

Bearbeiten Sie die folgende Rechenaufgabe und schreiben Sie die Ergebnisse in die dafür vorgesehenen Kästchen. Sie brauchen Ihre Ergebnisse **nicht** zu begründen, für Begründungen und Ansätze gibt es aber auch **keine** Punkte. Für die richtige Antwort bekommen Sie die angegebene Punktzahl. Für eine falsche Antwort gibt es **Null** Punkte.

6 Es sei K ein endlicher Körper mit q Elementen, in dem $1+1 \neq 0$ ist. Das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & cx_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & (c-1)x_2 & + & (c+1)x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & 2cx_2 & + & (1-c)x_3 & = & c \end{array}$$

hat für $c \in$ ☐ $\subseteq K$ keine Lösung, *(1 Punkt)*

für $c \in$ ☐ $\subseteq K$ genau eine Lösung und *(1 Punkt)*

für $c \in$ ☐ $\subseteq K$ mehr als eine Lösung *(1 Punkt)*

und die Anzahl der Lösungen ist dann ☐ . *(1 Punkt)*

7 Berechnen Sie die Inverse der folgenden Matrix:

$$A := \begin{bmatrix} -1 & 0 & 5 \\ -2 & -1 & 8 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}.$$

dann ist $A^{-1} =$ ☐ *(3 Punkte)*

8 Es sei

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 54 & 4 & 18 \\ -27 & 0 & -5 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}.$$

Dann ist das Minimalpolynom $\mu_A =$ ☐ *(3 Punkte)*

Die Eigenwerte von A sind: ☐ *(1 Punkt)*

Geben Sie $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{Q})$ an so, dass $P^{-1}AP$ eine Diagonalmatrix ist: $P =$ ☐ *(3 Punkte)*

Beantworten Sie die folgenden Aufgaben schriftlich. Beweisen Sie alle Ihre Behauptungen. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Fangen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite an.

9 Es seien φ und ψ zwei Endomorphismen eines K-Vektorraums V mit $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$. Zeigen Sie: Jeder Eigenraum von ψ ist φ-invariant. *(5 Punkte)*

10 Es seien K ein Körper, V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ mit $\varphi^2 = \varphi$. Zeigen Sie:

(a) φ ist diagonalisierbar. *(3 Punkte)*

(b) Ist t ein Eigenwert von φ, dann ist $t \in \{0, 1\}$. *(2 Punkte)*

11 Es sei $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ mit $a_{i,j} = \begin{cases} j & \text{falls } j-i+2 \text{ durch } n \text{ teilbar ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$.

Berechnen Sie $\det A$. Begründen Sie Ihr Ergebnis. *(5 Punkte)*

12 Es seien $K = \mathbb{Z}_3$ der Körper mit 3 Elementen und V ein 4-dimensionaler K-Vektorraum. Wie viele linear abhängige Tupel $(v_1, v_2) \in V \times V$ gibt es? Begründen Sie Ihr Ergebnis. *(5 Punkte)*

Nachholklausur, 16.4.2004 **Gruppe B**

Lineare Algebra I, WS 2003/04, Prof. Dr. H. Pahlings

Name: ______________________ **Matrikelnummer:** ______________

Kreuzen Sie bei jeder Frage entweder „Ja“ oder „Nein“ oder nichts an.
Auswertung der Multiple-Choice-Aufgaben: Ein richtiges Kreuz ergibt $+1$ Punkt, ein falsches Kreuz ergibt -1 Punkt, keine Angabe zählt 0 Punkte. In jeder Aufgabe bekommen Sie mindestens 0 Punkte.

1	Kreuzen Sie jeweils “Ja” an, wenn die Aussage stimmt, oder “Nein”, wenn sie nicht stimmt!	
	Die Abbildung $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, x \mapsto (x, -x)$ ist surjektiv.	☐ Ja ☐ Nein
	Die Abbildung $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, (x, y) \mapsto x + y$ ist surjektiv.	☐ Ja ☐ Nein
	Die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ ist injektiv.	☐ Ja ☐ Nein
	Die Abbildung $f : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, (x, y) \mapsto (x + y, x - y)$ ist surjektiv.	☐ Ja ☐ Nein
2	Es seien $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 1$ und $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Mit μ_A (bzw. μ_B) sei das Minimalpolynom von A (bzw. von B) und mit χ_A (bzw. χ_B) sei das charakteristische Polynom von A (bzw. B) bezeichnet.	
	Ist $\chi_A = \chi_B$ und ein Produkt von n paarweise verschiedenen Linearfaktoren, dann sind A und B ähnlich.	☐ Ja ☐ Nein
	Ist $\mu_A = \mu_B$, dann sind A und B ähnlich.	☐ Ja ☐ Nein
	Ist A symmetrisch, dann ist μ_A ein Produkt von paarweise verschiedenen Linearfaktoren.	☐ Ja ☐ Nein
3	Es seien K ein Körper und V und W K-Vektorräume mit $\dim_K V = 2$ und $\dim_K W = 3$ und $\varphi : V \to W$ eine injektive lineare Abbildung. Dann gibt es Basisfolgen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ von V bzw. W mit . . .	
	$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$.	☐ Ja ☐ Nein
	$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.	☐ Ja ☐ Nein
	$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.	☐ Ja ☐ Nein
4	Sind die folgenden Abbildungen K-linear, wobei K jeweils der angegebene Körper ist?	
	$K = \mathbb{Q}$, $g : K^{1\times 2} \to K^{1\times 2}, [x, y] \mapsto [y, x]$	☐ Ja ☐ Nein
	$K = \mathbb{R}$, $f : K^{2\times 2} \to K^{2\times 2}, T \mapsto T \cdot A$ für $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$	☐ Ja ☐ Nein
	$K = \mathbb{Z}_2$ (Körper mit 2 Elementen), $h : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2, x \mapsto x^2$	☐ Ja ☐ Nein
5	Es sei K ein Körper.	
	Ist $K = \mathbb{Z}_3$, so ist $K[X]$ ein 3-dimensionaler K-Vektorraum.	☐ Ja ☐ Nein
	Gibt es einen K-Algebrenhomomorphismus $\varphi : K[X] \to K^{n\times n}$ mit $\varphi(X^2) = E_n$?	☐ Ja ☐ Nein
	Gibt es zu jedem $A \in K^{n\times n}$ ein Polynom $f \in K[X]$ vom Grad kleiner n mit $f(A) = 0$?	☐ Ja ☐ Nein

Bearbeiten Sie die folgende Rechenaufgabe und schreiben Sie die Ergebnisse in die dafür vorgesehenen Kästchen. Sie brauchen Ihre Ergebnisse **nicht** zu begründen, für Begründungen und Ansätze gibt es aber auch **keine** Punkte. Für die richtige Antwort bekommen Sie die angegebene Punktzahl. Für eine falsche Antwort gibt es **Null** Punkte.

6 Es sei

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 54 & 4 & 18 \\ -27 & 0 & -5 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}.$$

Dann ist das Minimalpolynom $\mu_A = \boxed{}$ *(3 Punkte)*

Die Eigenwerte von A sind: $\boxed{}$ *(1 Punkt)*

Geben Sie $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{Q})$ an so, dass $P^{-1}AP$ eine Diagonalmatrix ist: $P = \boxed{}$ *(3 Punkte)*

7 Es sei K ein endlicher Körper mit q Elementen, in dem $1 + 1 \neq 0$ ist. Das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & cx_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & (c-1)x_2 & + & (c+1)x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & 2cx_2 & + & (1-c)x_3 & = & c \end{array}$$

hat für $c \in \boxed{} \subseteq K$ keine Lösung, *(1 Punkt)*

für $c \in \boxed{} \subseteq K$ genau eine Lösung und *(1 Punkt)*

für $c \in \boxed{} \subseteq K$ mehr als eine Lösung *(1 Punkt)*

und die Anzahl der Lösungen ist dann $\boxed{}$. *(1 Punkt)*

8 Berechnen Sie die Inverse der folgenden Matrix:

$$A := \begin{bmatrix} -1 & 0 & 5 \\ -2 & -1 & 8 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}.$$

dann ist $A^{-1} = \boxed{}$ *(3 Punkte)*

Beantworten Sie die folgenden Aufgaben schriftlich. Beweisen Sie alle Ihre Behauptungen. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Fangen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite an.

9 Es seien φ und ψ zwei Endomorphismen eines K-Vektorraums V mit $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$. Zeigen Sie: Jeder Eigenraum von ψ ist φ-invariant. *(5 Punkte)*

10 Es seien K ein Körper, V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ mit $\varphi^2 = \varphi$. Zeigen Sie:

(a) φ ist diagonalisierbar. *(3 Punkte)*

(b) Ist t ein Eigenwert von φ, dann ist $t \in \{0, 1\}$. *(2 Punkte)*

11 Es sei $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ mit $a_{i,j} = \begin{cases} j & \text{falls } j - i + 2 \text{ durch } n \text{ teilbar ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$.

Berechnen Sie $\det A$. Begründen Sie Ihr Ergebnis. *(5 Punkte)*

12 Es seien $K = \mathbb{Z}_3$ der Körper mit 3 Elementen und V ein 4-dimensionaler K-Vektorraum. Wie viele linear abhängige Tupel $(v_1, v_2) \in V \times V$ gibt es? Begründen Sie Ihr Ergebnis. *(5 Punkte)*