

Nachholklausur zur Linearen Algebra I, WS 03/04

Prof. Dr. H. Pahlings

Tragen Sie bitte auf diesem Deckblatt leserlich und in **Blockbuchstaben** Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer ein und unterschreiben Sie.

Name: _____

Vorname: _____

Matrikelnummer: _____

Eigenhändige Unterschrift: _____

	Krz	Erg	9	10	11	12	Σ
Punkte							
Nachk.							

Zum Ankreuzteil:

Kreuzen Sie bei jeder Frage entweder „Ja“ oder „Nein“ oder nichts an.

Auswertung: Jedes richtige Kreuz gibt einen Pluspunkt, jedes falsche Kreuz einen Minuspunkt. Jede Aufgabe gibt immer mindestens 0 Punkte, Minuspunkte wirken also nicht über Aufgaben hinweg. Wenn Sie bei einer Frage unsicher sind, machen Sie einfach kein Kreuz.

Sie brauchen Ihre Kreuze nicht zu begründen!

Zum Ergebnisteil:

In diesem Teil müssen Sie Ihre Aussagen **nicht** begründen. Es zählt nur das richtige Ergebnis.

Zu den Aufgaben mit Begründungen:

In diesem Teil müssen Sie alle Aussagen begründen.

Natürlich brauchen Sie Aussagen aus der Vorlesung nicht noch einmal zu beweisen.

Lineare Algebra I, WS 2003/04, Prof. Dr. H. Pahlings

Name: _____

Matrikelnummer: _____

Kreuzen Sie bei jeder Frage entweder „Ja“ oder „Nein“ oder nichts an.

Auswertung der Multiple-Choice-Aufgaben: Ein richtiges Kreuz ergibt +1 Punkt, ein falsches Kreuz ergibt -1 Punkt, keine Angabe zählt 0 Punkte. In jeder Aufgabe bekommen Sie mindestens 0 Punkte.

1	Es seien K ein Körper und V und W K -Vektorräume mit $\dim_K V = 2$ und $\dim_K W = 3$ und $\varphi : V \rightarrow W$ eine injektive lineare Abbildung. Dann gibt es Basisfolgen \mathcal{B} und \mathcal{B}' von V bzw. W mit ...	
	$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
	$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
	$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
2	Es sei K ein Körper.	
	Gibt es einen K -Algebrenhomomorphismus $\varphi : K[X] \rightarrow K^{n \times n}$ mit $\varphi(X^2) = E_n$?	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
	Gibt es zu jedem $A \in K^{n \times n}$ ein Polynom $f \in K[X]$ vom Grad kleiner n mit $f(A) = 0$?	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
	Ist $K = \mathbb{Z}_3$, so ist $K[X]$ ein 3-dimensionaler K -Vektorraum.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
3	Es seien $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 1$ und $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Mit μ_A (bzw. μ_B) sei das Minimalpolynom von A (bzw. von B) und mit χ_A (bzw. χ_B) sei das charakteristische Polynom von A (bzw. B) bezeichnet.	
	Ist $\chi_A = \chi_B$ und ein Produkt von n paarweise verschiedenen Linearfaktoren, dann sind A und B ähnlich.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
	Ist A symmetrisch, dann ist μ_A ein Produkt von paarweise verschiedenen Linearfaktoren.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
	Ist $\mu_A = \mu_B$, dann sind A und B ähnlich.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
4	Kreuzen Sie jeweils "Ja" an, wenn die Aussage stimmt, oder "Nein", wenn sie nicht stimmt!	
	Die Abbildung $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ ist injektiv.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
	Die Abbildung $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, (x, y) \mapsto x + y$ ist surjektiv.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
	Die Abbildung $f : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, (x, y) \mapsto (x + y, x - y)$ ist surjektiv.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
	Die Abbildung $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, x \mapsto (x, -x)$ ist surjektiv.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
5	Sind die folgenden Abbildungen K -linear, wobei K jeweils der angegebene Körper ist?	
	$K = \mathbb{R}, f : K^{2 \times 2} \rightarrow K^{2 \times 2}, T \mapsto T \cdot A$ für $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
	$K = \mathbb{Q}, g : K^{1 \times 2} \rightarrow K^{1 \times 2}, [x, y] \mapsto [y, x]$	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
	$K = \mathbb{Z}_2$ (Körper mit 2 Elementen), $h : \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2, x \mapsto x^2$	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein

Bearbeiten Sie die folgende Rechenaufgabe und schreiben Sie die Ergebnisse in die dafür vorgesehenen Kästchen. Sie brauchen Ihre Ergebnisse **nicht** zu begründen, für Begründungen und Ansätze gibt es aber auch **keine** Punkte. Für die richtige Antwort bekommen Sie die angegebene Punktzahl. Für eine falsche Antwort gibt es **Null** Punkte.

6	<p>Es sei K ein endlicher Körper mit q Elementen, in dem $1 + 1 \neq 0$ ist. Das Gleichungssystem</p> $\begin{aligned} x_1 + cx_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + (c-1)x_2 + (c+1)x_3 &= 1 \\ x_1 + 2cx_2 + (1-c)x_3 &= c \end{aligned}$ <p>hat für $c \in$ <input style="width: 150px; height: 20px;" type="text"/> $\subseteq K$ keine Lösung, (1 Punkt)</p> <p>für $c \in$ <input style="width: 150px; height: 20px;" type="text"/> $\subseteq K$ genau eine Lösung und (1 Punkt)</p> <p>für $c \in$ <input style="width: 150px; height: 20px;" type="text"/> $\subseteq K$ mehr als eine Lösung (1 Punkt)</p> <p>und die Anzahl der Lösungen ist dann <input style="width: 150px; height: 20px;" type="text"/>. (1 Punkt)</p>									
7	<p>Berechnen Sie die Inverse der folgenden Matrix:</p> $A := \begin{bmatrix} -1 & 0 & 5 \\ -2 & -1 & 8 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3 \times 3}.$ <p>dann ist $A^{-1} =$ <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td></tr><tr><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td></tr><tr><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td></tr></table> (3 Punkte)</p>									
8	<p>Es sei</p> $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 54 & 4 & 18 \\ -27 & 0 & -5 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3 \times 3}.$ <p>Dann ist das Minimalpolynom $\mu_A =$ <input style="width: 250px; height: 25px;" type="text"/> (3 Punkte)</p> <p>Die Eigenwerte von A sind: <input style="width: 250px; height: 25px;" type="text"/> (1 Punkt)</p> <p>Geben Sie $P \in \text{GL}_3(\mathbb{Q})$ an so, dass $P^{-1}AP$ eine Diagonalmatrix ist: $P =$ <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td></tr><tr><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td></tr><tr><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td></tr></table> (3 Punkte)</p>									
<p>Beantworten Sie die folgenden Aufgaben schriftlich. Beweisen Sie alle Ihre Behauptungen. Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Fangen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite an.</p>										
9	<p>Es seien φ und ψ zwei Endomorphismen eines K-Vektorraums V mit $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$. Zeigen Sie: Jeder Eigenraum von ψ ist φ-invariant. (5 Punkte)</p>									
10	<p>Es seien K ein Körper, V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $\varphi \in \text{End}(V)$ mit $\varphi^2 = \varphi$. Zeigen Sie:</p> <p>(a) φ ist diagonalisierbar. (3 Punkte)</p> <p>(b) Ist t ein Eigenwert von φ, dann ist $t \in \{0, 1\}$. (2 Punkte)</p>									
11	<p>Es sei $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ mit $a_{i,j} = \begin{cases} j & \text{falls } j - i + 2 \text{ durch } n \text{ teilbar ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$.</p> <p>Berechnen Sie $\det A$. Begründen Sie Ihr Ergebnis. (5 Punkte)</p>									
12	<p>Es seien $K = \mathbb{Z}_3$ der Körper mit 3 Elementen und V ein 4-dimensionaler K-Vektorraum. Wie viele linear abhängige Tupel $(v_1, v_2) \in V \times V$ gibt es? Begründen Sie Ihr Ergebnis. (5 Punkte)</p>									

Lineare Algebra I, WS 2003/04, Prof. Dr. H. Pahlings

Name: _____

Matrikelnummer: _____

Kreuzen Sie bei jeder Frage entweder „Ja“ oder „Nein“ oder nichts an.

Auswertung der Multiple-Choice-Aufgaben: Ein richtiges Kreuz ergibt +1 Punkt, ein falsches Kreuz ergibt -1 Punkt, keine Angabe zählt 0 Punkte. In jeder Aufgabe bekommen Sie mindestens 0 Punkte.

1	Kreuzen Sie jeweils “Ja” an, wenn die Aussage stimmt, oder “Nein”, wenn sie nicht stimmt!	
	Die Abbildung $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, x \mapsto (x, -x)$ ist surjektiv.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
	Die Abbildung $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, (x, y) \mapsto x + y$ ist surjektiv.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
	Die Abbildung $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ ist injektiv.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
	Die Abbildung $f : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, (x, y) \mapsto (x + y, x - y)$ ist surjektiv.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
2	Es seien $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 1$ und $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Mit μ_A (bzw. μ_B) sei das Minimalpolynom von A (bzw. von B) und mit χ_A (bzw. χ_B) sei das charakteristische Polynom von A (bzw. B) bezeichnet.	
	Ist $\chi_A = \chi_B$ und ein Produkt von n paarweise verschiedenen Linearfaktoren, dann sind A und B ähnlich.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
	Ist $\mu_A = \mu_B$, dann sind A und B ähnlich.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
	Ist A symmetrisch, dann ist μ_A ein Produkt von paarweise verschiedenen Linearfaktoren.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
3	Es seien K ein Körper und V und W K -Vektorräume mit $\dim_K V = 2$ und $\dim_K W = 3$ und $\varphi : V \rightarrow W$ eine injektive lineare Abbildung. Dann gibt es Basisfolgen \mathcal{B} und \mathcal{B}' von V bzw. W mit ...	
	$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
	$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
	$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
4	Sind die folgenden Abbildungen K -linear, wobei K jeweils der angegebene Körper ist?	
	$K = \mathbb{Q}, g : K^{1 \times 2} \rightarrow K^{1 \times 2}, [x, y] \mapsto [y, x]$	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
	$K = \mathbb{R}, f : K^{2 \times 2} \rightarrow K^{2 \times 2}, T \mapsto T \cdot A$ für $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
	$K = \mathbb{Z}_2$ (Körper mit 2 Elementen), $h : \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2, x \mapsto x^2$	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
5	Es sei K ein Körper.	
	Ist $K = \mathbb{Z}_3$, so ist $K[X]$ ein 3-dimensionaler K -Vektorraum.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
	Gibt es einen K -Algebrenhomomorphismus $\varphi : K[X] \rightarrow K^{n \times n}$ mit $\varphi(X^2) = E_n$?	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
	Gibt es zu jedem $A \in K^{n \times n}$ ein Polynom $f \in K[X]$ vom Grad kleiner n mit $f(A) = 0$?	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein

Bearbeiten Sie die folgende Rechenaufgabe und schreiben Sie die Ergebnisse in die dafür vorgesehenen Kästchen. Sie brauchen Ihre Ergebnisse **nicht** zu begründen, für Begründungen und Ansätze gibt es aber auch **keine** Punkte. Für die richtige Antwort bekommen Sie die angegebene Punktzahl. Für eine falsche Antwort gibt es **Null** Punkte.

6	<p>Es sei</p> $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 54 & 4 & 18 \\ -27 & 0 & -5 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3 \times 3}.$ <p>Dann ist das Minimalpolynom $\mu_A =$ <input type="text"/> (3 Punkte)</p> <p>Die Eigenwerte von A sind: <input type="text"/> (1 Punkt)</p> <p>Geben Sie $P \in GL_3(\mathbb{Q})$ an so, dass $P^{-1}AP$ eine Diagonalmatrix ist: $P =$ <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td> </td><td> </td><td> </td></tr><tr><td> </td><td> </td><td> </td></tr><tr><td> </td><td> </td><td> </td></tr></table> (3 Punkte)</p>									
7	<p>Es sei K ein endlicher Körper mit q Elementen, in dem $1 + 1 \neq 0$ ist. Das Gleichungssystem</p> $\begin{aligned} x_1 + cx_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + (c-1)x_2 + (c+1)x_3 &= 1 \\ x_1 + 2cx_2 + (1-c)x_3 &= c \end{aligned}$ <p>hat für $c \in$ <input type="text"/> $\subseteq K$ keine Lösung, (1 Punkt)</p> <p>für $c \in$ <input type="text"/> $\subseteq K$ genau eine Lösung und (1 Punkt)</p> <p>für $c \in$ <input type="text"/> $\subseteq K$ mehr als eine Lösung (1 Punkt)</p> <p>und die Anzahl der Lösungen ist dann <input type="text"/>. (1 Punkt)</p>									
8	<p>Berechnen Sie die Inverse der folgenden Matrix:</p> $A := \begin{bmatrix} -1 & 0 & 5 \\ -2 & -1 & 8 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3 \times 3}.$ <p>dann ist $A^{-1} =$ <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td> </td><td> </td><td> </td></tr><tr><td> </td><td> </td><td> </td></tr><tr><td> </td><td> </td><td> </td></tr></table> (3 Punkte)</p>									
<p>Beantworten Sie die folgenden Aufgaben schriftlich. Beweisen Sie alle Ihre Behauptungen. Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Fangen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite an.</p>										
9	<p>Es seien φ und ψ zwei Endomorphismen eines K-Vektorraums V mit $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$. Zeigen Sie: Jeder Eigenraum von ψ ist φ-invariant. (5 Punkte)</p>									
10	<p>Es seien K ein Körper, V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $\varphi \in \text{End}(V)$ mit $\varphi^2 = \varphi$. Zeigen Sie:</p> <p>(a) φ ist diagonalisierbar. (3 Punkte)</p> <p>(b) Ist t ein Eigenwert von φ, dann ist $t \in \{0, 1\}$. (2 Punkte)</p>									
11	<p>Es sei $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ mit $a_{i,j} = \begin{cases} j & \text{falls } j - i + 2 \text{ durch } n \text{ teilbar ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$.</p> <p>Berechnen Sie $\det A$. Begründen Sie Ihr Ergebnis. (5 Punkte)</p>									
12	<p>Es seien $K = \mathbb{Z}_3$ der Körper mit 3 Elementen und V ein 4-dimensionaler K-Vektorraum. Wie viele linear abhängige Tupel $(v_1, v_2) \in V \times V$ gibt es? Begründen Sie Ihr Ergebnis. (5 Punkte)</p>									