Vordiplomsklausur, 22.3.2004 **Gruppe A**

Lineare Algebra I, WS 2003/04, Prof. Dr. H. Pahlings

Tragen Sie bitte auf diesem Deckblatt **leserlich** und in **Blockbuchstaben** Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer ein und unterschreiben Sie.

Name: ______________________________

Vorname: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

Eigenhändige Unterschrift: ______________________________

	Krz	Erg	10	11	12	Σ
Punkte						
Nachk.						

Zum Ankreuzteil:

Kreuzen Sie bei jeder Frage entweder „Ja“ oder „Nein“ oder nichts an.
Auswertung: Jedes richtige Kreuz gibt einen Pluspunkt, jedes falsche Kreuz einen Minuspunkt. Jede Aufgabe gibt immer mindestens 0 Punkte, Minuspunkte wirken also nicht über Aufgaben hinweg. Wenn Sie bei einer Frage unsicher sind, machen Sie einfach kein Kreuz.
Sie brauchen Ihre Kreuze nicht zu begründen!

Zum Ergebnisteil:

In diesem Teil müssen Sie Ihre Aussagen **nicht** begründen. Es zählt nur das richtige Ergebnis.

Zu den Aufgaben mit Begründungen:

In diesem Teil müssen Sie alle Aussagen begründen.
Natürlich brauchen Sie Aussagen aus der Vorlesung nicht noch einmal zu beweisen.

Zur Gesamtwertung:

Es gibt insgesamt 50 Punkte. Zum Bestehen der Klausur benötigen Sie mindestens 25 Punkte.

Kreuzen Sie bei jeder Frage entweder „Ja“ oder „Nein“ an beziehungsweise füllen Sie das Feld aus oder geben Sie nichts an.
Auswertung: Eine richtige Antwort ergibt $+1$ Punkt, eine falsche Antwort -1 Punkt, keine Angabe zählt 0 Punkte. In jeder Aufgabe bekommen Sie mindestens 0 Punkte.

1	Es sei K ein Körper mit unendlich vielen Elementen, $A \in K^{m\times n}$ und $b \in K^{m\times 1}$. Welche der folgenden Aussagen zu linearen Gleichungssystemem der Form $Ax = b$ sind richtig?	
	Ist $m > n$ und $b \neq 0 \in K^{m\times 1}$, so gibt es kein $x \in K^{n\times 1}$ mit $Ax = b$.	☐ Ja ☐ Nein
	Ist $\mathrm{Rg}\, A = \mathrm{Rg}[A, b]$ und $m < n$, so gibt es mehr als ein $x \in K^{n\times 1}$ mit $Ax = b$.	☐ Ja ☐ Nein
	Ist $b = 0$ und $\mathrm{Rg}\, A = n - 1$, dann gibt es unendlich viele $x \in K^{n\times 1}$ mit $Ax = b$.	☐ Ja ☐ Nein
2	Es seien $v_1 = (1, 2, 0)$, $v_2 = (0, 1, 2)$, $v_3 = (1, 0, 2)$ und $v_4 = (1, 3, 2)$ in $\mathbb{R}^3$.	
	Ist $v_4 \in \langle v_1, v_2\rangle$?	☐ Ja ☐ Nein
	Ist $\langle v_1, v_2\rangle = \langle v_3, v_4\rangle$?	☐ Ja ☐ Nein
	Ist $\{v_1, v_2, v_3\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$?	☐ Ja ☐ Nein
3	Es sei $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Sind die folgenden Abbildungen $\mathbb{R}$-linear?	
	$f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}, T \mapsto TA + T$	☐ Ja ☐ Nein
	$f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}, T \mapsto TA + A$	☐ Ja ☐ Nein
	$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (y, x)$	☐ Ja ☐ Nein
4	Es seien K ein Körper, V und W K-Vektorräume mit $\dim_K V = 2$ und $\dim_K W = 3$ und $\varphi : V \to W$ eine injektive lineare Abbildung. Dann gibt es Basisfolgen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ von V beziehungsweise W mit ...	
	$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.	☐ Ja ☐ Nein
	$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.	☐ Ja ☐ Nein
	$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.	☐ Ja ☐ Nein
5	Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ für ein $n \geq 2$. Welche Aussagen sind richtig?	
	Ist $A = A^T$, so ist A diagonalisierbar.	☐ Ja ☐ Nein
	Ist $A^2 = E_n$, so ist A diagonalisierbar.	☐ Ja ☐ Nein
	Ist A diagonalisierbar, so hat A n verschiedene Eigenwerte.	☐ Ja ☐ Nein
	Ist $\chi_A = \mu_A$, so ist A diagonalisierbar.	☐ Ja ☐ Nein
6	Es sei $K[X]$ der Polynomring über dem Körper K in der Unbestimmten X, und es seien $f, g \in K[X] \setminus \{0\}$.	
	Es gilt $\mathrm{Grad}(f \cdot g) = \mathrm{Grad}(f) + \mathrm{Grad}(g)$.	☐ Ja ☐ Nein
	Ist $\mathrm{Grad}(f) < \mathrm{Grad}(g)$, so ist $\mathrm{Grad}(f + g) = \mathrm{Grad}(g)$.	☐ Ja ☐ Nein
	Ist f in $K[X]$ invertierbar, so ist $\mathrm{Grad}(f) = 1$.	☐ Ja ☐ Nein
	Die Anzahl der Polynome vom Grad 3 in $\mathbb{Z}_2[X]$ ist:	☐

Bearbeiten Sie die folgenden Rechenaufgaben und schreiben Sie die Ergebnisse in die dafür vorgesehenen Kästchen. Sie brauchen Ihre Ergebnisse **nicht** zu begründen, für Begründungen und Ansätze gibt es aber auch **keine** Punkte. Für die richtige Antwort bekommen Sie die angegebene Punktzahl. Für eine falsche Antwort gibt es **Null** Punkte.

7 Es sei $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_2^{4\times 4}$. Berechnen Sie $A^{-1} = \begin{bmatrix} \; & \; & \; & \; \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}$. *(4 Punkte)*

8 Berechnen Sie das Minimalpolynom μ_A und das charakteristische Polynom χ_A der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Das Minimalpolynom von A ist: $\mu_A = \boxed{}$ *(2 Punkte)*

Das charakteristische Polynom ist: $\chi_A = \boxed{}$ *(2 Punkte)*

9 Es sei

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & -5 \\ 8 & -1 & -2 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Die Eigenwerte von A sind: $\boxed{}$ *(3 Punkte)*

Geben Sie $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ an, so dass $P^{-1}AP$ eine Diagonalmatrix ist: $P = \boxed{\begin{matrix} \; & \; & \; \\ & & \\ & & \end{matrix}}$

(3 Punkte)

Beantworten Sie die folgenden Aufgaben schriftlich. Beweisen Sie alle Ihre Behauptungen.
Fangen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite an.

10	Es sei K ein Körper und $a \in K$. Bestimmen Sie alle $b \in K$ für die $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ ähnlich zu $\begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ ist. *(4 Punkte)*
11	Es sei K ein Körper, $V = K^{2\times 2}$, $\varphi : V \to V$ mit $A \mapsto A^T - A$ und $\mathcal{B} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ die Standardbasis von V. (Das heißt, $E_{i,j}$ ist die Matrix, die an der Stelle (i,j) den Eintrag Eins und sonst lauter Nullen hat.) (a) Zeigen Sie, dass φ linear ist. *(2 Punkte)* (b) Berechnen sie $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$. *(2 Punkte)* (c) Geben Sie je eine Basis von Bild(φ) und Kern(φ) an. *(2 Punkte)* (d) Ist φ diagonalisierbar? Falls ja, geben Sie eine Diagonalmatrix an, die ähnlich zu $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ ist. *(2 Punkte)*
12	Sei $n \in \mathbb{N}$ und V ein n-dimensionaler Vektorraum. Zeigen Sie, dass es genau dann eine lineare Abbildung $\varphi : V \to V$ mit Kern$(\varphi) =$ Bild(φ) gibt, wenn n gerade ist. *(4 Punkte)*

Vordiplomsklausur, 22.3.2004   Gruppe B

Lineare Algebra I, WS 2003/04, Prof. Dr. H. Pahlings

Tragen Sie bitte auf diesem Deckblatt **leserlich** und in **Blockbuchstaben** Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer ein und unterschreiben Sie.

Name: ______________________________

Vorname: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

Eigenhändige Unterschrift: ______________________________

	Krz	Erg	10	11	12	Σ
Punkte						
Nachk.						

Zum Ankreuzteil:

Kreuzen Sie bei jeder Frage entweder „Ja“ oder „Nein“ oder nichts an.
Auswertung: Jedes richtige Kreuz gibt einen Pluspunkt, jedes falsche Kreuz einen Minuspunkt. Jede Aufgabe gibt immer mindestens 0 Punkte, Minuspunkte wirken also nicht über Aufgaben hinweg. Wenn Sie bei einer Frage unsicher sind, machen Sie einfach kein Kreuz.
Sie brauchen Ihre Kreuze nicht zu begründen!

Zum Ergebnisteil:

In diesem Teil müssen Sie Ihre Aussagen **nicht** begründen. Es zählt nur das richtige Ergebnis.

Zu den Aufgaben mit Begründungen:

In diesem Teil müssen Sie alle Aussagen begründen.
Natürlich brauchen Sie Aussagen aus der Vorlesung nicht noch einmal zu beweisen.

Zur Gesamtwertung:

Es gibt insgesamt 50 Punkte. Zum Bestehen der Klausur benötigen Sie mindestens 25 Punkte.

Kreuzen Sie bei jeder Frage entweder „Ja“ oder „Nein“ an beziehungsweise füllen Sie das Feld aus oder geben Sie nichts an.
Auswertung: Eine richtige Antwort ergibt $+1$ Punkt, eine falsche Antwort -1 Punkt, keine Angabe zählt 0 Punkte. In jeder Aufgabe bekommen Sie mindestens 0 Punkte.

1	Es sei K ein Körper mit unendlich vielen Elementen, $A \in K^{m\times n}$ und $b \in K^{m\times 1}$. Welche der folgenden Aussagen zu linearen Gleichungssystemem der Form $Ax = b$ sind richtig?	
	Ist $m > n$ und $b \neq 0 \in K^{m\times 1}$, so gibt es kein $x \in K^{n\times 1}$ mit $Ax = b$.	☐ Ja ☐ Nein
	Ist $\mathrm{Rg}\, A = \mathrm{Rg}[A, b]$ und $m < n$, so gibt es mehr als ein $x \in K^{n\times 1}$ mit $Ax = b$.	☐ Ja ☐ Nein
	Ist $b = 0$ und $\mathrm{Rg}\, A = n - 1$, dann gibt es unendlich viele $x \in K^{n\times 1}$ mit $Ax = b$.	☐ Ja ☐ Nein
2	Es seien $v_1 = (1, 2, 0)$, $v_2 = (0, 1, 2)$, $v_3 = (1, 0, 2)$ und $v_4 = (1, 3, 2)$ in $\mathbb{R}^3$.	
	Ist $v_4 \in \langle v_1, v_2\rangle$?	☐ Ja ☐ Nein
	Ist $\langle v_1, v_2\rangle = \langle v_3, v_4\rangle$?	☐ Ja ☐ Nein
	Ist $\{v_1, v_2, v_3\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$?	☐ Ja ☐ Nein
3	Es sei $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Sind die folgenden Abbildungen $\mathbb{R}$-linear?	
	$f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}, T \mapsto TA + A$	☐ Ja ☐ Nein
	$f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}, T \mapsto TA + T$	☐ Ja ☐ Nein
	$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (y, x)$	☐ Ja ☐ Nein
4	Es seien K ein Körper, V und W K-Vektorräume mit $\dim_K V = 2$ und $\dim_K W = 3$ und $\varphi : V \to W$ eine injektive lineare Abbildung. Dann gibt es Basisfolgen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ von V beziehungsweise W mit ...	
	$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.	☐ Ja ☐ Nein
	$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.	☐ Ja ☐ Nein
	$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.	☐ Ja ☐ Nein
5	Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ für ein $n \geq 2$. Welche Aussagen sind richtig?	
	Ist $\chi_A = \mu_A$, so ist A diagonalisierbar.	☐ Ja ☐ Nein
	Ist $A = A^T$, so ist A diagonalisierbar.	☐ Ja ☐ Nein
	Ist $A^2 = E_n$, so ist A diagonalisierbar.	☐ Ja ☐ Nein
	Ist A diagonalisierbar, so hat A n verschiedene Eigenwerte.	☐ Ja ☐ Nein
6	Es sei $K[X]$ der Polynomring über dem Körper K in der Unbestimmten X, und es seien $f, g \in K[X] \setminus \{0\}$.	
	Ist f in $K[X]$ invertierbar, so ist $\mathrm{Grad}(f) = 1$.	☐ Ja ☐ Nein
	Es gilt $\mathrm{Grad}(f \cdot g) = \mathrm{Grad}(f) + \mathrm{Grad}(g)$.	☐ Ja ☐ Nein
	Ist $\mathrm{Grad}(f) < \mathrm{Grad}(g)$, so ist $\mathrm{Grad}(f + g) = \mathrm{Grad}(g)$.	☐ Ja ☐ Nein
	Die Anzahl der Polynome vom Grad 3 in $\mathbb{Z}_2[X]$ ist:	☐

Bearbeiten Sie die folgenden Rechenaufgaben und schreiben Sie die Ergebnisse in die dafür vorgesehenen Kästchen. Sie brauchen Ihre Ergebnisse **nicht** zu begründen, für Begründungen und Ansätze gibt es aber auch **keine** Punkte. Für die richtige Antwort bekommen Sie die angegebene Punktzahl. Für eine falsche Antwort gibt es **Null** Punkte.

7	Es sei $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_2^{4\times 4}$. Berechnen Sie $A^{-1} = \begin{bmatrix} \, & \, & \, & \, \\ \, & \, & \, & \, \\ \, & \, & \, & \, \\ \, & \, & \, & \, \end{bmatrix}$. *(4 Punkte)*
8	Berechnen Sie das Minimalpolynom μ_A und das charakteristische Polynom χ_A der Matrix $$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$ Das Minimalpolynom von A ist: $\mu_A =$ ☐ *(2 Punkte)* Das charakteristische Polynom ist: $\chi_A =$ ☐ *(2 Punkte)*
9	Es sei $$A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & -5 \\ 8 & -1 & -2 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$ Die Eigenwerte von A sind: ☐ *(3 Punkte)* Geben Sie $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ an, so dass $P^{-1}AP$ eine Diagonalmatrix ist: $P = \begin{bmatrix} \, & \, & \, \\ \, & \, & \, \\ \, & \, & \, \end{bmatrix}$ *(3 Punkte)*

Beantworten Sie die folgenden Aufgaben schriftlich. Beweisen Sie alle Ihre Behauptungen.
Fangen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite an.

10 Es sei K ein Körper und $a \in K$. Bestimmen Sie alle $b \in K$ für die $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ ähnlich zu $\begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ ist. *(4 Punkte)*

11 Es sei K ein Körper, $V = K^{2\times 2}$, $\varphi : V \to V$ mit $A \mapsto A^T - A$ und $\mathcal{B} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ die Standardbasis von V. (Das heißt, $E_{i,j}$ ist die Matrix, die an der Stelle (i, j) den Eintrag Eins und sonst lauter Nullen hat.)

(a) Zeigen Sie, dass φ linear ist. *(2 Punkte)*

(b) Berechnen sie $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$. *(2 Punkte)*

(c) Geben Sie je eine Basis von Bild(φ) und Kern(φ) an. *(2 Punkte)*

(d) Ist φ diagonalisierbar? Falls ja, geben Sie eine Diagonalmatrix an, die ähnlich zu $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ ist. *(2 Punkte)*

12 Sei $n \in \mathbb{N}$ und V ein n-dimensionaler Vektorraum. Zeigen Sie, dass es genau dann eine lineare Abbildung $\varphi : V \to V$ mit Kern$(\varphi) = $ Bild(φ) gibt, wenn n gerade ist. *(4 Punkte)*