Test 2 im WS99/00

Es sei K ein Körper und U, V und W K-Vektorräume.

T1) Ist $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\mathbb{R}$-linear, so gilt für alle $a, b \in \mathbb{R}$:

$\varphi(0) = 0$	☒ Ja	☐ Nein
$\varphi(1) = 1$	☐ Ja	☒ Nein
$\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$	☐ Ja	☒ Nein
$\varphi(a \cdot b) = a \cdot \varphi(b)$	☒ Ja	☐ Nein
$\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$	☒ Ja	☐ Nein
Bild $\varphi = \mathbb{R}$	☐ Ja	☒ Nein

T2) Ist $\varphi : V \to W$ linear, so ist:

Kern $\varphi = \{\varphi(v) \mid v = \underline{0}\}$	☐ Ja	☒ Nein
Kern $\varphi = \{v \in V \mid \varphi(v) = \underline{0}\}$	☒ Ja	☐ Nein
φ surjektiv $\Longleftrightarrow$ φ injektiv	☐ Ja	☒ Nein
φ injektiv $\Longleftrightarrow$ Kern $\varphi = \{\underline{0}\}$	☒ Ja	☐ Nein

T3) Sind $\varphi : U \to V$ und $\psi : V \to W$ lineare Abbildungen, so gilt:

Kern$(\psi \circ \varphi) \subseteq$ Kern φ	☐ Ja	☒ Nein
Kern$(\psi \circ \varphi) \subseteq$ Kern ψ	☐ Ja	☒ Nein
Kern$(\psi \circ \varphi) \supseteq$ Kern φ	☒ Ja	☐ Nein
Bild$(\psi \circ \varphi) \subseteq$ Bild ψ	☒ Ja	☐ Nein
Bild$(\psi \circ \varphi) \subseteq$ Bild φ	☐ Ja	☒ Nein
Bild$(\psi \circ \varphi) \supseteq$ Bild ψ	☐ Ja	☒ Nein

T4) Welche der folgenden Abbildungen sind linear? ($\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ als $\mathbb{R}$-Vektorräume)

$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 2x + 1$	☐ Ja	☒ Nein
$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2 - x_1, x_1)$	☒ Ja	☐ Nein
$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, x \mapsto (x, 2x)$	☒ Ja	☐ Nein
$\varphi : \mathbb{F}_2 \to \mathbb{F}_2, x \mapsto x^2$	☒ Ja	☐ Nein
$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto x_1 x_2$	☐ Ja	☒ Nein

T5) Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

Jede $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ ist surjektiv.	☐ Ja	☒ Nein
Es gibt eine injektive, $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.	☐ Ja	☒ Nein
Es gibt eine surjektive, $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.	☒ Ja	☐ Nein
Jede $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ ist injektiv.	☐ Ja	☒ Nein
Es gibt eine surjektive, $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.	☐ Ja	☒ Nein
Es gibt eine injektive, $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.	☒ Ja	☐ Nein

T6) Es sei $\varphi : V \to W$ linear und $\mathcal{B}$ Basis von V. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

Ist φ injektiv, so ist $\varphi(\mathcal{B})$ eine Basis von W.	☐ Ja	☒ Nein
Ist φ surjektiv, so ist $\varphi(\mathcal{B})$ Erzeugendensystem von W.	☒ Ja	☐ Nein
Ist $V \cong W$, so ist φ ein Isomorphismus.	☐ Ja	☒ Nein
Ist φ ein Isomorphismus, so ist $\{\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_n)\}$ für jedes n-Tupel $(v_1, \ldots, v_n) \in V^n$ eine Basis von W.	☐ Ja	☒ Nein

T7) Welche Aussagen sind richtig? Ein lineares Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

ist lösbar, wenn $n \geq m$.	☐ Ja	☒ Nein
ist eindeutig lösbar, wenn Rg $[a_{ij}] = 0$ ist.	☐ Ja	☒ Nein
ist für $m > n$ nie eindeutig lösbar.	☐ Ja	☒ Nein
hat einen Lösungsraum der Dimension Rg $[a_{ij}]$.	☐ Ja	☒ Nein
hat einen Lösungsraum der Dimension $n - m$, falls $b_1 = \cdots = b_m = 0$ ist.	☐ Ja	☒ Nein
ist eindeutig lösbar, wenn das zugehörige homogene System nur die triviale Lösung hat.	☐ Ja	☒ Nein

Auswertung: Richtige Antwort 1 Punkt, keine Antwort 0 Punkte, falsche Antwort -1 Punkt.