Aufgabenblatt 1 zur
Vordiplom-Klausur Lineare Algebra (5. 4. 1994)

Professor Dr. U. Schoenwaelder, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

---

Aufgabe 1.

Formulieren Sie eine Definition für die Begriffe „linear abhängig“ und „linear unabhängig“. (Vergessen Sie nicht, alle Voraussetzungen anzugeben.) *3 Punkte*

Aufgabe 2.

Im $\mathbb{R}$-Vektorraum $F = \mathbf{V}_{4\times 1}(\mathbb{R})$ seien die folgenden Mengen M_1 und M_2 gegeben.

$$M_1 = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in F \mid 9x_1^2 - 4x_4^2 = 0\}, \qquad M_2 = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in F \mid 9x_1^2 + 4x_4^2 = 0\}.$$

a) Ist M_1 ein Teilraum von F? (Begründung.) *2 Punkte*

b) Ist M_2 ein Teilraum von F? (Begründung.) *4 Punkte*

c) Geben Sie für jede der Mengen M_1 und M_2, sofern sie ein Teilraum ist, eine Basisfolge an. *2 Punkte*

Aufgabe 3.

Es sei ein <u>lösbares</u> inhomogenes lineares Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 5 Unbekannten über dem Körper $\mathbb{Z}_{1009}$ mit 1009 Elementen gegeben (bekanntlich ist 1009 eine Primzahl). Für welche der Zahlen

$$\begin{array}{llll} n_1 = 1, & n_3 = 1\,000, & n_5 = 10\,000, & n_7 = 10\,000\,000, \\ n_2 = 10, & n_4 = 1\,010, & n_6 = 1\,000\,000, & n_8 = 1\,000\,000\,000 \end{array}$$

ist die Aussage „das System hat notwendigerweise mindestens n_i Lösungen“ wahr, für welche ist sie falsch? Geben Sie für Ihre Antwort einen ausführlichen Beweis. *6 Punkte*

Aufgabe 4.

In $V = \mathbf{V}_{4\times 1}(\mathbb{Z}_5)$ sei der Teilraum $T = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ gegeben. Geben Sie eine Basisfolge für den Faktorraum V/T an. (Formulierung und Begründung sind wichtig.) *4 Punkte*

Aufgabe 5.

Geben Sie Basen für drei 2-dimensionale Teilräume T_1, T_2, T_3 von $V := \mathbf{V}_{4\times 1}(\mathbb{R})$ an, so daß die Summe von je zweien dieser Teilräume ganz V ist (mit Begründung). *4 Punkte*

Aufgabenblatt 2 zur
Vordiplom-Klausur Lineare Algebra (5. 4. 1994)

Professor Dr. U. Schoenwaelder, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

---

Aufgabe 6.

Invertieren Sie die Matrix $M = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ -3 & 10 & 14 \\ 1 & -4 & -5 \end{pmatrix} \in \mathbf{V}_{3\times 3}(\mathbb{Q})$. *5 Punkte*

Aufgabe 7.

Wir betrachten einen 4-dimensionalen $\mathbb{Q}$-Vektorraum V und die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ über $\mathbb{Q}$. Beweisen Sie jeweils (ohne viel zu rechnen), ob oder ob nicht

a) es Basisfolgen $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_2$ von V und eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \longrightarrow V$ gibt, so daß $\mathrm{M}(\mathcal{B}_1, \varphi, \mathcal{B}_1) = A$ und $\mathrm{M}(\mathcal{B}_2, \varphi, \mathcal{B}_2) = \lambda E$ für ein $\lambda \in \mathbb{Q}$ (also ein skalares Vielfaches der Einheitsmatrix E) ist, *3 Punkte*

b) es Basisfolgen $\mathcal{C}_1$ und $\mathcal{C}_2$ von V und eine Bilinearform $\Phi\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{Q}$ gibt, so daß $\mathrm{M}(\mathcal{C}_1, \Phi, \mathcal{C}_1) = A$ und $\mathrm{M}(\mathcal{C}_2, \Phi, \mathcal{C}_2)$ eine Diagonalmatrix ist. *3 Punkte*

Aufgabe 8.

Wir betrachten auf $W = \mathbf{V}_{1\times 5}(\mathbb{Z}_5)$ das Standard-Skalarprodukt $\Phi\colon W \times W \longrightarrow \mathbb{Z}_5$ mit

$$\Phi(X, Y) = \sum_{i=1}^{5} x_i y_i \quad \text{für} \quad X = (x_1, \ldots, x_5),\ Y = (y_1, \ldots, y_5) \in W.$$

a) Ist Φ ausgeartet? *2 Punkte*

b) Gibt es in W isotrope Vektoren bezüglich Φ? *2 Punkte*

Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

Aufgabe 9.

Es sei $\mathcal{B}$ eine Basisfolge von $V = \mathbf{V}_{3\times 1}(\mathbb{Z}_3)$. Ein Skalarprodukt $\Phi\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{Z}_3$ sei gegeben durch die Matrix $\mathrm{M}(\mathcal{B}, \Phi, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie eine Orthogonalbasis $\mathcal{C}$ von V bezüglich Φ. (Vergessen Sie nicht die Formulierung des Ergebnisses.)

Hinweis: Das Gram-Schmidt-Verfahren ist hier ungeeignet. *4 Punkte*

Aufgabenblatt 3 zur

Vordiplom-Klausur Lineare Algebra (5. 4. 1994)

Professor Dr. U. Schoenwaelder, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

---

Aufgabe 10.

Gegeben seien K-Vektorräume W und V gleicher Dimension, eine nicht ausgeartete Bilinearform $\Phi\colon W \times V \longrightarrow K$ sowie ein Paar $(\mathcal{B}', \mathcal{B})$ bezüglich Φ dualer Basisfolgen von W und V.

a) Welche Matrix hat Φ bezüglich $\mathcal{B}'$ und $\mathcal{B}$? *2 Punkte*

b) Es sei $(\mathcal{C}', \mathcal{C})$ ein weiteres Paar bezüglich Φ dualer Basisfolgen von W und V. Leiten Sie eine Formel her, mit der sich aus der Basiswechselmatrix $\mathrm{M}(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ die Basiswechselmatrix $\mathrm{m}(\mathcal{C}', \mathcal{B}')$ berechnen läßt. *2 Punkte*

Aufgabe 11.

Das folgende lineare Gleichungssystem über $\mathbb{Q}$ ist offenbar nicht lösbar.

$$\begin{array}{rcrcl} 2 \cdot x_1 & + & 1 \cdot x_2 & = & 8 \\ 1 \cdot x_1 & + & 1 \cdot x_2 & = & 4 \\ 0 \cdot x_1 & + & 1 \cdot x_2 & = & 2 \end{array}$$

Berechnen Sie eine <u>neue rechte Seite</u>, so daß das Gleichungssystem lösbar wird und die Abweichung der neuen rechten Seite von der alten bezüglich des Standard-Skalarprodukts möglichst klein wird, und zwar auf zwei Arten:

a) nach der allgemeinen Methode der besten Approximation, *8 Punkte*

b) durch vorherige Bestimmung einer guten Ersatzlösung für ein „überbestimmtes“ lineares Gleichungssystem. *6 Punkte*

Aufgabe 12.

Berechnen Sie die Determinante der Matrix $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{V}_{4\times 4}(\mathbb{R})$. *4 Punkte*

Aufgabe 13.

Wir betrachten im Restklassenring $\mathbb{Z}_{252}$ die Restklassen $\overline{55}$ und $\overline{42}$, die die Zahlen 55 bzw. 42 enthalten.

a) Hat $\overline{55}$ ein inverses Element bezüglich der Multiplikation? Wenn ja, berechnen Sie es. Wenn nein, beweisen Sie, daß es keins gibt. *4 Punkte*

b) Hat $\overline{42}$ ein inverses Element bezüglich der Multiplikation? Wenn ja, berechnen Sie es. Wenn nein, beweisen Sie, daß es keins gibt. *2 Punkte*
