NAME ______________________________

MATRIKELNUMMER ______________________________

STUDIENGANG ______________________________

Prof. Dr. Eva Zerz SS 2007

# Lineare Algebra I – Klausur am 17.7.2007
## Gruppe A

- **Für jede Aufgabe ein neues Blatt verwenden**
- **Name, Matrikelnummer, Aufgabennummer auf jedes Blatt**
- Nicht mit Rot schreiben
- Es gibt **6 Aufgaben** und insgesamt **50 Punkte**

| Aufgabe | Punkte | |
|---|---|---|
| 1 | 9 | |
| 2 | 6 | |
| 3 | 10 | |
| 4 | 7 | |
| 5 | 10 | |
| 6 | 8 | |

**Viel Glück!**

1. *(2+2+2+3 Pkt)* Sei $K$ ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $K^{n\times n}$ der $K$-Vektorraum der $n \times n$ Matrizen mit Einträgen in $K$.
   (a) Ist die Abbildung $\mathrm{sp}\colon K^{n\times n} \to K$, $A \mapsto \mathrm{sp}(A)$, die jeder Matrix ihre Spur zuordnet, $K$-linear?
   (b) Zeigen Sie, dass für alle $A, B \in K^{n\times n}$ gilt: $\mathrm{sp}(AB) = \mathrm{sp}(BA)$.
   (c) Sei $K = \mathbb{Q}$. Gibt es Matrizen $A, B \in K^{n\times n}$ so, dass $AB - BA = I_n$ gilt? (Wenn ja, Beispiel angeben; wenn nein, begründen.)
   (d) Sei $K = \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$. Finden Sie alle Paare $(A, B)$ mit $AB - BA = I_2$, wobei $A$ eine obere $2 \times 2$ Dreiecksmatrix und $B$ eine untere $2 \times 2$ Dreiecksmatrix ist.

2. *(3+1+2 Pkt)* Seien $V, W$ endlich-dimensionale Vektorräume über $K$ und $f\colon V \to W$ ein surjektiver Homomorphismus. Zeigen Sie, dass es (a) einen Homomorphismus $g\colon W \to V$ gibt mit $f \circ g = \mathrm{id}_W$ und dass dann gilt: (b) $g$ ist injektiv und (c) $V = \mathrm{Bi}(g) \oplus \mathrm{Ke}(f)$.

3. *(2+2+2+2+2 Pkt)* Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:
   (a) Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ so, dass $AA^T = I_n$, so folgt $\det(A) \in \{1, -1\}$.
   (b) Ist $A \in K^{n\times n}$, $K$ ein Körper, so sind die Elemente $A^0, A^1, A^2, \ldots, A^n$ des $K$-Vektorraumes $K^{n\times n}$ linear abhängig.
   (c) Die Bilinearform $b\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 4x_2y_2$ ist ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$.
   (d) Ist $A \in R^{3\times 3}$, $R$ ein kommutativer Ring, so gilt $(\mathrm{adj}(A))_{13} = A_{12}A_{23} - A_{13}A_{22}$.
   (e) Die Permutation $\pi \in S_5$ mit $(\pi(1), \pi(2), \pi(3), \pi(4), \pi(5)) = (5, 4, 3, 2, 1)$ ist ungerade.

Bei folgenden Aufgaben zählt nur das Ergebnis, nicht der Rechenweg (außer, wenn explizit nach einer Begründung gefragt wird). Tragen Sie Ihr Ergebnis unten ein.
**Wichtig: Geben Sie trotzdem unbedingt die Blätter mit Ihren Berechnungen ab!**

4. *(4+1+1+1 Pkt)* Berechnen Sie (a) die Determinante, (b) den Rang, (c) die Spur von

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 4 \\ -8 & -1 & 1 & 8 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

   (d) Bestimmen Sie den Spaltenraum von $A$. *Hilfestellung zum Überprüfen Ihres Ergebnisses zu (a): Die Determinante liegt zwischen* $-100$ *und* $100$ *und ist durch* $9$ *teilbar.*

**Antwort:** Det: $\boxed{\phantom{xx}}$ Rang: $\boxed{\phantom{xx}}$ Spur: $\boxed{\phantom{xx}}$ Spaltenraum:

5. *(2+2+2+2+2 Pkt)* Bestimmen Sie (a) die Eigenwerte, (b) den Rang, (c) die Eigenräume, (d) die Dimensionen der Eigenräume von

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 7 & -5 & 8 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

   (e) Ist $A$ diagonalisierbar? (Begründung auf Rechenblatt, hier nur ja/nein)

**Antwort:** EW: $\boxed{\phantom{xx}}$ Rang: $\boxed{\phantom{xx}}$ Diag.bar: $\boxed{\phantom{xx}}$

$V(A,\ .\ ) =$ $\qquad$ $V(A,\ .\ ) =$ $\qquad$ $V(A,\ .\ ) =$

$\dim V(A,\ .\ ) =$ $\qquad$ $\dim V(A,\ .\ ) =$ $\qquad$ $\dim V(A,\ .\ ) =$

6. *(2+4+2 Pkt)* Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ ist die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 3 & a \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

   (a) invertierbar, (b) diagonalisierbar? (Begründung auf Rechenblatt) (c) Wie, wenn überhaupt, ändert sich Ihre Antwort zu (a) und (b), wenn Sie $A$ als Element von $\mathbb{C}^{2\times 2}$ auffassen? (Bitte (c) auf Rechenblatt beantworten.)

**Antwort:** Inv.bar für alle $a$ mit: $\boxed{\phantom{xx}}$ Diag.bar für alle $a$ mit: $\boxed{\phantom{xx}}$