Lineare Algebra I – Klausur am 17.7.2007
Gruppe A

1. *(2+2+2+3 Pkt)* Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $K^{n\times n}$ der K-Vektorraum der $n \times n$ Matrizen mit Einträgen in K.

   (a) Ist die Abbildung $\mathrm{sp}\colon K^{n\times n} \to K$, $A \mapsto \mathrm{sp}(A)$, die jeder Matrix ihre Spur zuordnet, K-linear?

   Lösung: Ja. Es seien $A, B \in K^{n\times n}$ und $r \in K$. Dann gilt $\mathrm{sp}(rA + B) =$

$$\sum_{i=1}^{n}(rA+B)_{ii} = \sum_{i=1}^{n}(rA_{ii}+B_{ii}) = r\sum_{i=1}^{n}A_{ii} + \sum_{i=1}^{n}B_{ii} = r\mathrm{sp}(A) + \mathrm{sp}(B).$$

   (b) Zeigen Sie, dass für alle $A, B \in K^{n\times n}$ gilt: $\mathrm{sp}(AB) = \mathrm{sp}(BA)$.

   Lösung: $(AB)_{kk} = \sum_{i=1}^{n} A_{ki}B_{ik}$, $(BA)_{ii} = \sum_{k=1}^{n} B_{ik}A_{ki}$. Daher gilt

$$\mathrm{sp}(AB) = \sum_{k=1}^{n}(AB)_{kk} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}A_{ki}B_{ik} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}B_{ik}A_{ki} = \sum_{i=1}^{n}(BA)_{ii} = \mathrm{sp}(BA).$$

   (c) Sei $K = \mathbb{Q}$. Gibt es Matrizen $A, B \in K^{n\times n}$ so, dass $AB - BA = I_n$ gilt? (Wenn ja, Beispiel angeben; wenn nein, begründen.)

   Lösung: Nein. Wenn solche A, B existieren würden, so wäre $\mathrm{sp}(AB - BA) = \mathrm{sp}(I_n) = n$. Aber $\mathrm{sp}(AB - BA) =^{(a)} \mathrm{sp}(AB) - \mathrm{sp}(BA) =^{(b)} 0$. Über $\mathbb{Q}$ gilt $n \neq 0$.

   (d) Sei $K = \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$. Finden Sie alle Paare (A, B) mit $AB - BA = I_2$, wobei A eine obere 2×2 Dreiecksmatrix und B eine untere 2×2 Dreiecksmatrix ist.

   Lösung: Laut (a), (b) gilt $\mathrm{sp}(AB - BA) = 0$, und über $\mathbb{Z}_2$ ist $\mathrm{sp}(I_2) = 1 + 1 = 0$. Seien

$$A = \begin{bmatrix} a & c \\ 0 & d \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b & 0 \\ e & f \end{bmatrix}.$$

   Dann ist

$$AB = \begin{bmatrix} ab+ce & cf \\ de & df \end{bmatrix}, BA = \begin{bmatrix} ab & bc \\ ae & ce+df \end{bmatrix}, AB-BA = \begin{bmatrix} ce & bc+cf \\ ae+de & ce \end{bmatrix}.$$

   Also gilt $AB - BA = I_2$ genau dann, wenn $ce = 1, c(b+f) = 0, (a+d)e = 0$. Das System ist äquivalent zu $\{c = 1, e = 1, b = f, a = d\}$, das heißt, $b = f \in \{0, 1\}$ und $a = d \in \{0, 1\}$. Insgesamt gibt es 4 Lösungen (A, B), wobei

$$A \in \left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}, \quad B \in \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right\}.$$

2. *(3+1+2 Pkt)* Seien V, W endlich-dimensionale Vektorräume über K und $f\colon V \to W$ ein surjektiver Homomorphismus. Zeigen Sie, dass es (a) einen Homomorphismus $g\colon W \to V$ gibt mit $f \circ g = \mathrm{id}_W$ und dass dann gilt: (b) g ist injektiv und (c) $V = \mathrm{Bi}(g) \oplus \mathrm{Ke}(f)$.

   Lösung:
   (a) Da f surjektiv ist, gilt $\mathrm{Bi}(f) = W$. Sei $w_1, \ldots, w_n$ eine Basis von W, dann existieren $v_1, \ldots, v_n \in V$, so dass $f(v_i) = w_i$. Definieren wir $g(w_i) := v_i$ für alle i (eine lineare Abbildung ist durch das Bild einer Basis eindeutig festgelegt). Dann gilt für alle i: $(f \circ g)(w_i) = w_i$, per Linearität folgt $(f \circ g)(w) = w$ für alle $w \in W$, also $f \circ g = \mathrm{id}_W$.

(b) Sei $w \in \mathrm{Ke}(g)$, dann ist $g(w) = 0$ und daher $0 = f(0) = f(g(w)) = (f \circ g)(w) = w$, also $\mathrm{Ke}(g) = \{0\}$ und g ist injektiv.
(c) $V \ni v = g(f(v)) + (v - g(f(v)))$, wobei $g(f(v)) \in \mathrm{Bi}(g)$ und $f(v - g(f(v))) = f(v) - (f \circ g)(f(v)) = 0$, also $v - g(f(v)) \in \mathrm{Ke}(f)$. Also gilt $V = \mathrm{Bi}(g) + \mathrm{Ke}(f)$. Sei $v \in \mathrm{Bi}(g) \cap \mathrm{Ke}(f)$, dann ist $f(v) = 0$ und es gibt $w \in W$, so dass $g(w) = v$. Daraus folgt $0 = f(v) = f(g(w)) = w$, also $w = 0$ und daher $v = g(w) = 0$, d.h., die Summe ist direkt. Alternativ für Direktheit: Dimensionsformel.

3. *(2+2+2+2+2 Pkt)* Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

   (a) Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ so, dass $AA^T = I_n$, so folgt $\det(A) \in \{1, -1\}$.

   Lösung: Ja, denn $1 = \det(I_n) = \det(A) \cdot \det(A^T) = (\det(A))^2$. Aus $x^2 = 1$ mit $x \in \mathbb{R}$ folgt $x \in \{\pm 1\}$.

   (b) Ist $A \in K^{n\times n}$, K ein Körper, so sind die Elemente $A^0, A^1, A^2, \ldots, A^n$ des K-Vektorraumes $K^{n\times n}$ linear abhängig.

   Lösung: Ja, denn das charakteristische Polynom $\chi_A \in K[x]$ ist normiert und hat Grad n, d.h., $\chi_A = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ für geeignete a_i. Laut Hamilton-Cayley gilt $\chi_A(A) = 0$, d.h., $A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \ldots + a_1 A^1 + a_0 A^0 = 0$ und die lineare Abhängigkeit folgt.

   (c) Die Bilinearform $b\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 4x_2y_2$ ist ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$.

   Lösung: Nein, da $b(x, x) = (x_1 - 2x_2)^2 = 0$ immer gilt, wenn $x = [2t, t]^T$ für $t \in \mathbb{R}$, also nicht nur für $x = 0$.

   (d) Ist $A \in R^{3\times 3}$, R ein kommutativer Ring, so gilt $(\mathrm{adj}(A))_{13} = A_{12}A_{23} - A_{13}A_{22}$.

   Lösung: Ja, denn

$$(\mathrm{adj}(A))_{13} = \det(A^{(3,1)}) = \det \begin{bmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} \\ 0 & A_{22} & A_{23} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A_{12}A_{23} - A_{13}A_{22}.$$

   (e) Die Permutation $\pi \in S_5$ mit $(\pi(1), \pi(2), \pi(3), \pi(4), \pi(5)) = (5, 4, 3, 2, 1)$ ist ungerade.

   Lösung: Nein. Da $\pi = \tau_{2,4} \circ \tau_{1,5}$, ist π ist gerade. Alternativ: Es gibt 10 Fehlstände.

Bei folgenden Aufgaben zählt nur das Ergebnis, nicht der Rechenweg (außer, wenn explizit nach einer Begründung gefragt wird). Tragen Sie Ihr Ergebnis unten ein.
Wichtig: Geben Sie trotzdem unbedingt die Blätter mit Ihren Berechnungen ab!

4. *(4+1+1+1 Pkt)* Berechnen Sie (a) die Determinante, (b) den Rang, (c) die Spur von

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 4 \\ -8 & -1 & 1 & 8 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

(d) Bestimmen Sie den Spaltenraum von A. *Hilfestellung zum Überprüfen Ihres Ergebnisses zu (a): Die Determinante liegt zwischen* -100 *und* 100 *und ist durch* 9 *teilbar.*

Antwort: Det: $\boxed{72}$ Rang: $\boxed{4}$ Spur: $\boxed{9}$ Spaltenraum: $\mathbb{R}^4$

5. *(2+2+2+2+2 Pkt)* Bestimmen Sie (a) die Eigenwerte, (b) den Rang, (c) die Eigenräume, (d) die Dimensionen der Eigenräume von

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 7 & -5 & 8 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(e) Ist A diagonalisierbar? (Begründung auf Rechenblatt, hier nur ja/nein)

Antwort: EW: $\boxed{\{0,5\}}$ Rang: $\boxed{2}$ Diag.bar: $\boxed{\text{nein}}$

$V(A,\ 0\ ) = \langle [-5,1,5]^T \rangle$ $V(A,\ 5\ ) = \langle [0,3,5]^T \rangle$

$\dim V(A,\ 0\ ) = 1$ $\dim V(A,\ 5\ ) = 1$

6. *(2+4+2 Pkt)* Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ ist die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 3 & a \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

(a) invertierbar, (b) diagonalisierbar (Begründung auf Rechenblatt)? (c) Wie, wenn überhaupt, ändert sich Ihre Antwort zu (a) und (b), wenn Sie A als Element von $\mathbb{C}^{2\times 2}$ auffassen? (Bitte (c) auf Rechenblatt beantworten.)

Antwort: Inv.bar für alle a mit: $\boxed{a \neq -3}$ Diag.bar für alle a mit: $\boxed{a < 1}$

Lösung: (a) $\det(A) = a + 3$; (b) $\det(xI_2 - A) = x^2 - 4x + a + 3$. Ist $a > 1$, so gibt es keine reellen EW (nicht diag.bar). Wenn $a = 1$, gibt es nur einen EW, nämlich $\lambda = 2$ und es gilt $\dim(V(A,2)) = 1 < 2$ (nicht diag.bar). Wenn $a < 1$, gibt es 2 reelle EW $\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{1-a}$, also ist A diag.bar für $a < 1$.
(c) Über $\mathbb{C}$: An der Antwort zu (a) ändert sich nichts. Die Antwort zu (b) ändert sich, denn für $a \neq 1$ gibt es immer zwei komplexe EW $\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{1-a}$, also diag.bar für alle $a \neq 1$. Der Fall $a = 1$ bleibt wie in (b). Also ist die Antwort zu (b) über $\mathbb{C}$: $a \neq 1$.