Nachholklausur zur Linearen Algebra II (15. 10. 98)

Professor Dr. G. Hiß, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

Bitte bearbeiten Sie auf jeder Seite nur eine Aufgabe, und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten. Von den 8 gegebenen Aufgaben für insgesamt 59 Punkte können Sie eine beliebige Auswahl in beliebiger Reihenfolge bearbeiten. Zum Bestehen der Klausur sind mindestens 25 Punkte notwendig. Beachten Sie, daß ausführliche Begründungen einen wesentlichen Teil der Lösung einer Aufgabe bilden, und achten Sie bei Beweisen auf die Vollständigkeit Ihrer Argumentation.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1.

(a) Berechnen Sie die Invariantenteiler der Matrix $A = \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 18 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}^{2\times 2}$.

(b) Geben Sie die Elementarteiler von A an.

(Definition der beiden Begriffe wie in der Vorlesung.) *3 + 1 = 4 Punkte*

Aufgabe 2.

Es sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und $\chi_A = (X+2)^2(X-3)$. Bestimmen Sie die verschiedenen

(a) Frobenius-Normalformen, zu denen A ähnlich sein könnte,

(b) Weierstraß-Normalformen, zu denen A ähnlich sein könnte,

(c) Jordan-Normalformen, zu denen A ähnlich sein könnte,

(d) Invariantenteiler, die $XE_3 - A$ haben könnte.

(Antwort jeweils mit Begründung.) *3 + 3 + 3 + 3 = 12 Punkte*

Aufgabe 3.

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{4\times 4}$. Berechnen Sie die Eigenwerte von A sowie ihre algebraischen und geometrischen Vielfachheiten (die Eigenräume brauchen Sie nicht), und zeigen Sie, wie man daraus (in diesem konkreten Fall) bereits die Jordan-Normalform und das Minimalpolynom von A bestimmen kann. (Mit Begründung.) *6 Punkte*

Aufgabe 4.

Es sei K ein Körper.

(a) Geben Sie zwei Matrizen $A, B \in K^{4\times 4}$ mit $\chi_A = \chi_B$ und $\mu_A = \mu_B$ an, die nicht ähnlich sind. Begründen Sie kurz für jede der drei Eigenschaften, warum sie erfüllt ist.

(b) Beweisen Sie: Zwei Matrizen $A, B \in K^{3\times 3}$ mit $\chi_A = \chi_B$ und $\mu_A = \mu_B$ sind ähnlich.

(c) Die Matrizen $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ haben alle die Determinante 1 und das charakteristische Polynom $(X-1)^3$. Welche von ihnen sind ähnlich, welche nicht? Untersuchen Sie diese Frage, ohne den Invariantenteiler-Algorithmus für die zugehörigen charakteristischen Matrizen zu benutzen.
(Antwort mit Beweis.) *4 + 3 + 3 = 10 Punkte*

Aufgabe 5.
Über dem Körper $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ mit zwei Elementen seien die Polynome

$$f = X^5 + X^4 + X^2 + 1 \quad \text{und} \quad g = X^3 + X^2 + X + 1$$

gegeben. Berechnen Sie mit Hilfe des euklidischen Algorithmus einen größten gemeinsamen Teiler d von f und g sowie zwei Polynome $a, b \in \mathbb{F}_2[X]$ mit $af + bg = d$. *7 Punkte*

Aufgabe 6.
Es sei V ein 3-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ eine Basis von V. Eine Bilinearform β auf V sei durch die Matrix $B = B_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\beta) = \begin{bmatrix} 6 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ gegeben.

(a) Berechnen Sie mit Hilfe des modifizierten Gauß-Algorithmus eine Orthogonalbasis $\mathcal{C}$ von V bezüglich β. Geben Sie die Basis $\mathcal{C}$, die Basiswechselmatrix $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\mathrm{id}_V)$ und die Strukturmatrix $B_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(\beta)$ an.

(b) Ist β positiv definit? (Begründung.) *5 + 2 = 7 Punkte*

Aufgabe 7.
Es sei $V \leq \mathbb{R}[X]$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellen Polynome vom Grad ≤ 2. In V seien die Basis $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3) = (1,\ 6x-4,\ 6x^2-3)$ und die durch $\beta(v, w) = \int_0^1 v(x)w(x)dx$ definierte Bilinearform β gegeben.

(a) Berechnen Sie die Strukturmatrix $B_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\beta)$. (Zur Kontrolle: Die Summe aller Einträge ist $\frac{66}{5}$.)

(b) Berechnen Sie mit Hilfe des Schmidt'schen Orthogonalisierungsverfahrens eine Orthogonalbasis $\mathcal{C} = \{w_1, w_2, w_3\}$ von V bezüglich β, so daß $w_1 = v_1$ ist. Geben Sie die Basis $\mathcal{C}$ und die Strukturmatrix $B_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(\beta)$ an.

Hinweis: Sie brauchen jetzt keine Integrale mehr zu berechnen, weil Sie die Matrix $B_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\beta)$ haben.

(c) Normieren Sie $\mathcal{C}$, und geben Sie die resultierende Orthonormalbasis $\mathcal{C}' = \{w_1', w_2', w_3'\}$ an.

2 + 6 + 1 = 9 Punkte

Aufgabe 8.
Es sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und β eine nicht-ausgeartete Bilinearform auf V. Für φ aus $\mathrm{End}_K(V)$ bezeichnen wir mit $\varphi^\dagger$ die zu φ rechts-adjungierte Abbildung bezüglich β. Zeigen Sie: Für alle $\varphi, \psi \in \mathrm{End}_K(V)$ gilt $(\varphi \circ \psi)^\dagger = \psi^\dagger \circ \varphi^\dagger$.

(Hinweis: Es kommt auf die sorgfältige Argumentation an. Wo geht z. B. die Voraussetzung ein, daß β nicht-ausgeartet ist?) *4 Punkte*
