Klausur, 02.08.2010

Lineare Algebra I für Informatiker, SS 2010, Dr. F. Lübeck

Name: ______________________ **Matrikelnummer:** ______________

Bearbeiten Sie die folgenden Rechenaufgaben und schreiben Sie die Ergebnisse in den dafür vorgesehenen Platz. Sie brauchen Ihre Ergebnisse **nicht** zu begründen, für Begründungen und Ansätze gibt es **keine** Punkte. Für die richtige Antwort bekommen Sie die angegebene Punktzahl. Für eine falsche Antwort gibt es **Null** Punkte.	
1	Für ein $n \in \mathbb{N}$ sei V der Vektorraum $\mathbb{R}^n$. Weiter sei $\varphi : V \to V$ definiert durch $\varphi((v_1, \ldots, v_n)^t) = (w_1, \ldots, w_n)^t$ mit $w_1 = 0$ und $w_i = v_{i-1}$ für alle $2 \leq i \leq n$. (a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom χ_φ und das Minimalpolynom μ_φ von φ. *($1 + 1$ Punkte)* $\chi_\varphi = \boxed{}$ $\mu_\varphi = \boxed{}$ (b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von φ. $\boxed{}$ *(1 Punkt)* (c) Geben Sie Basen für die Eigenräume von φ an. *(1 Punkt)*
2	Es sei $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ der Körper mit 2 Elementen. Bestimmen Sie die Menge aller $x \in \mathbb{F}_2^5$ mit $Ax = b$, wobei $A \in \mathbb{F}_2^{4\times 5}$ und $b \in \mathbb{F}_2^4$ die folgenden sind: *(4 Punkte)* $A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ Ergebnis: $\boxed{}$

3	Es sei $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ und $\varphi : V \to V$ definiert durch $\varphi(A) = XAX$ für alle $A \in V$. (a) Geben Sie die Abbildungsmatrix von φ bezüglich der geordneten Basis $\mathcal{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ an: *(4 Punkte)* $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\varphi) =$ (b) Was ist der Rang von φ? $\mathrm{Rang}(\varphi) = \boxed{}$ *(1 Punkt)* (c) Geben Sie eine Basis $\mathcal{C}$ von $\mathrm{Kern}(\varphi)$ an. *(2 Punkte)* $\mathcal{C} =$
4	Es sei $\mathbb{R}^3$ mit dem Skalarprodukt $(u, v) = 2u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$ für $u = (u_1, u_2, u_3)^t$ und $v = (v_1, v_2, v_3)^t$ gegeben. (a) Bestimmen Sie aus *(3 Punkte)* $x = (0, 0, 1)^t, \quad y = (2, 0, -1)^t, \quad z = (-1, 2, -3)^t$ mit dem Gram-Schmidt-Verfahren eine Orthonormalbasis $\mathcal{O}$. $\mathcal{O} =$ (b) Gegeben seien $u = (1, 1, 1)^t$ und $v = (-1, 1, 0)^t$ aus $\mathbb{R}^3$. Geben Sie die Koordinatenvektoren von u und v bezüglich $\mathcal{O}$ an: $\kappa_{\mathcal{O}}(u) = \boxed{}$ und $\kappa_{\mathcal{O}}(v) = \boxed{}$. *($2 + 2$ Punkte)*

Name:________________________ Matrikelnummer:________________________

5	Es sei $A_a \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ mit $$A_a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -a+4 & 3 & -2a \end{pmatrix}.$$ (a) Bestimmen Sie die Determinante von A_a. *(1 Punkt)* (b) Für welche Werte von a ist A_a invertierbar? *(1 Punkt)* (c) Für welche $a \in \mathbb{Z}$ ist A_a invertierbar in $\mathbb{Z}^{3\times 3}$? *(1 Punkt)* (d) Es sei $a = 1$. Bestimmen Sie die Eigenwerte von A_1. *(2 Punkte)* (e) Es sei $a = 1$. Geben Sie Basen für die Eigenräume von A_1 an. *(3 Punkte)*

Beantworten Sie die folgenden Aufgaben schriftlich. Beweisen Sie alle Ihre Behauptungen.
Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
Fangen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite an.

6	Sei K ein Körper und $A \in K^{n\times n}$. Zeigen Sie, dass genau dann $\mathrm{Rang}(A) \leq 1$ ist, wenn es Vektoren $u, v \in K^n$ gibt mit $A = uv^t$. *(5 Punkte)*
7	Sei K ein Körper und $A \in K^{n\times n}$ mit $A^2 = 0$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Rang}(A) \leq n/2$ ist. *(5 Punkte)*
8	Sei K ein Körper und V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum. Sei $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$ invertierbar und sei $U \leq V$ ein φ-invarianter Unterraum. Zeigen Sie, dass U auch φ^{-1}-invariant ist. *(5 Punkte)*
9	Sei K ein Körper und $A \in K^{n\times n}$ mit $A^n = 0$ und $A^j \neq 0$ für $j < n$. Zeigen Sie, dass A ähnlich zu einer oberen Dreiecksmatrix mit Nullen auf der Hauptdiagonalen ist. Zeigen Sie weiter, dass A genau dann diagonalisierbar ist, wenn $n = 1$ ist. *(5 Punkte)*