

Mathematische Grundlagen
Klausur am 9.3.2007 – Gruppe A

- Für jede Aufgabe ein neues Blatt verwenden
- Name, Matrikelnr., Gruppe (A/B), Aufgabennr. auf jedes Blatt
- Notfalls Zusatzblätter anfügen, diese wie oben beschriftet, Vermerk aufs Originalblatt (aber nie Antworten zu verschiedenen Aufgaben auf dasselbe Blatt)
- Nicht mit Rot schreiben
- Es gibt **6 Aufgaben** und insgesamt **48 Punkte**.
Für Ergebnisse ohne erkennbaren Rechenweg gibt es keine Punkte.

Aufgabe	Punkte	
1	8	
2	8	
3	9	
4	10	
5	6	
6	7	

Viel Glück!

1. (8=1+3+3+1 Punkte)

- (a) Begründen Sie (kurz, unter Angabe der relevanten Sätze aus der Vorlesung), warum $\mathbb{R}[x]$ einen Quotientenkörper besitzt.
- (b) Bestimmen Sie eine gekürzte Darstellung des Elementes

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 5x - 2}{x^3 + 5x^2 + 7x + 2}$$

dieses Quotientenkörpers.

- (c) Bestimmen Sie die größtmögliche Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}$ so, dass $D \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$ eine Funktion ist, und untersuchen Sie diese auf Injektivität und Surjektivität.
- (d) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion.

2. (8=2+2+2+2 Punkte) Berechnen Sie

- (a) $\operatorname{Re}((1+i)^{17})$
- (b) eine rationale Zahl x mit $|x - \sqrt{2}| < 0.01$ (Hinweis: $\sqrt{2} = 1.41421356\dots$)
- (c) die Zifferndarstellung von 2007 im Binärsystem ($b = 2$)
- (d) den größten gemeinsamen Teiler von 190747 und 184493.

3. (9=3+3+3 Punkte)

- (a) Sei $G = \{e, a, b\}$ eine Gruppe mit 3 Elementen und neutralem Element e . Bestimmen Sie $x \star y$ für alle $x, y \in G$.
- (b) Sei G eine Gruppe mit n Elementen und neutralem Element e . Zeigen Sie, dass für alle $x \in G$ gilt: $x^n = e$.
- (c) Benutzen Sie (b), um $101^{102} \bmod 103$ zu berechnen. (Hinweis: 103 ist eine Primzahl.)

4. (10=4+3+3 Punkte)

- (a) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Zeigen Sie, dass A genau dann invertierbar ist, wenn A durch elementare Zeilenumformungen in die Einheitsmatrix I_n übergeführt werden kann.
- (b) Verwenden Sie (a) zur Bestimmung der Inversen von

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

- (c) Schreiben Sie die Permutationsmatrix

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$$

als Produkt von Spaltenvertauschungsmatrizen.

5. (6=3+3 Punkte) Sei K ein Körper und seien $m, n \in \mathbb{N}$. Für $A, B \in K^{m \times n}$ definiert man

$$A \sim B \iff \exists U \in K^{m \times m}, V \in K^{n \times n} : U, V \text{ invertierbar und } B = UAV.$$

- (a) Zeigen Sie, dass \sim eine Äquivalenzrelation auf $K^{m \times n}$ ist.
- (b) Zeigen Sie, dass $|K^{m \times n} / \sim| \leq \min\{m, n\} + 1$.

6. (7=4+3 Punkte)

- (a) Auf \mathbb{N}^2 definiert man eine totale Ordnung (das brauchen Sie nicht zu beweisen!) durch

$$(m, n) \preceq (p, q) \iff m \leq p \text{ und } (m = p \Rightarrow n \leq q),$$

wobei \leq die natürliche Ordnung auf \mathbb{N} bezeichnet. Zeigen Sie, dass \preceq eine Wohlordnung ist.

- (b) Sei \preceq eine totale Ordnung auf einer Menge M und \prec die zugehörige strikte Ordnung. Zeigen Sie, dass die Bedingung

$$\forall x \in M : \{y \in M \mid y \prec x\} \text{ endlich}$$

hinreichend, aber nicht notwendig dafür ist, dass \preceq eine Wohlordnung ist.