

Musterlösung zur Klausur Math. Grundlagen am 9.3.2007, Gruppe B

1. (a) \mathbb{R} ist ein Körper, also insbesondere ein Integritätsbereich. Laut Satz 5.11 ist $\mathbb{R}[x]$ dann ebenfalls ein Integritätsbereich. Laut Satz 5.10 besitzt jeder Integritätsbereich einen Quotientenkörper.
- (b) Erste Art: Man errät die Nullstelle -2 des Zählers und die Nullstelle 2 des Nenners.

$$\begin{aligned}(x^3 - x^2 - 5x + 2) : (x + 2) &= x^2 - 3x + 1 \\(x^3 - 5x^2 + 7x - 2) : (x - 2) &= x^2 - 3x + 1\end{aligned}$$

Daher ist $f(x) = \frac{x+2}{x-2}$.

Zweite Art: Euklidischer Algorithmus liefert

$$\text{ggT}(x^3 - x^2 - 5x + 2, x^3 - 5x^2 + 7x - 2) = x^2 - 3x + 1.$$

$$\begin{aligned}(x^3 - x^2 - 5x + 2) : (x^2 - 3x + 1) &= x + 2 \\(x^3 - 5x^2 + 7x - 2) : (x^2 - 3x + 1) &= x - 2\end{aligned}$$

Daher ist $f(x) = \frac{x+2}{x-2}$.

- (c) $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Injektiv: Sei

$$\frac{x_1 + 2}{x_1 - 2} = \frac{x_2 + 2}{x_2 - 2}$$

Dann ist

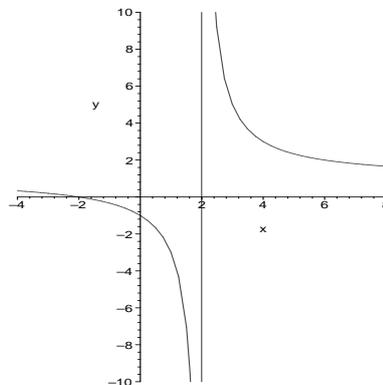
$$x_1x_2 + 2x_2 - 2x_1 - 4 = x_1x_2 - 2x_2 + 2x_1 - 4$$

also $4x_2 = 4x_1$, also $x_2 = x_1$. Funktion ist injektiv.

Surjektiv: Wäre $\frac{x+2}{x-2} = 1$, so wäre $x + 2 = x - 2$, also $2 = -2 \nmid$.

Funktion ist nicht surjektiv. (Es gilt $\text{Bi}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, siehe Skizze.)

- (d)



2. (a) Es gilt $1 + i = \sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4}) + i \sin(\frac{\pi}{4}))$. Daher ist

$$(1 + i)^{17} = \sqrt{2}^{17} \left(\underbrace{\cos\left(\frac{17\pi}{4}\right)}_{=\cos(\frac{\pi}{4})} + i \underbrace{\sin\left(\frac{17\pi}{4}\right)}_{=\sin(\frac{\pi}{4})} \right) = \sqrt{2}^{16} (1 + i).$$

Also ist $\text{Im}((1 + i)^{17}) = \sqrt{2}^{16} = 2^8 = 256$.

(b) $x = 1.73 = \frac{173}{100}$ ist in \mathbb{Q} und es gilt $\sqrt{3} - x = 0.0020\dots$, also ist $|x - \sqrt{3}| < 0.01$.

(c) $2007 = 3 \cdot 669 + 0$,
 $669 = 3 \cdot 223 + 0$,
 $223 = 3 \cdot 74 + 1$,
 $74 = 3 \cdot 24 + 2$,
 $24 = 3 \cdot 8 + 0$,
 $8 = 3 \cdot 2 + 2$,
 $2 = 3 \cdot 0 + 2$.

Also ist die Ternärdarstellung: 2202100.

(d) $197213 \bmod 190747 = 6466$
 $190747 \bmod 6466 = 3233$
 $6466 \bmod 3233 = 0$.

Also ist der ggT gleich 3233.

3. (a) Sei $G = \{e, a, b\}$, wobei e, a, b paarweise verschieden sind. Da e das neutrale Element sein soll, gilt

$$a \star e = e \star a = a, \quad b \star e = e \star b = b, \quad e \star e = e.$$

Betrachten wir jetzt $a \star b$.

Wäre $a \star b = a$, so würde (da a invertierbar) folgen, dass $b = e$ $\not\zeta$

Wäre $a \star b = b$, so würde (da b invertierbar) folgen, dass $a = e$ $\not\zeta$

Also gilt $a \star b = e$. Völlig analog zeigt man $b \star a = e$. Also ist $a^{-1} = b$.

Betrachten wir jetzt $a \star a$.

Wäre $a \star a = e$, so wäre $a = a^{-1} = b$ $\not\zeta$

Wäre $a \star a = a$, so wäre $a = e$ $\not\zeta$

Also gilt $a \star a = b$. Völlig analog zeigt man $b \star b = a$. Also:

\star	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

- (b) Laut Aufgabe 2 auf Blatt 17 gilt $x^{\text{ord}(x)} = e$, wobei $\text{ord}(x) = |H(x)|$. Laut Aufgabe 6 auf Blatt 19 ist $|H(x)|$ ein Teiler von $|G| = n$. Also gilt $\text{ord}(x) \cdot k = n$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Daher

$$x^n = x^{\text{ord}(x) \cdot k} = (x^{\text{ord}(x)})^k = e^k = e.$$

- (c) Da 101 eine Primzahl ist, ist $R_{101} = \{0, \dots, 100\}$ ein Körper. Also ist $G := R_{101} \setminus \{0\}$ eine Gruppe bezüglich der Multiplikation $x \cdot_{101} y = xy \bmod 101$. Diese Gruppe hat $n = 100$ Elemente und das neutrale Element 1. Also gilt $x^{100} \bmod 101 = 1$ für alle $x \in G$, insbesondere für $x = 99$.

4. (a) Ist A durch elementare Zeilenumformungen in I_n überführbar, so gibt es eine invertierbare Matrix $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit

$$\begin{aligned} U^{-1} \cdot | \quad UA &= I_n \\ A &= U^{-1} \quad | \cdot U \\ AU &= I_n. \end{aligned}$$

Also ist A invertierbar (mit $A^{-1} = U$).

Zu jedem $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gibt es laut Satz 6.7 invertierbare Matrizen $U, V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit

$$UAV = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ist A invertierbar, so folgt

$$U = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^{-1} A^{-1}.$$

Daran sieht man, dass die letzten $n - r$ Zeilen von U Nullzeilen sind. Da U invertierbar ist, folgt $n = r$. Also $UAV = I_n$ und somit $UA = V^{-1}$ und daher $VUA = I_n$. Da VU ein Produkt elementarer Zeilenumformungsmatrizen ist, kann man A durch elementare Zeilenumformungen in I_n überführen.

(b)

$$\begin{array}{l} \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 9 & 1 & -4 & 0 & 1 & 0 & 5 & -3 \end{array} \rightarrow \\ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 6 & -5 & 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & -5/2 & 1/2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \rightarrow \\ \begin{array}{ccc|ccc} -2 & 5/2 & -1/2 & 1 & 1 & 0 & -3 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3/2 & 1/2 & 0 & 1 & 0 & 1 & -3/2 & 1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -5/2 & 1/2 & 0 & 0 & 1 & 3 & -5/2 & 1/2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \end{array}$$

Also ist

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 4 & -1 \\ 1 & -3/2 & 1/2 \\ 3 & -5/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

(c) Um $P = E_1 \dots E_k$ zu schreiben, wobei E_j Spaltenvertauschungsmatrizen sind, muss man I_4 durch Spaltenvertauschungen in P überführen. Das geht z. B. so: erst Vertauschung $1 \leftrightarrow 4$, dann Vertauschung $2 \leftrightarrow 4$, dann Vertauschung $3 \leftrightarrow 4$. Also

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

5. (a) Reflexiv: Es gilt $A = I_m A I_n$.

Symmetrisch: Ist $A \sim B$, also $B = UAV$, so ist $U^{-1}BV^{-1} = A$. Da die Inverse einer invertierbaren Matrix invertierbar ist, folgt $B \sim A$.

Transitiv: Ist $A \sim B$ und $B \sim C$, also $B = UAV$ und $C = U_1 B V_1$, so folgt $C = U_1 U A V V_1$. Da das Produkt invertierbarer Matrizen invertierbar ist, folgt $A \sim C$.

(b) Laut Satz 6.7 gibt es zu jedem $A \in K^{m \times n}$ invertierbare Matrizen U, V mit

$$B = UAV = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Also gibt es zu jedem A ein B von dieser Gestalt mit $A \sim B$. Dies beweist, dass zwei Matrizen A_1, A_2 mit demselben Rang r äquivalent sein müssen, denn es gilt dann $A_1 \sim \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \sim A_2$. Also gibt es höchstens so viele Äquivalenzklassen wie mögliche Werte von r . Da $0 \leq r \leq \min\{m, n\}$, gilt somit $|K^{m \times n} / \sim| \leq \min\{m, n\} + 1$.

6. Es gilt: $(1, 1) \prec (2, 1) \prec (3, 1) \prec \dots \prec (1, 2) \prec (2, 2) \prec (3, 2) \prec \dots$

(a) Sei M eine nichtleere Teilmenge von \mathbb{N}^2 und

$$N = \{n \mid \exists m : (m, n) \in M\}.$$

Dann ist N eine nichtleere Teilmenge von \mathbb{N} . Diese besitzt laut Wohlordnungssatz ein kleinstes Element, etwa n^* . Da $n^* \in N$ ist

$$P = \{m \mid (m, n^*) \in M\}$$

eine nichtleere Teilmenge von \mathbb{N} . Diese besitzt ein kleinstes Element, etwa m^* . Dann ist $(m^*, n^*) \in M$ das bezüglich \preceq kleinste Element von M , denn für jedes $(p, q) \in M$ gilt $q \in N$ und somit $n^* \leq q$. Falls $n^* = q$, so ist $p \in P$ und somit $m^* \leq p$. Also gilt $(m^*, n^*) \preceq (p, q)$.

(b) Nicht notwendig: Das obige Beispiel ist eine Wohlordnung, aber

$$\{(m, n) \in \mathbb{N}^2 \mid (m, n) \prec (1, 2)\} = \{(m, 1) \mid m \in \mathbb{N}\}$$

ist nicht endlich.

Hinreichend: Wenn jedes Element $x \in M$ nur endlich viele "Vorgänger" (also $y \in M$ mit $y \prec x$) hat, kann man keine unendliche strikt absteigende Folge $x_1 \succ x_2 \succ x_3 \succ \dots$ von Elementen von M bilden.