Wurzelgitter und Spiegelungsgruppen

Vortrag zum Seminar Gitter und Codes, 11.04.2011

Sascha Düerkop

§ 1 Einführung

(1.1) Definition (Gitter)
Sei $E = (V, (,))$ ein euklidischer Vektorraum.

(i) Eine Teilmenge $L \subset V$ heißt *Gitter*, falls es ein linear unabhängiges Tupel $B = (b_1, \dots, b_m) \in V^m$ gibt, mit

$$L = \langle b_1, \dots, b_m \rangle_{\mathbb{Z}} = \{\sum_{i=1}^{m} a_i b_i | a_i \in \mathbb{Z}\}.$$

B heißt dann eine *Gitterbasis* von L und $m = \dim(L)$ die *Dimension* von L. L heißt *volles Gitter* in E, falls $\dim(L) = \dim(V)$, also wenn B eine Basis von V ist.

(ii) Ist $B \in V^m$ eine Gitterbasis von L und $\mathcal{G}(B) := ((b_i, b_j)) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ die Grammatrix von B, so heißt

$$\det(L) := \det(\mathcal{G}(B))$$

die *Determinante* des Gitters L. $\mathcal{G}(B)$ nennt man auch eine *Grammatrix von L*. ◇

Definition und Lemma
Sei L ein volles Gitter in $E = (V, (,))$ mit Gitterbasis B. Dann ist

$$L^\# := \{v \in V | (v, l) \in \mathbb{Z} \text{ für alle } l \in L\}$$

auch ein volles Gitter in E. Man nennt $L^\#$ das zu L *duale Gitter*. Die Dualbasis $B^* = (b_1^*, \dots b_n^*)$ von B ist eine Gitterbasis von $L^\#$.
Es gilt $\mathcal{G}(B)\mathcal{G}(B^*) = I_n$ und $\det(L^\#)\det(L) = 1$.
Ist $L \subset L^\#$, so nennt man das Gitter L *ganz*.
Die Faktorgruppe $L^\#/L$ ist dann eine endliche abelsche Gruppe der Ordnung $\det(L)$. Es gilt $B^*\mathcal{G}(B) \in L^n$ und $\mathcal{G}(B)$ ist eine Relationenmatrix von $L^\#/L$. Sind $(d_1, \dots, d_n)$ die Invariantenteiler von $\mathcal{G}(B)$, so ist $L^\#/L \cong \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/d_n\mathbb{Z}$. □

§ 2 Wurzelgitter

(2.1) Definition

(i) Ein ganzes Gitter L heißt *Wurzelgitter*, falls $L = \langle \{l \in L | (l, l) = 2\} \rangle_{\mathbb{Z}}$.

(ii) $L_{=2} := R(L) := \{l \in L | (l, l) = 2\}$ heißt die Menge der *Wurzeln* in L.

(iii) Eine Teilmenge $S \subset R(L)$ heißt *Fundamentalsystem von Wurzeln*, falls

(a) S ist Gitterbasis von L.

(b) Jede Wurzel $\beta \in R(L)$ lässt sich schreiben als

$$\beta = \sum_{\alpha \in S} k_\alpha \alpha \text{ mit allen } k_\alpha \geq 0 \text{ oder allen } k_\alpha \leq 0.$$

◇

(2.2) Satz (Witt)
Ist L ein Wurzelgitter, so hat L eine Gitterbasis $B = (b_1, \dots, b_n)$ mit $(b_i, b_i) = 2$ und $(b_i, b_j) \in \{0, -1\}$ für $1 \leq i \neq j \leq n$.
Jedes Fundamentalsystem von Wurzeln liefert eine solche Gitterbasis. ◇

— *Klassifikation von Wurzelgittern* —

(2.3) Definition

1. Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Dann ist

$$\mathcal{O}(V) := \{\phi \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V) | (x, y) = (\phi(x), \phi(y)) \forall x, y \in V\}$$

die *orthogonale Gruppe* von V.

2. Sei L ein Gitter in V. Dann ist die *Automorphismengruppe* von L definiert als:

$$\mathrm{Aut}(L) := \{\phi \in \mathcal{O}(V) | \phi(L) = L\}$$

3. Seien L und L' volle Gitter in E. Dann heißen L und L' *isometrisch* falls es ein $g \in \mathcal{O}(E)$ mit $Lg = L'$ gibt. ◇

(2.4) Definition (Coxeter-Dynkin-Graph)
Zu jedem Fundamentalsystem von Wurzeln $\{b_1, \dots, b_n\}$ sei der *Coxeter-Dynkin-Graph* folgendermaßen definiert:
Jedes Basiselement b_i bildet einen Knoten und die Kanten zwischen zwei Knoten seien durch die folgende Regel definiert für $i \neq j$:

$$(b_i, b_j) = -1 \Leftrightarrow b_i \text{———————} b_j$$

$$(b_i, b_j) = 0 \Leftrightarrow b_i \qquad\qquad\qquad b_j$$

◇

(2.5) Definition (orthogonale Summe)

(i) Für zwei Gitter L_1, L_2 in den Vektorräumen V_1 bzw. V_2 bezeichnet $L_1 \perp L_2$ die (äußere) orthogonale Summe.
Dies ist ein Gitter in $V_1 \oplus V_2$ der Dimension $\dim(L_1) + \dim(L_2)$.
Sind $B = \{b_1, \dots b_{n_1}\}$ und $C = \{c_1, \dots c_{n_1}\}$ Gitterbasen von L_1 bzw. L_2, so ist $B' := \{(b_1, 0), \dots, (b_{n_1}, 0), (0, c_1), \dots, (0, c_{n_2})\}$ eine Gitterbasis von $L_1 \perp L_2$ mit Grammatrix

$$\mathcal{G}(B') = \begin{pmatrix} \mathcal{G}(B) & 0 \\ 0 & \mathcal{G}(C) \end{pmatrix}$$

(ii) Sind L_1, L_2 Gitter in V und $(l_1, l_2) = 0$ für alle $l_i \in L_i$, so heißt $L := L_1 \perp L_2 := \langle L_1, L_2 \rangle$ die (innere) orthogonale Summe.

(iii) Ein Gitter L heißt irreduzibel oder orthogonal unzerlegbar, falls L nicht orthogonale Summe echter Teilgitter ist. ◇

(2.6) Satz
Jedes Wurzelgitter ist bis auf Isometrie eine orthogonale Summe der Wurzelgitter $\mathbb{A}_n$, $\mathbb{D}_n$ $(n \geq 4)$, $\mathbb{E}_6$, $\mathbb{E}_7$, $\mathbb{E}_8$. ◇

Beweis
vgl. Ebeling Theorem 1.2 (Seite 22) □

Gitter L	$\lvert R(L)\rvert$	$\det(L)$	$L^\#/L$	Dimension n
$\mathbb{A}_n$	$n(n+1)$	$n+1$	$\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$	≥ 1
$\mathbb{D}_n$	$2n(n-1)$	4	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$	≥ 4, ungerade
$\mathbb{D}_n$	$2n(n-1)$	4	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	≥ 4, gerade
$\mathbb{E}_6$	72	3	$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$	6
$\mathbb{E}_7$	126	2	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	7
$\mathbb{E}_8$	240	1	1	8

§ 3 Spiegelungsgruppen

—— *Weyl-Gruppe* ——

(3.1) Definition (Spiegelung und Weyl-Gruppe)
Sei L ein Wurzelgitter in V und sei $l \in L$ eine Wurzel.

(i) Die *Spiegelung* entlang l wird mit σ_l bezeichnet und ist für alle $v \in V$ wie folgt definiert:

$$v\sigma_l := v - 2\frac{(v,l)}{(l,l)} l = v - (v,l)l$$

Dies ist eine orthogonale Abbildung, die L festlässt, d.h. es gilt $\sigma_l \in \mathrm{Aut}(L)$.

(ii) Die Gruppe

$$W(L) := \langle \sigma_l | l \in R(L) \rangle \leq \mathrm{Aut}(L)$$

heißt *Weyl-Gruppe* von L. Da für alle Spiegelungen stets $g^{-1}\sigma_l g = \sigma_{gl}$ gilt, ist die Weyl-Gruppe sogar ein Normalteiler von $\mathrm{Aut}(L)$. ◇

(3.2) Satz
Sei L ein Wurzelgitter und $W(L)$ seine Weyl-Gruppe.
L ist genau dann irreduzibel wenn jeder $W(L)$-invariante Teilraum $U \leq V$ entweder der Nullvektorraum oder ganz V ist. ◇

(3.3) Lemma
Sei L ein irreduzibles Wurzelgitter. Dann operiert die Weyl-Gruppe $W(L)$ von L transitiv auf den Wurzeln von L, also auf $R(L)$.
Das bedeutet, dass es für je zwei Wurzeln $\alpha, \beta \in R(L)$ ein $g \in W(L)$ gibt, so dass $\alpha g = \beta$ gilt. ◇

(3.4) Satz
Sei $L \subset \mathbb{R}^n$ ein irreduzibles Wurzelgitter. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) L enthält n paarweise orthogonale Wurzeln.

(ii) $n\mathbb{A}_1 = \mathbb{A}_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{A}_1 \subset L$.

(iii) $-\mathrm{id} \in W(L)$.

(iv) $2L^\# \subset L$.

(v) L ist bis auf Isometrie $\mathbb{A}_1, \mathbb{D}_n$ ($n \geq 4$, n gerade), $\mathbb{E}_7$, $\mathbb{E}_8$. ◇