Stark Perfekte Gitter und Sphärische Designs

Vortrag zum Seminar Gitter und Codes, 20.06.2011

Nina Neidhardt und Jan Rosendahl

Wir untersuchen die Eigenschaften von stark perfekten Gittern im Allgemeinen und klassifizieren im Anschluß daran die stark perfekten Wurzelgitter, sowie exemplarisch die stark perfekten Gitter der Dimension 7.

§1 Gitter vom minimalen Typ

(1.1) Satz
Sei $\mathcal{X} = -\mathcal{X} \subset S^{n-1}$. Dann gilt

$$\sum_{x,y\in\mathcal{X}} (x,y)^{2\ell} \geq \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2\ell-1)}{n(n+2)(n+4)\cdots(n+2\ell-2)}|\mathcal{X}|^2$$

für alle $\ell \in \mathbb{N}$ mit Gleichheit, genau dann wenn $\mathcal{X}$ ein sphärisches $(2\ell+1)$-design ist. $\diamond$

(1.2) Bemerkung
Ein Gitter L von Minimum m ist stark perfekt, genau dann wenn für alle $\alpha \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\sum_{x\in S(L)} (x,\alpha)^4 = \frac{3|S(L)|}{n(n+2)}m^2(\alpha,\alpha)^2$$

Außerdem gilt für alle stark perfekten Gitter:

$$\sum_{x\in S(L)} (x,\alpha)^2 = \frac{|S(L)|}{n}m(\alpha,\alpha).$$

(1.3) Folgerung
Setzt man $\alpha = \xi_1\alpha_1 + \xi_2\alpha_2$ in die erste Gleichung in (1.2) ein, so ergibt sich durch Koeffizientenvergleich (bei $\xi_1\xi_2$)

$$\sum_{x\in S(L)} (x,\alpha_1)^2(x,\alpha_2)^2 = \frac{m^2|S(L)|}{n(n+2)}(2(\alpha_1,\alpha_2)^2 + (\alpha_1,\alpha_1)(\alpha_2,\alpha_2)).$$

(1.4) Satz
Stark perfekte Gitter sind irreduzibel. $\diamond$

(1.5) Satz
Sei L ein stark perfektes Gitter der Dimension n. Dann ist $\min(L)\min(L^\#) \geq \frac{n+2}{3}$. $\diamond$

(1.6) Definition
Ein stark perfektes Gitter, bei dem Gleichheit gilt in Satz (1.5) heißt *vom minimalem Typ*. $\diamond$

(1.7) Bemerkung
Ein stark perfektes Gitter L ist vom minimalen Typ, genau dann wenn für alle $\alpha \in S(L^\#)$ und alle $x \in S(L)$ gilt, dass $(x, \alpha) \in \{0, \pm 1\}$.

§ 2 Stark perfekte Wurzelgitter

(2.1) Erinnerung
Jedes Wurzelgitter ist bis auf Isometrie eine orthogonale Summe der Wurzelgitter $\mathbb{A}_n, \mathbb{D}_m$ $(m \geq 4), \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8$.[1] $\diamond$

(2.2) Bemerkung
Sei L ein volles Gitter, dann gilt

a) $(L^\#)^\# = L$

b) $\mathrm{Aut}(L^\#) = \mathrm{Aut}(L)$ $\diamond$

(2.3) Bemerkung
Stark perfekte Wurzelgitter $\neq \mathbb{E}_8$ sind vom minimalen Typ.

(2.4) Satz
Ist $G = \mathrm{Aut}(L)$ absolut irreduzibel, so ist L stark eutaktisch. $\diamond$

(2.5) Folgerung
Irreduzible Wurzelgitter sind stark eutaktisch. $\diamond$

(2.6) Erinnerung
Sei L ein irreduzibles Wurzelgitter der Dimension n und $s := |R(L)| = |S(L)|$. Dann heißt $h := s/n$ die *Coxeter-Zahl* von L.
Für $r \in R(L)$ bezeichne

$$n_0 := |\{x \in R(L) \mid (x, r) = 0\}| \text{ und}$$
$$n_1 := |\{x \in R(L) \mid (x, r) = 1\}|. \qquad \diamond$$

[1] (2.6) im Vortrag *Wurzelgitter und Spielgelungsgruppen* von Sascha Düerkop vom 11. April 2011

(2.7) Bemerkung
Die Coxeter-Zahlen der irreduziblen Wurzelgitter sind $h(\mathbb{A}_n) = n+1$, $h(\mathbb{D}_n) = 2(n-1)$, $h(\mathbb{E}_6) = 12$, $h(\mathbb{E}_7) = 18$ und $h(\mathbb{E}_8) = 30$.

	h	s	n_0	n_1	$t-$Design
$\mathbb{A}_1$	2	2	0	0	$t \leq \infty$
$\mathbb{A}_2$	3	6	0	2	$t \leq 5$
$\mathbb{A}_n (n \geq 3)$	$n+1$	$n(n+1)$	$(n-1)(n-2)$	$2(n-1)$	$t \leq 3$
$\mathbb{D}_4$	6	24	6	8	$t \leq 5$
$\mathbb{D}_n (n \geq 5)$	$2(n-1)$	$2n(n-1)$	$2(n^2-5n+7)$	$4(n-2)$	$t \leq 3$
$\mathbb{E}_6$	12	72	30	20	$t \leq 5$
$\mathbb{E}_7$	18	126	60	32	$t \leq 5$
$\mathbb{E}_8$	30	240	126	56	$t \leq 7$

(2.8) Satz
Mit den Bezeichungen aus Definition (2.6) gilt:
(a) n_0 und n_1 sind unabhängig von der Wahl von $r \in R(L)$.
(b) Für jedes $\alpha \in \mathbb{R}^n$ ist

$$\sum_{x \in R(L)} (x, \alpha)^2 = 2h(\alpha, \alpha).$$

(c) $n_0 + 2n_1 = s - 2$.
(d) $n_1 = 2h - 4$.
(e) $n_0 = s - 2 - 2n_1 = hn - 2 - 4h + 8 = h(n-4) + 6$. ◇

(2.9) Satz
Sei L ein stark perfektes Wurzelgitter. Dann ist L isometrisch zu $\mathbb{A}_1$, $\mathbb{A}_2$, $\mathbb{D}_4$, $\mathbb{E}_6$, $\mathbb{E}_7$, oder $\mathbb{E}_8$. ◇

§ 3 Klassifikation stark perfekter Gitter

(3.1) Bemerkung
Sei $\alpha \in \mathbb{R}^n$, L ein stark perfektes Gitter, $S(L) = X \dot{\cup} -X$ die Menge seiner kürzesten Vektoren, $L \leq \mathbb{R}^n$ mit $\min(L) = m$ und $s := |X|$ die halbe Kusszahl von L. Definiere folgende Funktionen:

$$G_1(\alpha) = \frac{sm}{n}(\alpha, \alpha)$$

und

$$G_2(\alpha) = \frac{3sm^2}{n(n+2)}(\alpha, \alpha)^2$$

Für zwei $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^n$ betrachte folgende Funktion:

$$G_3(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{sm^2}{n(n+2)}(2(\alpha_1, \alpha_2)^2 + (\alpha_1, \alpha_1)(\alpha_2, \alpha_2))$$

Dann gilt für $\alpha \in L^\#$ dass $G_1(\alpha)$, $G_2(\alpha)$, $G_3(\alpha_1, \alpha_2)$ und
$C_\alpha := \frac{1}{12}(G_2(\alpha) - G_1(\alpha)) = \frac{sm}{12n(n+2)}(\alpha, \alpha) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

(3.2) Folgerung
Die stark perfekten Gitter der Dimension ≤ 8 sind vertreten durch
$\mathbb{Z}$, $\mathbb{A}_2$, $\mathbb{D}_4$, $\mathbb{E}_6$, $\mathbb{E}_6^\#$, $\mathbb{E}_7$, $\mathbb{E}_7^\#$ und $\mathbb{E}_8$.

§ 4 Die Klassifikation der stark perfekten Gitter der Dimension 7

(4.1) Satz
Sei L ein stark perfektes Gitter in Dimension 7. Dann ist L von minimalem Typ d.h. $\min(L)\min(L^\#) = 3$. ◇

(4.2) Satz
Sei L ein stark perfektes Gitter in Dimension 7. Dann ist L ähnlich zu $\mathbb{E}_7$ oder $\mathbb{E}_7^\#$. ◇