Klassifikation gerader unimodularer Gitter in Dimension 24

Vortrag zum Gitter und Codes, 23. Mai 2011

Carmen Stein

§ 1 Wurzelsysteme in geraden unimodularen Gittern

(1.1) Definition
Zu einem irreduziblen Wurzelgitter $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ definieren wir die *Coxeter Zahl*

$$h := \frac{|R(\Gamma)|}{n}$$

als die Anzahl der Wurzeln in Γ durch die Dimension n.

(1.2) Bemerkung
Sei $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ ein gerades unimodulares Gitter und P ein Polynom mit sphärischen Koeffizienten in n Varibalen mit $\deg(P) = r$. Dann ist $\vartheta_{\Gamma,P}$ eine Modulform vom Gewicht $\frac{n}{2} + r$ und eine Spitzenform, falls $r > 0$ gilt.

(1.3) Lemma
Sei $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ ein gerades unimodulares Gitter und $n \in \{8, 16, 24\}$. Dann gilt für ein fixes $y \in \mathbb{R}^n$

$$\sum_{x\in\Gamma:x^2=2r} (x \cdot y)^2 - \left(\sum_{x\in\Gamma:x^2=2r} x^2 \right) \frac{y^2}{n} = 0.$$

Insbesondere gilt die folgende Gleichung für die Wurzeln in Γ:

$$\sum_{x\in\Gamma_2} (x \cdot y)^2 = \frac{2}{n} |\Gamma_2| \cdot y^2. \qquad (1)$$

(1.4) Folgerung
Sei $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ ein gerades unimodulares Gitter und $n \in \{8, 16, 24\}$. Dann gilt für das Wurzelsystem Γ_2 entweder $\Gamma_2 = \emptyset$ oder $\langle \Gamma_2 \rangle = \mathbb{R}^n$.

Es bezeichne von nun an $(\Gamma_2)_\mathbb{Z}$ das von Γ_2 aufgespannte Wurzelgitter.

(1.5) Folgerung
Sei $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ ein gerades unimodulares Gitter und $n = 8, 16, 24$. Dann haben alle irreduziblen Komponenten des Wurzelgitters $(\Gamma_2)_\mathbb{Z}$ dieselbe Coxeter Zahl, nämlich $h = \frac{1}{n}|\Gamma_2|$.

(1.6) Lemma
Sei $\Gamma \subset \mathbb{R}^{24}$. Ist $\Gamma_2 \neq \emptyset$, so besitzt das Wurzelsystem Γ_2 in $\mathbb{R}^{24}$ die folgenden Eigenschaften:

(i) $\operatorname{rang}(\Gamma_2) = 24$,

(ii) alle irreduziblen Komponenten von Γ_2 haben dieselbe Coxeter Zahl h,

(iii) $|\Gamma_2| = 24h$.

(1.7) Beispiel
Für $n = 8$ gilt $(\Gamma_2)_{\mathbb{Z}} = \mathbb{E}_8$ und $\mathbb{E}_8$ ist das einzige gerade unimodulare Gitter in $\mathbb{R}^8$ (Ebeling Proposition(2.5)).
Für $n = 16$ und $\Gamma \subset \mathbb{R}^{16}$ ist ϑ_Γ eine Modulform vom Gewicht 8. Da $M = \mathbb{C}[E_4, E_6]$ gilt, ist $\vartheta_\Gamma = E_4^2$. Folglich ist $|\Gamma_2| = 480$ und die Coxeter Zahl ist $h = 30$. Es gilt $\langle \Gamma_2 \rangle = \mathbb{R}^{16}$ also

$$(\Gamma_2)_{\mathbb{Z}} = \mathbb{E}_8 + \mathbb{E}_8 \text{ oder } (\Gamma_2)_{\mathbb{Z}} = \mathbb{D}_{16}.$$

Dies sind die beiden einzigen Möglichkeiten in $\mathbb{R}^{16}$.

(1.8) Lemma
Sei Γ_2 ein Wurzelsystem in $\mathbb{R}^{24}$. Γ_2 erfülle die Bedingungen (i) - (iii) in (2.5), dann ist Γ_2 isomorph zu einem der folgenden 23 Wurzelsysteme:
$24\mathbb{A}_1, 12\mathbb{A}_2, 8\mathbb{A}_3, 6\mathbb{A}_4, 4\mathbb{A}_6, 3\mathbb{A}_8, 2\mathbb{A}_{12}, \mathbb{A}_{24}, 6\mathbb{D}_4, 4\mathbb{D}_6, 3\mathbb{D}_8, 2\mathbb{D}_{12}, \mathbb{D}_{24}, 4\mathbb{E}_6, 3\mathbb{E}_8, 4\mathbb{A}_5+\mathbb{D}_4, 2\mathbb{A}_7+2\mathbb{D}_5, 2\mathbb{A}_9 + \mathbb{D}_6, \mathbb{A}_{15} + \mathbb{D}_9, \mathbb{E}_8 + \mathbb{D}_{16}, 2\mathbb{E}_7 + \mathbb{D}_{10}, \mathbb{E}_7 + \mathbb{A}_{17}, \mathbb{E}_6 + \mathbb{D}_7 + \mathbb{A}_{11}$

(1.9) Folgerung
Sei $\Gamma \subset \mathbb{R}^{24}$ ein gerades unimodulares Gitter. Dann gilt entweder $\Gamma_2 = \emptyset$ oder Γ_2 ist eines der 23 in (1.8) aufgelisteten Wurzelsysteme.

§ 2 Gitter mit Wurzelsystemen von maximalem Rang

Wir ordnen jedem irreduziblen Wurzelsystem $\Gamma_2 \neq \mathbb{E}_8$ ein Tripel $(T(\Gamma_2) = (\Gamma_2)_{\mathbb{Z}}^{\#}/(\Gamma_2)_{\mathbb{Z}}, G(\Gamma_2) = Aut(\Gamma_2)/W(\Gamma_2), l_{\Gamma_2}(x) = \min\{y^2 : y \in \Gamma_2^{\#}, \overline{y} = x \in T(\Gamma_2)\})$ zu, wobei $G(\Gamma_2)$ auf $T(\Gamma_2)$ operiert und l_{Γ_2} eine $\mathbb{R}$-wertige, $G(\Gamma_2)$-invariante Längenfunktion auf $T(\Gamma_2)$ ist. Im Einzelnen ist dieses Tripel wie folgt definiert:

Γ_2	$T(\Gamma_2)$	$G(\Gamma_2)$	l_{Γ_2}
$\mathbb{A}_i$	$\mathbb{Z}/(i+1)\mathbb{Z}$	$i=1: \ 1$ $i>1: \ C_2$	$l(k)=k(i+1-k)/(i+1)$
$\mathbb{D}_j, j \geq 4$	$j \equiv_2 0: \ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ $j \equiv_2 1: \ \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$	$j=4: \ S_3$ $j \geq 5: \ C_2$	$l(d_0)=0$ $l(d_1)=l(d_3)=j/4$ $l(d_2)=1$
$\mathbb{E}_6$	$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$	C_2	$l(0)=0$ $l(1)=l(2)=4/3$
$\mathbb{E}_7$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	1	$l(0)=0$ $l(1)=3/2$
$n\Gamma_2$	$T(\Gamma_2)^n$	$G(\Gamma_2)^n \rtimes S_n$	$l(x_1,...,x_n)=\sum_{i=1}^n l(x_i)$
$\sum n_i R_i$	$T(\Gamma_2)=\bigoplus_i T(n_i R_i)$	$G(\Gamma_2)=\prod_i G(n_i R_i)$	$l=\sum_i l_{n_i R_i}$

(2.1) Definition
Eine Untergruppe $A < T(\Gamma_2)$ nennen wir *gerade und selbstdual*, falls $|A|^2 = |T(\Gamma_2)|$ gilt und l_{Γ_2} nur gerade ganze Werte > 2 auf $A - \{0\}$ annimmt. Solche Untergruppen nennen wir auch Codes.

(2.2) Lemma
Sei Γ_2 ein Wurzelsystem von Rang n. Dann gibt es eine Bijektion zwischen Klassen gerader unimodularer n-dimensionaler Gitter (bis auf Isomorphie) mit einem zu Γ_2 isomorphen Wurzelsystem und den Bahnen gerader, selbstdualer Untergruppen $A < T(\Gamma_2)$ unter $G(\Gamma_2)$.

(2.3) Beispiel
Sei $\Gamma_2 = n\mathbb{A}_1$. Dann ist $T(\Gamma_2) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n = \mathbb{F}_2^n$ und $G(\Gamma_2)$ ist isomorph zu S_n. l ist in diesem Fall gegeben durch $l(x) = l(x_1, ..., x_n) = \frac{1}{2}wt(x)$, wobei $wt(x)$ das Hamminggewicht bezeichne. Eine gerade, selbstduale Untergruppe ist ein binärer, selbstdualer, doppelt gerader Code mit Minimalabstand ≥ 8. Demnach ist das Problem gerade, unimodulare n-dimensionale Gitter mit Wurzelsystem $n\mathbb{A}_1$ zu klassifizieren äquivalent zu dem Problem solche Codes zu klassifizieren.

(2.4) Beispiel
Sei $\Gamma_2 = n\mathbb{A}_2$. In diesem Fall gilt $T(\Gamma_2) = \mathbb{F}_3^n, G(\Gamma_2) = C_2^n \rtimes S_n, l(x) = \frac{2}{3} \cdot |\{x_i : x_i \neq 0\}|$. Wie oben ist das Problem $2n$-dimensionale Gitter mit Wurzelsystem $n\mathbb{A}_2$ zu klassifizieren äquivalent zu dem Problem ternäre, selbstduale Codes mit Minimalabstand > 3 zu klassifizieren.

§ 3 Die Klassifikation der geraden unimodularen Gitter in Dimension 24

(3.1) Satz

Bis auf Isomorphie gibt es genau 24 gerade, unimodulare Gitter in $\mathbb{R}^{24}$. Jedes dieser Gitter ist eindeutig durch sein Wurzelsystem bestimmt, wobei die möglichen Wurzelsysteme in (1.9) aufgelistet sind.