1. Übung Algebraische Zahlentheorie II

Prof. Dr. Nebe **(WS 11/12)**

Aufgabe 1. (Die Brauergruppe der reellen Zahlen.)
(a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Br}(\mathbb{R}) \cong C_2$.
(b) Bestimmen Sie die Signatur der Spurbilinearform von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ und von $\mathbb{H}$ (den Hamilton Quaternionen).
(c) Entwerfen Sie einen Algorithmus, der den Isomorphietyp einer in ihrer regulären Darstellung gegebenen halbeinfachen $\mathbb{R}$-Algebra A bestimmt.
(d)* Implementieren Sie (c) in einem Computeralgebra-System.

Aufgabe 2. (Zerfällungskörper) Sei D eine K-Divisionsalgebra und L eine maximal kommutative Teilalgebra von D. Zeigen Sie
(a) $K \leq Z(D) \leq L$, $L = C_D(L)$ und L ist ein Körper.
(b) $L \otimes_{Z(D)} D \cong L^{n\times n}$ wobei n der Index von D als zentral einfache $Z(D)$-Algebra ist.
(c) Sei $D = \langle 1, i, j, k\rangle_{\mathbb{Q}}$ mit $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $k = ij$. Zeigen Sie dass D eine Divisionsalgebra ist und bestimmen Sie einen expliziten Isomorphismus wie in (b) für $L = \mathbb{Q}[i]$.
(d) Sei D wie in (c). Bestimmen Sie ein $a \in D^*$ mit $aia^{-1} = j$.
(e) Ist $D \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p$ eine Divisionsalgebra für $p = 2, 3, 5$?

Aufgabe 3. (Divisionsalgebren über p-adischen Zahlen)
Sei p eine Primzahl, $z \in \overline{\mathbb{Q}}_p$ ein primitive (p^2-1)-te Einheitswurzel und

$$Z := \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^p \end{pmatrix},\ P := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{pmatrix}$$

Sei weiter $A = \langle I_2, Z, P, ZP\rangle_{\mathbb{Q}_p} \leq \mathbb{Q}_p[z]^{2\times 2}$.
(a) Zeigen Sie, dass A eine $\mathbb{Q}_p$-Divisionsalgebra ist.
(b) Bestimmen Sie einen expliziten Isomorphismus $\mathbb{Q}_p[z] \otimes_{\mathbb{Q}_p} A \to \mathbb{Q}_p[z]^{2\times 2}$.
(c) Zeigen Sie, dass jede quadratische Erweiterung von $\mathbb{Q}_p$ ein maximaler Teilkörper von A ist.

Abgabe: Freitag, den 14.10.2011, in der Vorlesung 10:00 Uhr im Hörsaal III.