# 4. Übung Algebraische Zahlentheorie II

**Prof. Dr. Nebe** **(WS 11/12)**

**Zyklische Algebren.** Sei $\mathrm{Gal}(L/K) = \langle \sigma \rangle$ zyklisch der Ordnung $n > 1$,

$$A := (L/K, \sigma, a) := \bigoplus_{j=0}^{n-1} u^j L, xu = ux^\sigma, u^n = a \in L^*.$$

**Aufgabe 10.** Sei $g : G \times G \to L^*$ ein normalisiertes Faktorensystem. Dann ist $(L/K, g) \cong (L/K, \sigma, a)$ wobei $a = \prod_{j=0}^{n-1} g_{\sigma,\sigma^j} \in K^*$.
Folgern Sie, dass $H^2(G, L^*) \cong K^*/N_{L/K}(L^*)$. Der Exponent von $H^2(G, L^*)$ teilt also insbesondere die Ordnung von $G$.

**Aufgabe 11.** Seien $a, b \in K^*$.
(a) $(L/K, \sigma, a) \cong (L/K, \sigma^s, a^s)$ für alle $s \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{ggT}(s, n) = 1$.
(b) $(L/K, \sigma, 1) \cong K^{n \times n}$.
(c) $(L/K, \sigma, a) \cong (L/K, \sigma, b) \Leftrightarrow b = N_{L/K}(c)a$ für ein $c \in L^*$.
(d) $(L/K, \sigma, a) \otimes_K (L/K, \sigma, b) \cong (L/K, \sigma, ab)^{n \times n}$.
(e) Jedes $[A] \in \mathrm{Br}(L/K)$ hat eine Ordnung, die $n$ teilt.

**Aufgabe 12.**
(a) Sei $E/K$ weitere Körpererweiterung, $F := E \cap L$, $G = \langle \sigma \rangle = \mathrm{Gal}(L/K)$, $H := \langle \sigma^k \rangle = \mathrm{Gal}(L/F) = \mathrm{Gal}(EL/E)$.
Dann ist $E \otimes_K (L/K, \sigma, a) \cong (EL/E, \sigma^k, a)$.
(b) Sei $E \underbrace{\supseteq}_{r} L \underbrace{\supseteq}_{s} K$, $G = \mathrm{Gal}(E/K) = \langle \sigma \rangle$, $H = \mathrm{Gal}(E/L) = \langle \sigma^r \rangle$, $\overline{G} = \mathrm{Gal}(L/K) = \langle \sigma H = \overline{\sigma} \rangle = G/H$.
Für alle $a \in K^*$ ist $(L/K, \overline{\sigma}, a) \sim (E/K, \sigma, a^r)$.

**Abgabe:** Freitag, den 4.11.2011, in der Vorlesung 10:00 Uhr im Hörsaal III.