$$\mathcal{C}(\rho) = \langle m_r, d_\phi, h_{e,u_e,v_e} \mid r \in R^*, \phi \in \Phi, e = u_e v_e \text{ sym Id} \rangle$$

$\uparrow$ proj. Darst

$$\mathcal{U}(R,\Phi) = \langle \underbrace{P(R,\Phi)}_{R^* \ltimes \Phi}, H_{e,u_e,v_e} \mid e = u_e v_e \text{ sym Id} \rangle$$

$\mathcal{C}(\rho)$:

$\pi(\mathcal{U}(R,\Phi)) \leq GL_2(R)$

$\operatorname{Ker}(\lambda) \times \operatorname{Ker}(\lambda) \leq \Phi \times \Phi$ (abelsch)

$S \leq \mathbb{C}^* \cdot id$

<u>Satz</u> (Nebe, Rains, Sloane)

R endl. direktes Produkt von Matrixringen über Kettenringen $\Rightarrow$

$$\operatorname{Inv}(\mathcal{C}(\rho)) = \langle cwe(C) \mid C \text{ vom Typ } \rho \rangle_{\mathbb{C}\text{-VR}}$$

<u>Bew:</u> "$\supseteq$" Klar wegen MacWilliams Identitäten

"$\subseteq$" 100 Seiten Beweis, daher das Buch

volle Gewichtszähler und Tensorinvarianten

- $C \subseteq V^N$, $\mathrm{fwe}(C) = \sum_{c \in C} b_{c_1 \cdots c_N} \in \mathbb{C}[V^N]$
- $\mathbb{C}[V^N] \cong \bigotimes^N \mathbb{C}[V]$
  $b_{v_1 \cdots v_N} \mapsto b_{v_1} \otimes b_{v_2} \otimes \cdots \otimes b_{v_N}$
- $\mathrm{fwe}(C) \in \bigotimes^N \mathbb{C}[V]$
- $\mathrm{cwe}(C) = \sum_{c \in C} x_{c_1} \cdots x_{c_N} \in \mathbb{C}[x_v \mid v \in V]_{\text{homoge Grad } N}$

Hauptsatz für volle Gewichtszähler

$\boxed{\text{Vor. wie in Satz}}$

$$\mathrm{Inv}_N(\mathcal{C}(\rho)) := \{ x \in \bigotimes^N \mathbb{C}[V] \mid gx = x \ \forall g \in \mathcal{C}(\rho) \}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Inv}_N(\mathcal{C}(\rho)) = \langle \mathrm{fwe}(C) \mid C \leq V^N \text{ von Typ } \rho \rangle_{\mathbb{C}\text{-VR}}$$

<u>Bew:</u> "$\supseteq$" wg MacWilliams

"$\subseteq$" etwas länger $\rightsquigarrow$ Buch

<u>Strategie:</u>
- cwe folgt aus fwe durch Symmetrisierung ($\rightarrow$ später)
- $P(\rho) = \langle m_r, d_\phi \mid r \in R^*, \phi \in \Phi \rangle \cong P(R, \Phi) = R^* \times \Phi$
  $\mathrm{Inv}(P(\rho))$ und $\mathrm{Inv}_N(P(\rho))$ leicht.
- Dann "Operation" von $\mathcal{H}$ hereinive betrachte $P(\rho) \trianglelefteq \mathcal{C}(\rho)$. Hier brauchen wir Kettenringe

7a

7) Die Invarianten von $\mathcal{C}(\rho)$ (R Frobenius-Form-ring)

$$P(\rho) := \langle m_r, d_\phi \mid r \in R^*, \phi \in \Phi \rangle$$

$$m_r \cdot b_v = b_{r\cdot v}, \quad d_\phi\, b_v = \exp(2\pi i \phi(v))\, b_v$$

(7.1) Def: $C \leq V$ Code (R-Teilmodul)

(i) $\mu_C := \sum_{\{v \in V \mid Rv = C\}} b_v$ ($=0$ falls $C \neq Rv$ für alle $v \in V$)

(ii) $p_C := \mathrm{fwe}(C) = \sum_{v \in C} b_v$

Basis

(7.2) Satz: $\mathrm{Inv}_N(P(\rho)) = \langle \mu_C \mid C \leq V^N,\ C = Rv$ für ein $v \in V^N$, $\rho^N_\Phi(\phi)(v) = 0 \rangle$

Bew: $P(\rho) = D \rtimes M$, $D = \langle d_\phi \rangle_\phi$, $M = \langle m_r \mid r \in R^* \rangle$

permutation

$\mathrm{Inv}_N(D) = \langle b_v \mid v \in V^N$ isotrop $\rangle$

$\mathrm{Inv}_N(M) = \langle \underbrace{\sum_{r \in R^*} b_{rv}}_{= \mu_{Rv}} \mid v \in V^N \rangle$

$\mathrm{Inv}_N(P(\rho)) = \langle \mu_C \mid C \leq V^N$ isotrop $\rangle$

(*) etwas überlegen

Allgemeines Prinzip fwe $\to$ cwe

(7.3) Lemma: G, H endl. Gruppen W ein $\mathbb{C}(G\times H)$-Modul

M_G, M_H einfache $\mathbb{C}G$ bzw $\mathbb{C}H$-Moduln

$W(M_G) = \langle V \leq_{\mathbb{C}G} W \mid V \cong M_G \rangle$ homogene

$W(M_H) = \langle V \leq_{\mathbb{C}H} W \mid V \cong M_H \rangle$ Komponente

Dann ist $W(M_G)$ ein $\mathbb{C}H$-Modul und

$\big(W(M_G)\big)(M_H) = W(M_G) \cap W(M_H) = W(M_H)(M_G)$

Anwendung: $G = \mathcal{P}(N_\rho)$, $N_\rho = (V^N, \rho_M^N, \rho_\Phi^N, \beta^N)$

$H = S_N$ op. auf $\mathbb{C}[V^N]$ durch

$$(b_{v_1 \cdots v_N})^\pi = b_{v_{\pi(1)} \cdots v_{\pi(N)}}$$

$M_H = \mathbb{C} =$ triv. S_N-Modul

$\Rightarrow W(M_H) \cong \mathbb{C}[V]_N = \{ p \in \mathbb{C}[x_v \mid v \in V]$

p homogen von Grad $N\}$

$$\frac{1}{N!} \sum_{\pi \in S_N} b_{v_{\pi(1)} \cdots v_{\pi(N)}} \mapsto x_{v_1} \cdots x_{v_N}$$

$M_G = \mathbb{C} =$ triv. $\mathcal{P}(N_\rho)$-Modul

$W(M_G) = \mathrm{Inv}_N(\mathcal{P}(\rho))$

$W(M_H)(M_G) = \mathrm{Inv}(\mathcal{P}(\rho))_{\text{homog., Grad } N}$

$W(M_G)(M_H) =$ Symmetrisierung von $\mathrm{Inv}_N(\mathcal{P}(\rho))$

$=$ Sym. von $\langle \mathrm{fwe}(C) \mid C \leq V^N \text{ isotrop} \rangle$

$= \langle \mathrm{cwe}(C) \mid C \leq V^N \text{ isotrop} \rangle$

Sei ab jetzt R_0 ein endlicher Kettenring (7c)

$R = R_0^{m \times m}$ .. (Ideale von R_0 bilden Kette, keine Idempot. außer 1)

(7.4) Satz (ohne Beweis)

$(R, \Phi) = (R, M, \psi, \Phi)$ Formring $\Rightarrow \exists\, M_0, \psi_0, \Phi_0$ so dass

- $(R, M, \psi, \Phi) \cong \mathrm{Mat}_m(R_0, M_0, \psi_0, \Phi_0)$
- ρ Darst. von $(R, \Phi) \Rightarrow \rho \cong \rho_0 \otimes (R_0^m)^*$

  $V \cong V_0 \otimes (R_0^m)^* = V_0^m$
- $C \leq V$ Code $\Rightarrow C = C_0(m) = C_0 \otimes (R_0^m)^*$
- $\mathrm{Inv}(P(\rho)) = \langle p_{C_0(m)} \mid C_0 < V_0 \text{ isotrop} \rangle$
- $e = \mathrm{diag}(1, 0 \ldots 0) \in R$ prim. Idempotent ($\Rightarrow e^2 = e$)

  $h := h_{e,e,e}$ und $\mathcal{C}(\rho) = \langle P(\rho), h \rangle$

(7.5) Lemma: $X_p := \frac{1}{|P(\rho)|} \sum_{g \in P(\rho)} g$

Für jede selbstorth. isotrope Code $C_0 \leq V_0$ gilt

$$X_p(h(p_{C_0(m)})) = \sum_{\substack{C' \leq C_0^\perp \\ \exists x \in V_0,\ C' = \langle C_0, x \rangle}} n_{C'}\, p_{C'(m)}$$

mit $n_{C_0} = 1 \iff C_0 = C_0^\perp$

Bew: $h : p_{C_0(m)} \mapsto p_{\underbrace{C_0^\perp \times C_0(m-1)}_{\supseteq C_0(m)}}$

jedes Element von $P(\rho)$ läßt $p_{C_0(m)}$ fest

daher Übergang zu $\rho/_{C_0}$ OE $C_0 = \{0\}$.

7d

$$h \cdot p_{O(m)} = |V_0|^{-1/2} \, p_{V_0 \times O(m-1)}$$

$$X_p(h \cdot p_{O(m)}) = |V_0|^{-1/2} \cdot |R^*|^{-1} \, |\Phi_0|^{-1} \cdot$$

$$\sum_{v \in V_0} \underbrace{\sum_{\phi_0 \in \Phi_0} \exp(2\pi i \, \phi_0(v))}_{= \begin{cases} 0 & \text{falls } v \text{ nicht isotrop} \\ |\Phi_0| & \text{falls } v \text{ isotrop} \end{cases}} \sum_{u \in R^*} b_{u \cdot (v,0,\dots,0)}$$

$$= \sum_{\substack{v \in V_0 \\ v \text{ isotrop}}} |V_0|^{-1/2} \, |R^*|^{-1} \sum_{u \in R^*} b_{u(v,0,\dots,0)}$$

$$= \sum_{\substack{\text{isotrope } D \leq V \\ \exists x \in V_0,\, D = \langle (x,0,\dots,0) \rangle}} n_D' \, \mu_D = \boxed{+}$$

wo für $D = \langle (x,0,\dots,0) \rangle_R$

$$n_D' = |V_0|^{-1/2} \, |R^*|^{-1} \cdot |\mathrm{Stab}_{R^*}((v,0,\dots,0))|$$

Insbes. gilt $n_0' = |V_0|^{-1/2}$

$D \neq \{0\} \Rightarrow D$ hat eind. max. Teilmodul $D' = \langle (x_0,0,\dots,0) \rangle_R$
$\uparrow$
R_0 = Kettenring und es gilt $\mu_D = p_D - p_{D'}$

Also ist

$$\boxed{+} = \sum_{\substack{C' \leq V \\ C' \text{ isotrop} \\ \exists x \in V_0 \text{ mit } C' = \langle (x,0,\dots,0) \rangle}} n_{C'} \cdot p_{C'}$$

wo $n_{C'} = n_{C'}' - \sum_{D \in \mathcal{F}_{C'}} n_D'$ ~~wo D über die~~

$\mathcal{F}_{C'} = \{ D = \langle (x,0,\dots,0) \rangle_R \mid x \in V_0, \text{ isotrop}, C' \underset{max}{<} D \}$

$\Rightarrow \quad n_0 \leq n_0' = |V_0|^{-1/2} < 1$ außer wenn
$|V_0| = 1 \Rightarrow \{0\} = \{0\}^\perp$.

~~Klar: $P_{C(m)} \in \mathrm{Inv}(\mathcal{C}(g)) \Leftrightarrow (X_p \cdot h) P_{C(m)} = P_{C(m)}$~~ 70

$p = \sum a_C P_{C(m)} \in \mathrm{Inv}(\mathcal{C}(g)) \Rightarrow (X_p \cdot h) \cdot p = p$

7.6 Lemma: W sei $\mathbb{C}$-VR, A lineare Abb auf W, $(P, \leq)$ partiell geordnete Menge, $W = \langle w_p \mid p \in P \rangle$
Erz. syst, nicht notw. Basis

so daß $A \cdot w_p = \sum_{q \geq p} c_{pq} w_q \quad , c_{pq} \in \mathbb{C}$.

Weiter gelte $c_{pp} = 1 \Leftrightarrow p$ maximal in P

$\Rightarrow \quad W^A = \{ w \in W \mid Aw = A \} = \langle w_p \mid p \text{ max. in } P \rangle$

Bew: Sei $\leq'$ eine lineare Forts. von $\leq$ so daß die max. Elemente von $\leq$ auch bzgl. $\leq'$ größer sind als alle nicht max. Elemente von $(P, \leq)$.

~~und sei p_0 das $\leq'$ minimale~~

Ziel: ~~Mache die $(w_p \mid p \in P)$ l.u.~~ Streiche w_p bis Basis übrigbleibt.

Sei $\sum_p a_p w_p = 0$ lineare Abhängigkeit

sei p_0 das $\leq'$ minimale Element mit $a_{p_0} \neq 0$

$\Rightarrow w_{p_0}$ = Linearkomb. von größere $\Rightarrow w_{p_0}$ kann man weglassen

Weitermachen, bis Basis übrigbleibt.

Ein maximales p_0 (bzgl $\leq$) wird nur dann weggelassen, wenn w_{p_0} Linearkomb. anderer max. w_p's ist.

Ändern dadurch $\langle w_p \mid p \text{ max bzgl. } \leq \rangle$ nicht.

Also OE $(w_p \mid p \in P)$ l.u.

Dann gilt $\chi_A = \prod_{p \in P} (t - c_{pp})$

alg. Vielfachheit des Eigenwert 1 = Anzahl der max. $p \in (P, \leq)$

$= \dim (\underbrace{\langle w_p \mid p \text{ max. in } (P, \leq) \rangle}_{\leq W^A}) \leq \dim (W^A)$

$\lrcorner$

(7.7) Hauptsatz $R = R_0^{m \times m}$ R_0 endl. Kettenring.

$$\mathrm{Inv}_N(\mathcal{C}(\rho)) = \langle p_C \mid C = C^\perp \leq V^N \text{ isotrop} \rangle$$

$$\mathrm{Inv}(\mathcal{C}(\rho)) = \bigoplus_{N=0}^{\infty} \langle \mathrm{cwe}(C) \mid C = C^\perp \leq V^N \text{ isotrop} \rangle$$

(7.8) Bem: $R = R_0^{m \times m} \oplus S_0^{\ell \times \ell}$, $e = (1,0)$

$$\Rightarrow \mathcal{C}(\rho) = \mathcal{C}(e\rho) \otimes \mathcal{C}((1-e)\rho)$$

$$= \mathcal{C}(R_0^{m \times m}) \otimes \mathcal{C}(S_0^{\ell \times \ell})$$

liefert Hauptsatz auch für ~~direkt~~ direkte Summe von Matrixringe.