

4. Übung Codes und Invariantentheorie

Prof. Dr. G. Nebe

(WS 22/23)

Aufgabe 7. (Der Satz von Krull-Schmidt.)

Definitionen Sei R ein Ring und M ein R -Modul.

- (i) M heißt *irreduzibel*, falls M und $\{0\}$ die einzigen R -Teilmoduln von M sind.
- (ii) M heißt *unzerlegbar*, falls M nicht als direkte Summe echter Teilmoduln geschrieben werden kann.
- (iii) Eine *Kompositionsreihe* von M ist eine endliche aufsteigende Folge von Teilmoduln
$$0 = M_0 < M_1 < \dots < M_n = M$$
so daß M_i/M_{i-1} irreduzible R -Moduln sind.

(iv) R heißt *Artinsch*, falls R als R -Modul eine Kompositionsreihe hat.

(v) R heißt *lokal*, falls R nur ein maximales Linksideal hat.

Sei jetzt R ein Artinscher Ring und M ein endlich erzeugter R -Modul und $E := \text{End}_R(M)$. Zeigen Sie

- (0) Sei A ein lokaler Ring und m das maximale Linksideal von A . Dann ist m ein zweiseitiges Ideal von A und $A^* = A \setminus m$.
- (i) M hat eine Kompositionsreihe.
- (ii) Für jedes $f \in E$ gibt es ein $n \in \mathbf{N}$ so daß $M = \text{Bild}(f^n) \oplus \text{Kern}(f^n)$.
- (iii) Ist M unzerlegbar, so ist E ein lokaler Ring.
- (iv) (Krull-Schmidt) Sei

$$M = \bigoplus_{i=1}^m M_i = \bigoplus_{j=1}^n N_j$$

eine Zerlegung von M in unzerlegbare R -Moduln $\neq 0$. Dann gilt $m = n$ und nach geeigneter Umnummerierung $M_i \cong N_i$ für alle i .