7. Übung Codes und Invariantentheorie

Prof. Dr. G. Nebe **(WS 22/23)**

Aufgabe 12. Sei $q = p^f$ eine Primzahlpotenz und $R := \mathbf{F}_{q^2} + \mathbf{F}_{q^2}u$ mit $u^2 = 0$ und $ua = a^q u$ für alle $a \in \mathbf{F}_{q^2}$.
(Diesen Ring erhält man, wenn man die Quaternionendivisionsalgebra $\mathcal{Q}$ über der unverzweigten Erweiterung von $\mathbf{Q}_p$ vom Grad f modulo p betrachtet, $R = \mathcal{Q}/p\mathcal{Q}$.)
Zeigen Sie

(1) $\mathrm{rad}(R) = uR$ ist das einzige echte (Links-)Ideal in R und $\mathrm{rad}(R)^2 = 0$.

(2) Die Abbildung $^{-} : R \to R, \overline{a+bu} := a^q - bu$ für $a, b \in \mathbf{F}_{q^2}$ definiert eine Involution auf R.

(3) Die standard Hermitesche Form $(,) : R^N \times R^N \to R$, $(x,y) := \sum_{i=1}^{N} x_i \overline{y_i}$ ist nicht singulär.

(4) Bestimmen Sie einen selbstdualen Code $C = C^{\perp} \leq (R, (,))$.

(5) Bestimmen Sie einen Form Ring (R, M, ψ, Φ) und eine endliche Darstellung ρ, so daß die selbstdualen isotropen Codes vom Typ ρ genau die bzgl. $(,)$ selbstdualen Codes sind.

(6) $\mathcal{U}(R, \Phi) \cong (\mathbf{F}_{q^2} \oplus \mathbf{F}_q \oplus \mathbf{F}_q) \rtimes O_2^+(\mathbf{F}_q)$.

(7) Sei ab jetzt $q^2 = 4$: Bestimmen Sie explizite Erzeuger von $\mathcal{U}(R, \Phi)$.

(8) Bestimmen Sie $\mathcal{C}(\rho) \leq GL_{16}(\mathbf{C})$.

(9) Die Rechtsmultiplikation mit $\omega \in R \setminus \mathbf{F}_2 \oplus \mathbf{F}_4 u$ vertauscht mit der Operation von $\mathcal{C}(\rho)$ auf $\mathbf{C}[R]$. Bestimmen Sie die Bahnen von ω auf R, sowie den Fixraum $F_1 := \mathbf{C}[R]^{\omega}$ sowie die Operation $\mathcal{C}^{(6)}(\rho)$ von $\mathcal{C}(\rho)$ auf F_1.

(10) Sei $M_r(R^*)$ die durch die Rechtsmultiplikation mit Elementen von R^* erzeugte Untergruppe von $\mathrm{GL}(\mathbf{C}[R])$. Dann vertauscht $M_r(R^*)$ mit $\mathcal{C}(\rho)$. Bestimmen Sie den Fixraum $F_2 := \mathbf{C}[R]^{M_r(R^*)}$ sowie die Operation $\mathcal{C}^{(3)}(\rho)$ von $\mathcal{C}(\rho)$ auf F_2.