Ganzzahlige orthogonale Darstellungen der zyklischen Gruppe I

S.Höppner/T.Rosnau

TU Dortmund

29. September 2011

Inhalt

Untersuchung von $\mathbb{Z}$-Gittern

Ausgehend von seiner Automorphismengruppe untersuche ein gegebenes $\mathbb{Z}$-Gitter mit Hilfe von Darstellungen der zyklischen Gruppe von Primzahlordnung. Dies ermöglicht es, das Gitter als Modul über dem Gruppenring der zyklischen Gruppe zu betrachten.

Untersuchung von $\mathbb{Z}$-Gittern

Ausgehend von seiner Automorphismengruppe untersuche ein gegebenes $\mathbb{Z}$-Gitter mit Hilfe von Darstellungen der zyklischen Gruppe von Primzahlordnung. Dies ermöglicht es, das Gitter als Modul über dem Gruppenring der zyklischen Gruppe zu betrachten.

Verwende die Klassifikation der Moduln des Gruppenrings der zyklischen Gruppe, um zu bestimmen, welche Modulstrukturen in konkreten Beispielen auftreten können.

Notation

Es sei

- L ein $\mathbb{Z}$-Gitter in dem $\mathbb{Q}$-Vektorraum $V := \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Q}} L$,
- b eine symmetrische, positiv definite Bilinearform auf V,

Notation

Es sei

- L ein $\mathbb{Z}$-Gitter in dem $\mathbb{Q}$-Vektorraum $V := \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Q}} L$,
- b eine symmetrische, positiv definite Bilinearform auf V,
- $G = \langle g \rangle$ die von g erzeugte zyklische Gruppe von Primzahlordnung $p = \mathrm{ord}(g)$,
- $\varphi : G \to \mathrm{GL}(V)$ eine Darstellung von G.

Notation

Es sei

- L ein $\mathbb{Z}$-Gitter in dem $\mathbb{Q}$-Vektorraum $V := \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Q}} L$,
- b eine symmetrische, positiv definite Bilinearform auf V,
- $G = \langle g \rangle$ die von g erzeugte zyklische Gruppe von Primzahlordnung $p = \mathrm{ord}(g)$,
- $\varphi : G \to \mathrm{GL}(V)$ eine Darstellung von G. Wir nennen φ
  - **ganzzahlig**, wenn L invariant unter dem Bild von φ ist. Im Fall der zyklischen Gruppe reicht es, $\varphi(g)(L) \subseteq L$ zu verlangen.
  - **orthogonal**, wenn $b(x, y) = b(\varphi(g)(x), \varphi(g)(y))$ für alle $x, y \in V$ gilt.
  - **treu**, wenn φ injektiv ist. Insbesondere werden dann Elementordnungen erhalten.

Im Folgenden habe φ diese Eigenschaften.

Notation

- $\text{Gen}_{\mathbb{Z}}(L) := \{N\ \mathbb{Z}\text{-Gitter} \mid N_p \cong_{\mathbb{Z}_p} L_p\ \forall p \in \mathfrak{P} \cup \infty\}$ heißt das $\mathbb{Z}$-Geschlecht von L.

Notation

- $\mathrm{Gen}_{\mathbb{Z}}(L) := \{N\ \mathbb{Z}\text{-Gitter} \mid N_p \cong_{\mathbb{Z}_p} L_p\ \forall p \in \mathfrak{P} \cup \infty\}$ heißt das $\mathbb{Z}$-Geschlecht von L.
- $\mathrm{sGen}_{\mathbb{Z}G}(L) := \{N\ \mathbb{Z}G\text{-Gitter} \mid N_p \cong_{\mathbb{Z}_p} L_p\ \forall p \in \mathfrak{P} \cup \infty \text{ und } N \simeq_{\mathbb{Z}G} L\}$ heißt das schwache $\mathbb{Z}G$-Geschlecht von L.

Notation

- $\mathrm{Gen}_{\mathbb{Z}}(L) := \{N\ \mathbb{Z}\text{-Gitter} \mid N_p \cong_{\mathbb{Z}_p} L_p\ \forall p \in \mathfrak{P} \cup \infty\}$ heißt das $\mathbb{Z}$-Geschlecht von L.
- $\mathrm{sGen}_{\mathbb{Z}G}(L) := \{N\ \mathbb{Z}G\text{-Gitter} \mid N_p \cong_{\mathbb{Z}_p} L_p\ \forall p \in \mathfrak{P} \cup \infty \text{ und } N \simeq_{\mathbb{Z}G} L\}$ heißt das schwache $\mathbb{Z}G$-Geschlecht von L.
- $\mathrm{Gen}_{\mathbb{Z}G}(L) := \{N\ \mathbb{Z}G\text{-Gitter} \mid N_p \cong_{\mathbb{Z}_pG} L_p\ \forall p \in \mathfrak{P} \cup \infty\}$ heißt das $\mathbb{Z}G$-Geschlecht von L.

Notation

- $\mathrm{Gen}_{\mathbb{Z}}(L) := \{N\ \mathbb{Z}\text{-Gitter} \mid N_p \cong_{\mathbb{Z}_p} L_p\ \forall p \in \mathfrak{P} \cup \infty\}$ heißt das $\mathbb{Z}$-Geschlecht von L.
- $\mathrm{sGen}_{\mathbb{Z}G}(L) := \{N\ \mathbb{Z}G\text{-Gitter} \mid N_p \cong_{\mathbb{Z}_p} L_p\ \forall p \in \mathfrak{P} \cup \infty \text{ und } N \simeq_{\mathbb{Z}G} L\}$ heißt das schwache $\mathbb{Z}G$-Geschlecht von L.
- $\mathrm{Gen}_{\mathbb{Z}G}(L) := \{N\ \mathbb{Z}G\text{-Gitter} \mid N_p \cong_{\mathbb{Z}_pG} L_p\ \forall p \in \mathfrak{P} \cup \infty\}$ heißt das $\mathbb{Z}G$-Geschlecht von L.

Ein schwaches Geschlecht kann also in mehrere $\mathbb{Z}G$-Geschlechter zerfallen.

L als $\mathbb{Z}G$-Gitter

Es sei $\mathbb{Z}G$ der Gruppenring von G über $\mathbb{Z}$. Jeder Darstellung φ entspricht eine $\mathbb{Z}G$-Modulstruktur von L vermöge

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}G \times L &\longrightarrow L \\ \left(\sum_{i=0}^{p-1} z_i g^i, v\right) &\longmapsto \sum_{i=0}^{p-1} z_i \varphi(g)^i(v). \end{aligned}$$

L als $\mathbb{Z}G$-Gitter

Es sei $\mathbb{Z}G$ der Gruppenring von G über $\mathbb{Z}$. Jeder Darstellung φ entspricht eine $\mathbb{Z}G$-Modulstruktur von L vermöge

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}G \times L &\longrightarrow L \\ \left(\sum_{i=0}^{p-1} z_i g^i, v\right) &\longmapsto \sum_{i=0}^{p-1} z_i \varphi(g)^i(v). \end{aligned}$$

Durch

$$h(x,y) := \sum_{i=0}^{p-1} b(\varphi(g)^{-i}(x), y) g^i$$

wird L zu einem hermiteschen $\mathbb{Z}G$-Gitter bezüglich der Involution $g \mapsto g^{-1}$. Umgekehrt gilt

$$b(x,y) = \mathrm{Tr}(h(x,y)).$$

L als $\mathbb{Z}G$-Gitter

Durch diese Formeln ist eine natürliche Äquivalenz zwischen der Kategorie der hermiteschen $\mathbb{Z}G$-Gitter und der Unterkategorie der $\varphi(g)$-invarianten Gitter in der Kategorie aller $\mathbb{Z}$-Gitter gegeben.

L als $\mathbb{Z}G$-Gitter

Durch diese Formeln ist eine natürliche Äquivalenz zwischen der Kategorie der hermiteschen $\mathbb{Z}G$-Gitter und der Unterkategorie der $\varphi(g)$-invarianten Gitter in der Kategorie aller $\mathbb{Z}$-Gitter gegeben.

Falls für zwei Darstellungen ein $a \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}}(L)$ existiert, so dass $\psi(g) = a\varphi(g)a^{-1}$ gilt, so induziert a einen Isomorphismus der zugehörigen $\mathbb{Z}G$-Moduln L_φ und L_ψ. Dieser ist sogar eine Isometrie der $\mathbb{Z}G$-Gitter.

L als $\mathbb{Z}G$-Gitter

Durch diese Formeln ist eine natürliche Äquivalenz zwischen der Kategorie der hermiteschen $\mathbb{Z}G$-Gitter und der Unterkategorie der $\varphi(g)$-invarianten Gitter in der Kategorie aller $\mathbb{Z}$-Gitter gegeben.

Falls für zwei Darstellungen ein $a \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}}(L)$ existiert, so dass $\psi(g) = a\varphi(g)a^{-1}$ gilt, so induziert a einen Isomorphismus der zugehörigen $\mathbb{Z}G$-Moduln L_φ und L_ψ. Dieser ist sogar eine Isometrie der $\mathbb{Z}G$-Gitter.

Umgekehrt impliziert $\mathbb{Z}G$-Isometrie von L_φ und L_ψ, dass $\varphi(g)$ und $\psi(g)$ in derselben Konjugationsklasse von $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}}(L)$ liegen.

Automorphismengruppen

Satz

Für die Automorphismengruppen der betrachteten Gitter gilt

$$\mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}G}(L_\varphi, h) = Z_{\mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}}(L,b)}(\varphi(g)).$$

Automorphismengruppen

Beweis.

Sei zunächst $f \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}G}(L_\varphi, h)$. Dann ist f insbesondere ein $\mathbb{Z}$-Modul-Isomorphismus von L und für $x, y \in L$ gilt

$$\sum_{i=0}^{p-1} b(\varphi(g)^{-i}(f(x)), f(y))g^i = h(f(x), f(y))$$

$$= h(x, y) = \sum_{i=0}^{p-1} b(\varphi(g)^{-i}(x), y)g^i,$$

Automorphismengruppen

Beweis.

Sei zunächst $f \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}G}(L_\varphi, h)$. Dann ist f insbesondere ein $\mathbb{Z}$-Modul-Isomorphismus von L und für $x, y \in L$ gilt

$$\sum_{i=0}^{p-1} b(\varphi(g)^{-i}(f(x)), f(y))g^i = h(f(x), f(y))$$

$$= h(x, y) = \sum_{i=0}^{p-1} b(\varphi(g)^{-i}(x), y)g^i,$$

woraus mit Koeffizientenvergleich für $i = 0$

$$b(f(x), f(y)) = b(x, y) \text{ folgt, also } f \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}}(L, b).$$

Automorphismengruppen

Fortsetzung des Beweises.

Da f ein $\mathbb{Z}G$-Modul-Homomorphismus ist, gilt weiterhin für alle $x \in L$

$$(f\varphi(g))(x) = f(g \cdot x) = g \cdot f(x) = (\varphi(g)f)(x).$$

Automorphismengruppen

Fortsetzung des Beweises.

Da f ein $\mathbb{Z}G$-Modul-Homomorphismus ist, gilt weiterhin für alle $x \in L$

$$(f\varphi(g))(x) = f(g \cdot x) = g \cdot f(x) = (\varphi(g)f)(x).$$

Sei nun umgekehrt $f \in Z_{\mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}}(L,b)}(\varphi(g))$ vorausgesetzt. Es gilt wieder

$$f(g \cdot x) = (f\varphi(g))(x) = (\varphi(g)f)(x) = g \cdot f(x),$$

f ist also sogar ein $\mathbb{Z}G$-Modul-Homomorphismus.

Automorphismengruppen

Fortsetzung des Beweises.

Wir nutzen die b-Invarianz von f um für alle $i = 0, \ldots, p-1$

$$\begin{aligned} b(\varphi(g)^{-i}(x), y) &= b(f(\varphi(g)^{-i}(x)), f(y)) \\ &= b(\varphi(g)^{-i} f(x), f(y)) \end{aligned}$$

abzuleiten, also die h-Invarianz von f, womit $f \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}G}(L_\varphi, h)$ bewiesen ist. $\square$

Klassifikation der $\mathbb{Z}G$-Moduln

Satz (Diederichsen)

Es sei nun p eine Primzahl für die $h(\mathbb{Q}(\zeta_p)) = 1$ gilt. (Etwa $p \leq 19$.) Für jeden $\mathbb{Z}G$-Modul L gibt es $n_g, n_\zeta, n_1 \in \mathbb{N}_0$, so dass

$$L \;\cong\; n_g \cdot \mathbb{Z}G \;\oplus\; n_\zeta \cdot \mathbb{Z}[\zeta] \;\oplus\; n_1 \cdot \mathbb{Z}$$

gilt. L ist durch $\left(n_g, n_\zeta, n_1\right)$ eindeutig bestimmt.

Klassifikation der $\mathbb{Z}G$-Moduln

Satz (Diederichsen)

Es sei nun p eine Primzahl für die $h(\mathbb{Q}(\zeta_p)) = 1$ gilt. (Etwa $p \leq 19$.) Für jeden $\mathbb{Z}G$-Modul L gibt es $n_g, n_\zeta, n_1 \in \mathbb{N}_0$, so dass

$$L \cong n_g \cdot \mathbb{Z}G \oplus n_\zeta \cdot \mathbb{Z}[\zeta] \oplus n_1 \cdot \mathbb{Z}$$

gilt. L ist durch (n_g, n_ζ, n_1) eindeutig bestimmt.

Bemerkung

Ausgangspunkt beim Beweis des Satzes ist die Zerlegung von V in zwei g-invariante Räume: $\mathrm{Ker}(g-1)$ und $\mathrm{Ker}(s)$, wobei $s = g^{p-1} + \ldots + p + 1$ das p-te Kreisteilungspolynom in g ist. Dies basiert auf den irreduziblen Faktoren des Polynoms $X^p - 1$.

Klassifikation der $\mathbb{Z}G$-Moduln

Korollar

Für die Dimension von L als $\mathbb{Z}$-Modul folgt aus der Zerlegung

$$\operatorname{rang}_{\mathbb{Z}} L = n_g p + n_\zeta (p-1) + n_1 ,$$

und damit im nichttrivialen Fall die bekannte Tatsache $p \leq \operatorname{rang}_{\mathbb{Z}} L + 1$.

Klassifikation der $\mathbb{Z}G$-Moduln

Korollar

Für die Dimension von L als $\mathbb{Z}$-Modul folgt aus der Zerlegung

$$\operatorname{rang}_{\mathbb{Z}} L = n_g p + n_\zeta (p-1) + n_1,$$

und damit im nichttrivialen Fall die bekannte Tatsache $p \leq \operatorname{rang}_{\mathbb{Z}} L + 1$.

Definition

Ein $\mathbb{Z}G$-Modul L heißt einfach, wenn er keinen nichttrivialen $\mathbb{Z}G$-Untermodul kleineren Ranges besitzt.

Klassifikation der $\mathbb{Z}G$-Moduln

Korollar

Für die Dimension von L als $\mathbb{Z}$-Modul folgt aus der Zerlegung

$$\operatorname{rang}_{\mathbb{Z}} L = n_g p + n_\zeta (p-1) + n_1 ,$$

und damit im nichttrivialen Fall die bekannte Tatsache $p \leq \operatorname{rang}_{\mathbb{Z}} L + 1$.

Definition

Ein $\mathbb{Z}G$-Modul L heißt einfach, wenn er keinen nichttrivialen $\mathbb{Z}G$-Untermodul kleineren Ranges besitzt.

Satz

Sei L ein $\mathbb{Z}G$- Modul. Dann gilt:
L einfach als $\mathbb{Z}G$-Modul $\Longleftrightarrow$ $L \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}$ als $\mathbb{Q}G$-Modul einfach.

Klassifikation der $\mathbb{Z}G$-Moduln

- $\mathbb{Z}$ wird durch $g \cdot z := z$ zu einem $\mathbb{Z}G$-Modul.

Klassifikation der $\mathbb{Z}G$-Moduln

- $\mathbb{Z}$ wird durch $g \cdot z := z$ zu einem $\mathbb{Z}G$-Modul.
- $\mathbb{Z}[\zeta]$ wird durch $g \cdot z := \zeta \cdot z$ zu einem $\mathbb{Z}G$-Modul.

Klassifikation der $\mathbb{Z}G$-Moduln

- $\mathbb{Z}$ wird durch $g \cdot z := z$ zu einem $\mathbb{Z}G$-Modul.
- $\mathbb{Z}[\zeta]$ wird durch $g \cdot z := \zeta \cdot z$ zu einem $\mathbb{Z}G$-Modul.
- $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}[\zeta]$ sind einfach und damit unzerlegbar.

Klassifikation der $\mathbb{Z}G$-Moduln

- $\mathbb{Z}$ wird durch $g \cdot z := z$ zu einem $\mathbb{Z}G$-Modul.
- $\mathbb{Z}[\zeta]$ wird durch $g \cdot z := \zeta \cdot z$ zu einem $\mathbb{Z}G$-Modul.
- $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}[\zeta]$ sind einfach und damit unzerlegbar.
- Wegen $\mathrm{rang}_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z}G = 1$ ist $\mathbb{Z}G$ ebenfalls unzerlegbar, und wegen $\mathbb{Q}G \cong \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}[\zeta]$ nicht einfach.

Mögliche $\mathbb{Z}G$-Modulstrukturen von D_{16}

Ziel: Bestimmung aller orthogonalen Darstellungen von Gruppen mit Primzahlordnung in $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}}(D_{16})$.

- Bestimmung der Konjugationsklassen von $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}}(D_{16})$.

Mögliche $\mathbb{Z}G$-Modulstrukturen von D_{16}

Ziel: Bestimmung aller orthogonalen Darstellungen von Gruppen mit Primzahlordnung in $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}}(D_{16})$.

- Bestimmung der Konjugationsklassen von $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}}(D_{16})$.
- Man wähle aus jeder Klasse von Automorphismen mit Primzahlordnung einen Vertreter.
- Sei nun exemplarisch $g \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}}(D_{16})$ mit $\mathrm{ord}(g) = 3$.

Mögliche $\mathbb{Z}G$-Modulstrukturen von D_{16}

$$g := \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

Mögliche $\mathbb{Z}G$-Modulstrukturen von D_{16}

$$s := id + g + g^2 = \begin{pmatrix}
3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3
\end{pmatrix}$$

Mögliche $\mathbb{Z}G$-Modulstrukturen von D_{16}

$$M_s := \{m \in M \mid s(m) = 0\} =< \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} >$$

Mögliche $\mathbb{Z}G$-Modulstrukturen von D_{16}

Wegen $\mathbb{Z}G/(s) \cong \mathbb{Z}[\zeta]$ erhält man durch $\zeta \cdot m := gm, m \in M_s$ eine $\mathbb{Z}[\zeta]$ -Modulstruktur auf M_s.

$n_g = \text{rang}_{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}(g - id)M/(\zeta - id)M_s = 1$

Mögliche $\mathbb{Z}G$-Modulstrukturen von D_{16}

Wegen $\mathbb{Z}G/(s) \cong \mathbb{Z}[\zeta]$ erhält man durch $\zeta \cdot m := gm, m \in M_s$ eine $\mathbb{Z}[\zeta]$ -Modulstruktur auf M_s.

$n_g = \text{rang}_{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}(g - id)M/(\zeta - id)M_s = 1$

$n_1 = \text{rang}_{\mathbb{Z}}\, M/M_s - n_g = 14 - 1 = 13$

Mögliche $\mathbb{Z}G$-Modulstrukturen von D_{16}

Wegen $\mathbb{Z}G/(s) \cong \mathbb{Z}[\zeta]$ erhält man durch $\zeta \cdot m := gm, m \in M_s$ eine $\mathbb{Z}[\zeta]$ - Modulstruktur auf M_s.

$n_g = \mathrm{rang}_{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}(g - id)M/(\zeta - id)M_s = 1$

$n_1 = \mathrm{rang}_{\mathbb{Z}}\, M/M_s - n_g = 14 - 1 = 13$

$n_\zeta = \mathrm{rang}_{\mathbb{Z}[\zeta]}\, M_s$

Mögliche $\mathbb{Z}G$-Modulstrukturen von D_{16}

Wegen $\mathbb{Z}G/(s) \cong \mathbb{Z}[\zeta]$ erhält man durch $\zeta \cdot m := gm, m \in M_s$ eine $\mathbb{Z}[\zeta]$ -Modulstruktur auf M_s.

$n_g = \mathrm{rang}_{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}(g - id)M/(\zeta - id)M_s = 1$

$n_1 = \mathrm{rang}_{\mathbb{Z}}\, M/M_s - n_g = 14 - 1 = 13$

$n_\zeta = \mathrm{rang}_{\mathbb{Z}[\zeta]}\, M_s$

Alternative Berechnung von n_ζ über den $\mathbb{Z}$-Rang:

$n_\zeta = 16 - 3 \cdot n_g - 1 \cdot n_1 = 0$

Man erhält also für dieses g die Modulstruktur $1 \cdot \mathbb{Z}G \oplus 13 \cdot \mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}G$-Strukturen des $\mathbb{Z}$-Gitters D16

Ordnung 3:

$\mathbb{Z}G$-Struktur	Erzeuger	Klassenzahl	Beitrag zum Maß
(1,0,13)	D16p3R1	1	1/153035263180800
(2,0,10)	D16p3R2	1	1/133772083200
(3,0,7)	D16p3R5	1	1/418037760
(4,0,4)	D16p3R4	1	1/5971968
(5,0,1)	D16p3R3	1	1/933120

Ordnung 5:

$\mathbb{Z}G$-Struktur	Erzeuger	Klassenzahl	Beitrag zum Maß
(1,0,11)	D16p5R2	1	1/408748032000
(2,0,6)	D16p5R1	1	1/4608000
(3,0,1)	D16p5R3	1	1/6000

Ordnung 7:

$\mathbb{Z}G$-Struktur	Erzeuger	Klassenzahl	Beitrag zum Maß
(1,0,9)	D16p7R2	1	1/1300561920
(2,0,2)	D16p7R1	1	1/1568

Ordnung 11:

$\mathbb{Z}G$-Struktur	Erzeuger	Klassenzahl	Beitrag zum Maß
(1,0,5)	D16p11R1	1	1/42240

Ordnung 13:

$\mathbb{Z}G$-Struktur	Erzeuger	Klassenzahl	Beitrag zum Maß
(1,0,3)	D16p13R1	1	1/624

Summe der Maße: 13027001249083/5356234211328000

$\mathbb{Z}G$-Strukturen des $\mathbb{Z}$-Gitters 2E8

Ordnung 3:

$\mathbb{Z}G$-Struktur	Erzeuger	Klassenzahl	Beitrag zum Maß
(0,4,8)	2E8p3R3	1	1/108355387392000
(0,8,0)	2E8p3R9	1	1/48372940800
(1,0,13)	2E8p3R1	1	1/216710774784000
(1,2,9)	2E8p3R5	1	1/5417769369600
(1,4,5)	2E8p3R2	1	1/48372940800
(1,6,1)	2E8p3R8	1	1/1209323520
(2,0,10)	2E8p3R4, 2E8p3R10	2	31/5417769369600
(2,2,6)	2E8p3R7	1	1/2418647040
(2,4,2)	2E8p3R6, 2E8p3R13	2	13/1209323520
(3,0,7)	2E8p3R12	1	1/806215680
(3,2,3)	2E8p3R11	1	1/20155392
(4,0,4)	2E8p3R14	1	1/13436928

Ordnung 5:

$\mathbb{Z}$G-Struktur	Erzeuger	Klassenzahl	Beitrag zum Maß
(0,2,8)	2E8p5R1	1	1/418037760000
(0,4,0)	2E8p5R2	1	1/720000
(1,0,11)	2E8p5R3	1	1/836075520000
(1,2,3)	2E8p5R4	1	1/720000
(2,0,6)	2E8p5R5	1	1/2880000

Ordnung 7:

$\mathbb{Z}$G-Struktur	Erzeuger	Klassenzahl	Beitrag zum Maß
(1,0,9)	2E8p7R2	1	1/19508428800
(2,0,2)	2E8p7R1	1	1/1568

Summe der Maße: 4862038747513/7584877117440000

Offene Fragen:

- Welche der drei Gitter mit der Modulzerlegung (2,0,10) liegen im selben $\mathbb{Z}G$-Geschlecht?
- Kann eine $\mathbb{Z}$-Isometrieklasse bei gegebener $\mathbb{Z}G$-Modulstruktur in verschiedene $\mathbb{Z}G$-Isometrieklassen zerfallen?