Ganzzahlige orthogonale Darstellungen der zyklischen Gruppe, Teil II

Björn Hoffmann

Technische Universität Dortmund

29.09.2011

Geschlecht und Maß

- $L = (\mathbb{Z}^n, B)$ ein positiv definites $\mathbb{Z}$-Gitter

Geschlecht und Maß

- $L = (\mathbb{Z}^n, B)$ ein positiv definites $\mathbb{Z}$-Gitter
- $G := (g) \subseteq \mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}}(L)$ eine zyklische Gruppe von Primzahlordnung ℓ

Geschlecht und Maß

- $L = (\mathbb{Z}^n, B)$ ein positiv definites $\mathbb{Z}$-Gitter
- $G := (g) \subseteq \mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}}(L)$ eine zyklische Gruppe von Primzahlordnung ℓ

$\rightsquigarrow$ L ist ein hermitesches $\mathbb{Z}G$-Gitter mit Geschlecht $\mathrm{Gen}_{\mathbb{Z}G}(L, h)$

Geschlecht und Maß

- $L = (\mathbb{Z}^n, B)$ ein positiv definites $\mathbb{Z}$-Gitter
- $G := (g) \subseteq \mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}}(L)$ eine zyklische Gruppe von Primzahlordnung ℓ

$\rightsquigarrow$ L ist ein hermitesches $\mathbb{Z}G$-Gitter mit Geschlecht $\mathrm{Gen}_{\mathbb{Z}G}(L, h)$
Die algorithmische Bestimmung des Geschlechts ist im Allgemeinen recht aufwendig.

Geschlecht und Maß

- $L = (\mathbb{Z}^n, B)$ ein positiv definites $\mathbb{Z}$-Gitter
- $G := (g) \subseteq \mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}}(L)$ eine zyklische Gruppe von Primzahlordnung ℓ

$\rightsquigarrow$ L ist ein hermitesches $\mathbb{Z}G$-Gitter mit Geschlecht $\mathrm{Gen}_{\mathbb{Z}G}(L, h)$
Die algorithmische Bestimmung des Geschlechts ist im Allgemeinen recht aufwendig. Für einen Algorithmus ist das Maß

$$\omega_{\mathbb{Z}G}(L, h) = \sum_{i=0}^{k} |\mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}G}(M_i)|^{-1}$$

(k Klassenzahl von $\mathrm{Gen}_{\mathbb{Z}G}(L, h)$, $M_0 := L, M_1, \ldots, M_k$ Repräsentanten der $\mathbb{Z}G$-Isometrieklassen)
von $\mathrm{Gen}_{\mathbb{Z}G}(L, h)$ ein recht praktischer Wert, der ein Abbruchkriterium liefert,

Geschlecht und Maß

- $L = (\mathbb{Z}^n, B)$ ein positiv definites $\mathbb{Z}$-Gitter
- $G := (g) \subseteq \operatorname{Aut}_{\mathbb{Z}}(L)$ eine zyklische Gruppe von Primzahlordnung ℓ

$\rightsquigarrow$ L ist ein hermitesches $\mathbb{Z}G$-Gitter mit Geschlecht $\operatorname{Gen}_{\mathbb{Z}G}(L, h)$
Die algorithmische Bestimmung des Geschlechts ist im Allgemeinen recht aufwendig. Für einen Algorithmus ist das Maß

$$\omega_{\mathbb{Z}G}(L, h) = \sum_{i=0}^{k} |\operatorname{Aut}_{\mathbb{Z}G}(M_i)|^{-1}$$

(k Klassenzahl von $\operatorname{Gen}_{\mathbb{Z}G}(L, h)$, $M_0 := L, M_1, \dots, M_k$ Repräsentanten der $\mathbb{Z}G$-Isometrieklassen)
von $\operatorname{Gen}_{\mathbb{Z}G}(L, h)$ ein recht praktischer Wert, der ein Abbruchkriterium liefert, jedoch nur wenn man diesen mittels Geschlechterinvarianten zuvor bestimmen kann.

Der Weg zu einer Maßformel für $\mathbb{Z}G$-Gitter

- V der hermitesche $\mathbb{Q}G$-Modul auf dem L liegt.

Der Weg zu einer Maßformel für $\mathbb{Z}G$-Gitter

- V der hermitesche $\mathbb{Q}G$-Modul auf dem L liegt.

$$\begin{aligned} \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}G}(V)_{\mathbb{A}} &:= \{(\sigma_p)_p : \sigma_p g_p = g_p \sigma_p \text{ für alle } p \text{ und } \sigma_p(L_p) = L_p \text{ für fast alle } p\} \\ &\subseteq \prod_p \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}_p}(V_p) \end{aligned}$$

adelische Gruppe von $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}G}(V)$

Der Weg zu einer Maßformel für $\mathbb{Z}G$-Gitter

- V der hermitesche $\mathbb{Q}G$-Modul auf dem L liegt.

$$\begin{aligned} \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}G}(V)_{\mathbb{A}} &:= \{(\sigma_p)_p : \sigma_p g_p = g_p \sigma_p \text{ für alle } p \text{ und } \sigma_p(L_p) = L_p \text{ für fast alle } p\} \\ &\subseteq \prod_p \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}_p}(V_p) \end{aligned}$$

adelische Gruppe von $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}G}(V)$

Proposition (1)

Die Gruppe $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}G}(V)_{\mathbb{A}}$ *operiert transitiv auf* $\mathrm{Gen}_{\mathbb{Z}G}(L, h)$.

Der Weg zu einer Maßformel für $\mathbb{Z}G$-Gitter

- $V \simeq V_1 \perp V_\zeta$ als $\mathbb{Q}G$-Modul wobei V_1 quadratischer $\mathbb{Q}$-Vektorraum, V_ζ hermitescher $\mathbb{Q}(\zeta)$-Vektorraum (ζ primitive ℓ-te Einheitswurzel).

Der Weg zu einer Maßformel für $\mathbb{Z}G$-Gitter

- $V \simeq V_1 \perp V_\zeta$ als $\mathbb{Q}G$-Modul wobei V_1 quadratischer $\mathbb{Q}$-Vektorraum, V_ζ hermitescher $\mathbb{Q}(\zeta)$-Vektorraum (ζ primitive ℓ-te Einheitswurzel).
- $(\mu_1)_p$, $(\mu_1)_\infty$ lokale Haar Maße auf $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}_p}((V_1)_p)$, $\mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}((V_1)_\infty)$

Der Weg zu einer Maßformel für $\mathbb{Z}G$-Gitter

- $V \simeq V_1 \perp V_\zeta$ als $\mathbb{Q}G$-Modul wobei V_1 quadratischer $\mathbb{Q}$-Vektorraum, V_ζ hermitescher $\mathbb{Q}(\zeta)$-Vektorraum (ζ primitive ℓ-te Einheitswurzel).
- $(\mu_1)_p$, $(\mu_1)_\infty$ lokale Haar Maße auf $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}_p}((V_1)_p)$, $\mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}((V_1)_\infty)$
- $(\mu_\zeta)_\mathfrak{p}$, $(\mu_\zeta)_v$, mit $v|\infty$, lokale Haar Maße auf $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}(\zeta)_\mathfrak{p}}((V_\zeta)_\mathfrak{p})$, $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}(\zeta)_v}((V_\zeta)_v)$

Der Weg zu einer Maßformel für $\mathbb{Z}G$-Gitter

- $V \simeq V_1 \perp V_\zeta$ als $\mathbb{Q}G$-Modul wobei V_1 quadratischer $\mathbb{Q}$-Vektorraum, V_ζ hermitescher $\mathbb{Q}(\zeta)$-Vektorraum (ζ primitive ℓ-te Einheitswurzel).
- $(\mu_1)_p$, $(\mu_1)_\infty$ lokale Haar Maße auf $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}_p}((V_1)_p)$, $\mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}((V_1)_\infty)$
- $(\mu_\zeta)_\mathfrak{p}$, $(\mu_\zeta)_v$, mit $v|\infty$, lokale Haar Maße auf $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}(\zeta)_\mathfrak{p}}((V_\zeta)_\mathfrak{p})$, $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}(\zeta)_v}((V_\zeta)_v)$
- Ω_1, Ω_ζ die jeweiligen induzierten Tamagawa Maße auf den Adelgruppen $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(V_1)_{\mathbb{A}}$, $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}(\zeta)}(V_\zeta)_{\mathbb{A}}$

Der Weg zu einer Maßformel für $\mathbb{Z}G$-Gitter

Wegen

$$\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}G}(V)_{\mathbb{A}} \simeq \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(V_1)_{\mathbb{A}} \times \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}(\zeta)}(V_\zeta)_{\mathbb{A}}$$

Der Weg zu einer Maßformel für $\mathbb{Z}G$-Gitter

Wegen

$$\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}G}(V)_{\mathbb{A}} \simeq \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(V_1)_{\mathbb{A}} \times \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}(\zeta)}(V_\zeta)_{\mathbb{A}}$$

erhält man

- Lokale Haar Maße μ_p, μ_∞ auf $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}_pG}(V_p)$, $\mathrm{Aut}_{(\mathbb{Q}G)_\infty}(V_\infty)$

Der Weg zu einer Maßformel für $\mathbb{Z}G$-Gitter

Wegen

$$\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}G}(V)_{\mathbb{A}} \simeq \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(V_1)_{\mathbb{A}} \times \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}(\zeta)}(V_\zeta)_{\mathbb{A}}$$

erhält man

- Lokale Haar Maße μ_p, μ_∞ auf $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}_pG}(V_p)$, $\mathrm{Aut}_{(\mathbb{Q}G)_\infty}(V_\infty)$
- Tamagawa Maß Ω auf $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}G}(V)_{\mathbb{A}}$.

Der Weg zu einer Maßformel für $\mathbb{Z}G$-Gitter

Wegen

$$\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}G}(V)_{\mathbb{A}} \simeq \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(V_1)_{\mathbb{A}} \times \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}(\zeta)}(V_\zeta)_{\mathbb{A}}$$

erhält man

- Lokale Haar Maße μ_p, μ_∞ auf $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}_pG}(V_p)$, $\mathrm{Aut}_{(\mathbb{Q}G)_\infty}(V_\infty)$
- Tamagawa Maß Ω auf $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}G}(V)_{\mathbb{A}}$.
- $\tau(\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}G}(V))$ die Tamagawa Zahl

Der Weg zu einer Maßformel für $\mathbb{Z}G$-Gitter

Wegen

$$\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}G}(V)_{\mathbb{A}} \simeq \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(V_1)_{\mathbb{A}} \times \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}(\zeta)}(V_\zeta)_{\mathbb{A}}$$

erhält man

- Lokale Haar Maße μ_p, μ_∞ auf $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}_pG}(V_p)$, $\mathrm{Aut}_{(\mathbb{Q}G)_\infty}(V_\infty)$
- Tamagawa Maß Ω auf $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}G}(V)_{\mathbb{A}}$.
- $\tau(\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}G}(V))$ die Tamagawa Zahl

Mit Proposition 1 kann man zeigen

Proposition (2)

Sei $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}G}(V, L)_{\mathbb{A}}$ *der Stabilisator von* L *bezüglich der Operation von* $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}G}(V)_{\mathbb{A}}$ *auf dem Geschlecht* $\mathrm{Gen}_{\mathbb{Z}G}(L, h)$.

Der Weg zu einer Maßformel für $\mathbb{Z}G$-Gitter

Wegen

$$\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}G}(V)_{\mathbb{A}} \simeq \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(V_1)_{\mathbb{A}} \times \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}(\zeta)}(V_\zeta)_{\mathbb{A}}$$

erhält man

- Lokale Haar Maße μ_p, μ_∞ auf $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}_pG}(V_p)$, $\mathrm{Aut}_{(\mathbb{Q}G)_\infty}(V_\infty)$
- Tamagawa Maß Ω auf $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}G}(V)_{\mathbb{A}}$.
- $\tau(\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}G}(V))$ die Tamagawa Zahl

Mit Proposition 1 kann man zeigen

Proposition (2)

Sei $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}G}(V, L)_{\mathbb{A}}$ *der Stabilisator von* L *bezüglich der Operation von* $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}G}(V)_{\mathbb{A}}$ *auf dem Geschlecht* $\mathrm{Gen}_{\mathbb{Z}G}(L, h)$. *Dann ist*

$$\omega_{\mathbb{Z}G}(L, h) = \frac{\tau(\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}G}(V))}{\Omega(\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}G}(V, L)_{\mathbb{A}})}$$

Die Tamagawa Zahl von $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}G}(V)$

Wegen

$$\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}G}(V) \simeq \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(V_1) \times \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}(\zeta)}(V_\zeta)$$

Die Tamagawa Zahl von $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}G}(V)$

Wegen

$$\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}G}(V) \simeq \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(V_1) \times \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}(\zeta)}(V_\zeta)$$

erhält man für die Tamagawazahl:

$$\tau(\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}G}(V))$$

Die Tamagawa Zahl von $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}G}(V)$

Wegen

$$\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}G}(V) \simeq \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(V_1) \times \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}(\zeta)}(V_\zeta)$$

erhält man für die Tamagawazahl:

$$\tau(\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}G}(V)) = \tau(\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(V_1)) \cdot \tau(\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}(\zeta)}(V_\zeta))$$

Der Wert von $\Omega(\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}G}(V, L)_{\mathbb{A}})$

Wegen

$$\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}G}(V, L)_{\mathbb{A}} \quad = \quad \{(\sigma_p)_p \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}G}(V)_{\mathbb{A}} : \sigma_p(L_p) = L_p \text{ für alle } p\}$$

Der Wert von $\Omega(\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}G}(V,L)_{\mathbb{A}})$

Wegen

$$\begin{aligned}\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}G}(V,L)_{\mathbb{A}} &= \{(\sigma_p)_p \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}G}(V)_{\mathbb{A}} : \sigma_p(L_p) = L_p \text{ für alle } p\} \\ &= \prod_{p\neq\infty} \mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}_pG}(L_p) \times \mathrm{Aut}_{(\mathbb{Q}G)_\infty}(L_\infty)\end{aligned}$$

Der Wert von $\Omega(\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}G}(V,L)_{\mathbb{A}})$

Wegen

$$\begin{aligned} \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}G}(V,L)_{\mathbb{A}} &= \{(\sigma_p)_p \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}G}(V)_{\mathbb{A}} : \sigma_p(L_p) = L_p \text{ für alle } p\} \\ &= \prod_{p\neq\infty} \mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}_pG}(L_p) \times \mathrm{Aut}_{(\mathbb{Q}G)_\infty}(L_\infty) \end{aligned}$$

ergibt sich

$$\Omega(\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}G}(V,L)_{\mathbb{A}}) = \Omega\left(\prod_{p\neq\infty} \mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}_pG}(L_p) \times \mathrm{Aut}_{(\mathbb{Q}G)_\infty}(L_\infty)\right)$$

Der Wert von $\Omega(\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}G}(V,L)_{\mathbb{A}})$

Wegen

$$\begin{aligned}\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}G}(V,L)_{\mathbb{A}} &= \{(\sigma_p)_p \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}G}(V)_{\mathbb{A}} : \sigma_p(L_p) = L_p \text{ für alle } p\} \\ &= \prod_{p\neq\infty} \mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}_pG}(L_p) \times \mathrm{Aut}_{(\mathbb{Q}G)_\infty}(L_\infty)\end{aligned}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned}\Omega(\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}G}(V,L)_{\mathbb{A}}) &= \Omega\left(\prod_{p\neq\infty} \mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}_pG}(L_p) \times \mathrm{Aut}_{(\mathbb{Q}G)_\infty}(L_\infty)\right) \\ &= \prod_{p\neq\infty} \mu_p(\mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}_pG}(L_p)) \cdot \mu_\infty(\mathrm{Aut}_{(\mathbb{Q}G)_\infty}(L_\infty))\end{aligned}$$

Der Wert von $\Omega(\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}G}(V,L)_{\mathbb{A}})$

Wegen

$$\begin{aligned}\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}G}(V,L)_{\mathbb{A}} &= \{(\sigma_p)_p \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}G}(V)_{\mathbb{A}} : \sigma_p(L_p) = L_p \text{ für alle } p\} \\ &= \prod_{p\neq\infty} \mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}_pG}(L_p) \times \mathrm{Aut}_{(\mathbb{Q}G)_\infty}(L_\infty)\end{aligned}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned}\Omega(\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}G}(V,L)_{\mathbb{A}}) &= \Omega\left(\prod_{p\neq\infty} \mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}_pG}(L_p) \times \mathrm{Aut}_{(\mathbb{Q}G)_\infty}(L_\infty)\right) \\ &= \prod_{p\neq\infty} \mu_p(\mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}_pG}(L_p)) \cdot \mu_\infty(\mathrm{Aut}_{(\mathbb{Q}G)_\infty}(L_\infty))\end{aligned}$$

Berechne also $\mu_p(\mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}_pG}(L_p))$ für alle Primzahlen p und $\mu_\infty(\mathrm{Aut}_{(\mathbb{Q}G)_\infty}(L_\infty))$.

Der Wert von $\Omega(\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}G}(V,L)_{\mathbb{A}})$

- $i = 1, \zeta$: $L_i := \pi_{V_i}(L)$ wobei π_{V_i} die kanonische Projektion ist

Der Wert von $\Omega(\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}G}(V,L)_{\mathbb{A}})$

- $i = 1, \zeta$: $L_i := \pi_{V_i}(L)$ wobei π_{V_i} die kanonische Projektion ist
- $p \neq \ell$ liefert: $L_p = (L_1)_p \perp \prod_{i=1}^{r_p} (L_\zeta)_{\mathfrak{p}_i}$, d.h.
  $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}_p G}(L_p) \simeq \mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}_p}((L_1)_p) \times \prod_{i=1}^{r_p} \mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}[\zeta]_{\mathfrak{p}_i}}((L_\zeta)_{\mathfrak{p}_i})$

Der Wert von $\Omega(\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}G}(V, L)_{\mathbb{A}})$

- $i = 1, \zeta$: $L_i := \pi_{V_i}(L)$ wobei π_{V_i} die kanonische Projektion ist
- $p \neq \ell$ liefert: $L_p = (L_1)_p \perp \prod_{i=1}^{r_p} (L_\zeta)_{\mathfrak{p}_i}$, d.h.
  $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}_p G}(L_p) \simeq \mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}_p}((L_1)_p) \times \prod_{i=1}^{r_p} \mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}[\zeta]_{\mathfrak{p}_i}}((L_\zeta)_{\mathfrak{p}_i})$
- $L_\ell \subset (L_1)_\ell \perp (L_\zeta)_\lambda$, d.h.
  $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}_p G}(L_\ell) \hookrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}_\ell}((L_1)_\ell) \times \mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}[\zeta]_\lambda}((L_\zeta)_\lambda)$

Der Wert von $\Omega(\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}G}(V,L)_{\mathbb{A}})$

- $i = 1, \zeta$: $L_i := \pi_{V_i}(L)$ wobei π_{V_i} die kanonische Projektion ist
- $p \neq \ell$ liefert: $L_p = (L_1)_p \perp \prod_{i=1}^{r_p} (L_\zeta)_{\mathfrak{p}_i}$, d.h.
  $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}_pG}(L_p) \simeq \mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}_p}((L_1)_p) \times \prod_{i=1}^{r_p} \mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}[\zeta]_{\mathfrak{p}_i}}((L_\zeta)_{\mathfrak{p}_i})$
- $L_\ell \subset (L_1)_\ell \perp (L_\zeta)_\lambda$, d.h.
  $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}_pG}(L_\ell) \hookrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}_\ell}((L_1)_\ell) \times \mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}[\zeta]_\lambda}((L_\zeta)_\lambda)$
- $L_\infty = (L_1)_\infty \perp \prod_{v|\infty} (L_\zeta)_v$, d.h.
  $\mathrm{Aut}_{(\mathbb{Q}G)_\infty}(L_\infty) \simeq \mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}((L_1)_\infty) \times \prod_{v|\infty} \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}(\zeta)_v}((L_\zeta)_v)$

Der Wert von $\Omega(\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}G}(V, L)_{\mathbb{A}})$

Proposition (3)

Es ist

$$\Omega(\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}G}(V, L)_{\mathbb{A}}) = \gamma^{-1}\Omega_1(\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(V_1, L_1)_{\mathbb{A}})\Omega_\zeta(\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}(\zeta)}(V_\zeta, L_\zeta)_{\mathbb{A}})$$

wobei $\gamma = [\mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}_\ell}((L_1)_\ell) \times \mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}[\zeta]_\ell}((L_\zeta)_\ell) : \mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}G_\ell}(L_\ell)]$.

Der Wert von $\Omega(\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}G}(V, L)_{\mathbb{A}})$

Proposition (3)

Es ist

$$\Omega(\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}G}(V, L)_{\mathbb{A}}) = \gamma^{-1}\Omega_1(\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(V_1, L_1)_{\mathbb{A}})\Omega_\zeta(\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}(\zeta)}(V_\zeta, L_\zeta)_{\mathbb{A}})$$

wobei $\gamma = [\mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}_\ell}((L_1)_\ell) \times \mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}[\zeta]_\ell}((L_\zeta)_\ell) : \mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}G_\ell}(L_\ell)]$.

Noch nicht ganz bekannt ist γ.

Der Weg zu einer Maßformel für $\mathbb{Z}G$-Gitter

Bemerkung

Eine analoge Formel wie die aus Proposition 2 gilt auch für das Maß von quadratischen $\mathbb{Z}$*- und hermiteschen* $\mathbb{Z}[\zeta]$*-Gittern,*

Der Weg zu einer Maßformel für $\mathbb{Z}G$-Gitter

Bemerkung

Eine analoge Formel wie die aus Proposition 2 gilt auch für das Maß von quadratischen $\mathbb{Z}$- und hermiteschen $\mathbb{Z}[\zeta]$-Gittern, d.h.

- $$\omega_{\mathbb{Z}}(L, b) = \frac{\tau(\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(V))}{\Omega_1(\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(V, L)_{\mathbb{A}})}$$

  (Minkowski-Siegel)

Der Weg zu einer Maßformel für $\mathbb{Z}G$-Gitter

Bemerkung

Eine analoge Formel wie die aus Proposition 2 gilt auch für das Maß von quadratischen $\mathbb{Z}$- und hermiteschen $\mathbb{Z}[\zeta]$-Gittern, d.h.

- $$\omega_{\mathbb{Z}}(L, b) = \frac{\tau(\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(V))}{\Omega_1(\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(V, L)_{\mathbb{A}})}$$

  (Minkowski-Siegel)

- $$\omega_{\mathbb{Z}[\zeta]}(L, h) = \frac{\tau(\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}(\zeta)}(V))}{\Omega_\zeta(\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}(\zeta)}(V, L)_{\mathbb{A}})}$$

  (Braun, Böge)

(Fast-) Maßformel

$$\omega_{\mathbb{Z}G}(L,h) \quad = \quad \tau(\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}G}(V)) \cdot \Omega(\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}G}(V,L)_{\mathbb{A}})^{-1}$$

(Fast-) Maßformel

$$\begin{aligned}\omega_{\mathbb{Z}G}(L,h) &= \tau(\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}G}(V)) \cdot \Omega(\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}G}(V,L)_{\mathbb{A}})^{-1} \\ &= \tau(\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(V_1))\tau(\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}(\zeta)}(V_\zeta)) \cdot\end{aligned}$$

(Fast-) Maßformel

$$
\begin{aligned}
\omega_{\mathbb{Z}G}(L,h) &= \tau(\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}G}(V)) \cdot \Omega(\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}G}(V,L)_{\mathbb{A}})^{-1} \\
&= \tau(\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(V_1))\tau(\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}(\zeta)}(V_\zeta)) \cdot \\
&\quad \gamma\Omega_1(\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(V_1,L_1)_{\mathbb{A}})^{-1}\Omega_\zeta(\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}(\zeta)}(V_\zeta,L_\zeta)_{\mathbb{A}})^{-1}
\end{aligned}
$$

(Fast-) Maßformel

$$\begin{aligned}
\omega_{\mathbb{Z}G}(L,h) &= \tau(\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}G}(V)) \cdot \Omega(\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}G}(V,L)_{\mathbb{A}})^{-1} \\
&= \tau(\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(V_1))\tau(\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}(\zeta)}(V_\zeta)) \cdot \\
&\quad \gamma\Omega_1(\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(V_1,L_1)_{\mathbb{A}})^{-1}\Omega_\zeta(\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}(\zeta)}(V_\zeta,L_\zeta)_{\mathbb{A}})^{-1} \\
&= \gamma\omega_{\mathbb{Z}}(L_1,b_1)\omega_{\mathbb{Z}[\zeta]}(L_\zeta,h_\zeta)
\end{aligned}$$

(Fast-) Maßformel

$$\begin{aligned}
\omega_{\mathbb{Z}G}(L,h) &= \tau(\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}G}(V)) \cdot \Omega(\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}G}(V,L)_{\mathbb{A}})^{-1} \\
&= \tau(\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(V_1))\tau(\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}(\zeta)}(V_\zeta)) \cdot \\
&\quad \gamma\Omega_1(\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(V_1,L_1)_{\mathbb{A}})^{-1}\Omega_\zeta(\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}(\zeta)}(V_\zeta,L_\zeta)_{\mathbb{A}})^{-1} \\
&= \gamma\omega_{\mathbb{Z}}(L_1,b_1)\omega_{\mathbb{Z}[\zeta]}(L_\zeta,h_\zeta)
\end{aligned}$$

Nächste Aufgabe:

(Fast-) Maßformel

$$
\begin{aligned}
\omega_{\mathbb{Z}G}(L,h) &= \tau(\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}G}(V)) \cdot \Omega(\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}G}(V,L)_{\mathbb{A}})^{-1} \\
&= \tau(\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(V_1))\tau(\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}(\zeta)}(V_\zeta)) \cdot \\
&\quad \gamma\Omega_1(\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(V_1,L_1)_{\mathbb{A}})^{-1}\Omega_\zeta(\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}(\zeta)}(V_\zeta,L_\zeta)_{\mathbb{A}})^{-1} \\
&= \gamma\omega_{\mathbb{Z}}(L_1,b_1)\omega_{\mathbb{Z}[\zeta]}(L_\zeta,h_\zeta)
\end{aligned}
$$

Nächste Aufgabe: Vervollständigung der Berechnung von γ.

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit!