Zerlegungszahlen für generische Iwahori-Hecke-Algebren von exzeptionellem Typ

Von der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen
zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften
genehmigte Dissertation

vorgelegt von
Diplom-Mathematiker
Jürgen Müller
aus Lüdinghausen

Referent: Universitätsprofessor Dr. H. Pahlings
Korreferent: Universitätsprofessor Dr. A. Krieg
Tag der mündlichen Prüfung: 2. Februar 1995

Inhaltsverzeichnis

Diese Algebrastunden konnte Hans bei allem Fleiße nicht vergnüglich finden. Es war doch bitter, mitten am heißen Nachmittag ... in der staubigen, mückendurchsummten Luft mit müdem Kopf und trockener Stimme das a plus b und a minus b herzusagen. ... Mit der Mathematik ging es ihm überhaupt merkwürdig. ... Ihm gefiel das an der Mathematik, daß es hier keine Irrungen und keinen Schwindel gab, keine Möglichkeit, vom Thema abzuirren und trügerische Nebengebiete zu streifen. ... Aber wenn beim Rechnen auch alle Resultate stimmten, es kam doch eigentlich nichts Rechtes dabei heraus. Die mathematischen Arbeiten und Lehrstunden kamen ihm vor wie das Wandern auf einer ebenen Landstraße; man kommt immer vorwärts, man versteht jeden Tag etwas, was man gestern noch nicht verstand, aber man kommt nie auf einen Berg, wo sich plötzlich weite Aussichten auftun.

H. Hesse: 'Unterm Rad'

1. Einleitung

Ein Meilenstein in der Geschichte der Gruppentheorie ist die Vollendung der Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen zu Beginn der achtziger Jahre dieses Jahrhunderts. Demnach ist jede solche Gruppe entweder zyklisch von Primzahlordnung, eine alternierende Gruppe, eine einfache Gruppe vom Lie-Typ oder eine sporadische einfache Gruppe.

Die zyklischen Gruppen von Primzahlordnung sind die einzigen abelschen endlichen einfachen Gruppen. Die alternierenden Gruppen sind Untergruppen vom Index 2 in den vollen symmetrischen Gruppen, das heißt, den Gruppen von bijektiven Abbildungen einer endlichen Menge auf sich selbst.

Die Prototypen der endlichen Gruppen vom Lie-Typ sind die vollen linearen Gruppen, also die Gruppen aller Automorphismen eines endlichdimensionalen Vektorraums über einem endlichen Körper. Natürlich lassen sich diese Gruppen auch als die Menge der invertierbaren quadratischen Matrizen der entsprechenden Dimension beschreiben. Im allgemeinen sind die vollen linearen Gruppen nicht einfach. Geht man aber zur Untergruppe aller Matrizen mit Determinante 1 über und betrachtet die Matrizen nur modulo der Skalarmatrizen, das heißt, man betrachtet die Operation der vollen linearen Gruppe auf dem zum Vektorraum gehörenden projektiven Raum, so erhält man bis auf wenige Ausnahmen eine einfache Gruppe: die projektive spezielle lineare Gruppe. Diese ist ein typischer Vertreter der dritten der oben genannten Klassen einfacher Gruppen. Die projektiven speziellen linearen Gruppen zu Vektorräumen einer festen Dimension über variablen

endlichen Körpern werden zu einer Serie zusammengefaßt. In ähnlicher Weise erhält man weitere klassische Serien, die der orthogonalen, symplektischen und unitären Gruppen. Außerdem findet man noch einige exzeptionelle Serien, die mit den soeben genannten Typen von Gruppen enge strukturelle Verwandtschaft haben. Ziel einer theoretischen Beschreibung aller dieser Gruppen ist es, die gemeinsamen Eigenschaften der in einer solchen unendlichen Serie zusammengefaßten Gruppen zu beschreiben.
Wie der Name der vierten Klasse einfacher Gruppen schon andeutet, lassen sich diese Gruppen, 26 an der Zahl, bis heute nicht in einen größeren Kontext einbetten. Die—historisch gesehen—ersten der sporadischen Gruppen sind die von Mathieu bereits etwa im Jahre 1870 entdeckten, heute nach ihm benannten, hochtransitiven Permutationsgruppen. Die weiteren sporadischen Gruppen wurden erst in den letzten 30 Jahren beschrieben. Abschluß dieser Entwicklung war etwa um das Jahr 1980 herum die Entdeckung der letzten, häufig als 'Monster', zuweilen aber auch als 'freundlicher Riese' bezeichneten Gruppe.
Dieses Klassifikationsresultat ist in vielerlei Hinsicht von großer Bedeutung. Zunächst ist damit eine wichtige Frage der Gruppentheorie, nämlich die nach den Bausteinen, aus denen eine endliche Gruppe aufgebaut sein kann, abschließend behandelt. Außerdem ist der Beweis dieses Ergebnisses mit seiner Länge von mehreren tausend Seiten einer der längsten, wahrscheinlich sogar der längste, der je in der Geschichte der Mathematik für ein 'Einzelresultat' gefunden wurde. Aber natürlich wirft eine vollständig beantwortete Frage weitere, weiterführende Fragen auf. Ein solcher Fragenkomplex ist etwa der nach der Darstellungstheorie dieser Gruppen.

Die Darstellungstheorie endlicher Gruppen beschäftigt sich mit der Frage, wie eine endliche Gruppe G als Menge von Automorphismen eines endlichdimensionalen Vektorraums V über einem Körper F realisiert werden kann. Anders formuliert: Man betrachtet Darstellungen, das heißt, Homomorphismen in die volle lineare Gruppe der entsprechenden Dimension. Die Untersuchung der Moduln V für eine Gruppe ergibt wichtige Aufschlüsse über die Struktur der betrachteten Gruppe.
Allgemeiner bezeichnet man als Darstellung einer F-Algebra A einen Homomorphismus dieser Algebra in den Endomorphismenring eines endlichdimensionalen Vektorraums. Dies ist in der Tat eine Verallgemeinerung der soeben beschriebenen Situation. Faßt man nämlich die Elemente der Gruppe G als die Basis einer Algebra FG auf, deren Multiplikation gerade von der Multiplikation in G induziert wird, so sind die Darstellungen von G nichts

anderes als die Darstellungen der Gruppenalgebra FG.
Natürlich stellt sich wieder die Frage nach den kleinsten Bausteinen, aus denen eine Darstellung aufgebaut sein kann. Hier erscheint diese Frage in folgendem Gewand: Gibt es einen Teilvektorraum W des Moduls V, der unter der Operation aller Elemente von A in sich überführt wird, so sind auch W selbst und der Faktorraum V/W wieder Moduln für A. Es ist klar, daß dieser Prozeß—die Aufteilung in Teilraum und Faktorraum—nur endlich oft wiederholt werden kann, bis folgende Situation eintritt: Solch ein Teilmodul W ist entweder der Nullvektorraum oder aber schon gleich dem ganzen Raum V. Tritt dieser Fall ein, so heißt V einfach. Die Klassifikationsfrage, die sich hier stellt, ist also die nach den einfachen Darstellungen für A. Immerhin folgt aus theoretischen Überlegungen, daß es bei fest gewähltem Körper F bis auf einen natürlichen Äquivalenzbegriff nur endlich viele solcher einfachen Darstellungen gibt. Außerdem erhält man zu einem beliebigen Modul V durch das oben beschriebene sukzessive Aufteilen eine Liste mit den Vielfachheiten, mit denen jeder dieser möglichen einfachen Bausteine in V wirklich vorkommt.
Als eine weitere naheliegende Frage, was Gruppenalgebren angeht, bietet sich nun die nach den Beziehungen der einfachen Darstellungen über verschiedenen Körpern an. Von besonderem Interesse sind dabei die Beziehungen zwischen den einfachen gewöhnlichen Darstellungen von G, das heißt, Darstellungen über einem Körper K der Charakteristik 0, und einfachen modularen Darstellungen, das heißt, Darstellungen über einem Körper k der Charakteristik $l > 0$. Dieser Zusammenhang wird durch die Zerlegungstheorie formalisiert. Im Rahmen dieser Theorie beschreibt man ein Verfahren, wie man aus einer gewöhnlichen Darstellung durch einen Reduktionsprozeß eine modulare Darstellung gewinnt. Als Veranschaulichung mag die folgende einfachste Situation $K = \mathbb{Q}$ dienen: Sind die darstellenden Matrizen für alle Gruppenelemente nicht nur über den rationalen Zahlen, sondern sogar über den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ geschrieben, so können die Matrixeinträge modulo der Primzahl l reduziert werden, und man erhält eine Darstellung über dem endlichen Körper $k = \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$.
Auch dieser Prozeß läßt sich auf eine größere Klasse von Algebren verallgemeinern. Ausgangspunkt dafür ist die Beobachtung, daß das Produkt zweier Basiselemente der Gruppenalgebra KG, mithin zweier Gruppenelemente, sich als $\mathbb{Z}$-Linearkombination der Basiselemente schreiben läßt, hier ist es ja sogar gleich einem weiteren Basiselement. Betrachtet man also die Teilalgebra $\mathbb{Z}G \subseteq KG$, so liefert die komponentenweise Reduktion modulo der Primzahl l gerade die Gruppenalgebra kG. Findet man nun in einer

K-Algebra A eine geeignete Basis, für die sich eine Reduktion zu einer k-Algebra A_k wie soeben beschrieben realisieren läßt, so kann man wieder versuchen, die darstellenden Matrizen für die Basiselemente schon über $\mathbb{Z}$ zu schreiben, und die Reduktion verknüpft wie oben K-Darstellungen und k-Darstellungen.
Beginnt man nun mit einer einfachen gewöhnlichen Darstellung der K-Algebra A, so ist die durch diesen Reduktionsprozeß erhaltene Darstellung nicht notwendig wieder einfach. Aber immerhin kann man jeder einfachen gewöhnlichen Darstellung die Liste der Vielfachheiten der in der Reduktion vorkommenden einfachen modularen Bausteine über k, wie es oben schon beschrieben wurde, zuordnen. In diesem Zusammenhang werden diese Vielfachheiten auch als Zerlegungszahlen bezeichnet. In übersichtlicher Form werden diese zu einer Zerlegungsmatrix zusammengefaßt, in der die Zeilen durch die einfachen gewöhnlichen und die Spalten durch die einfachen modularen Darstellungen parametrisiert sind.

Genauer befaßt sich die vorliegende Arbeit mit einem Teilaspekt der Bestimmung von Zerlegungszahlen für einfache Gruppen vom Lie-Typ. Da man hier vor die Aufgabe gestellt ist, unendliche Serien von Gruppen geschlossen zu beschreiben, muß man auf theoretische Methoden sinnen, die gemeinsame Strukturaspekte einer solchen Serie erfassen. Solch ein Strukturkonzept ist das der Gruppen mit Tits-System. Hier wird eine bestimmte Untergruppenkonstellation ausgenutzt, die sich in jeder der Gruppen einer Serie wiederfindet. Mit Hilfe dieses Konzepts gelangt man übrigens auch zur Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen vom Lie-Typ und erhält in natürlicher Weise die schon anfangs beschriebene Einteilung dieser Gruppen in Serien.
Es stellt sich heraus, daß man einer Gruppe mit Tits-System eine gewisse Unteralgebra ihrer Gruppenalgebra—eben gerade eine Iwahori-Hecke-Algebra—zuordnen kann. Die Struktur dieser Unteralgebra gibt wichtige Informationen über die Gruppe selbst. Es stellt sich weiter heraus, daß die Eigenschaften der Iwahori-Hecke-Algebren für die Gruppen einer Serie, also etwa für die projektiven speziellen linearen Gruppen einer festen Dimension, aber über verschiedenen Körpern $GF(q)$, systematisch von der Mächtigkeit des Definitionskörpers $GF(q)$ der Gruppe abhängen. Um diese Systematik zu erfassen, beschreibt man eine allgemeine—generische—Algebra, die alle diese einzelnen Algebren als Bilder unter einem Spezialisierungsprozeß ergibt.
Insbesondere kann man für Iwahori-Hecke-Algebren eine Zerlegungstheorie formulieren, die in enger Beziehung zur Zerlegungstheorie der zugrundeliegenden Gruppe mit Tits-System steht: Die Zerlegungsmatrix der Iwahori-

Hecke-Algebra kommt als Teilmatrix der Zerlegungsmatrix der Gruppe vor. Außerdem findet man, daß für die oben beschriebenen generischen Algebren ebenfalls eine Zerlegungstheorie formuliert werden kann, die das Zerlegungsverhalten aller einzelnen Algebren, die daraus durch den oben erwähnten Spezialisierungsprozeß gewonnen werden können, in systematischer Weise reflektiert. Diese Zerlegungstheorie lebt in Charakteristik 0, das heißt, anstatt der Reduktion der ganzen Zahlen $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ modulo einer Primzahl l betrachtet man jetzt den Polynomring $\mathbb{Q}[u]$ in seinem Quotientenkörper und Reduktionen modulo des von einem Kreisteilungspolynom Φ_e erzeugten primen Hauptideals. Ziel der theoretischen wie auch praktischen Analyse muß es also sein, dieses generische Φ_e-modulare Zerlegungsverhalten genau zu beschreiben.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, Φ_e-modulare Zerlegungszahlen für generische Iwahori-Hecke-Algebren von exzeptionellem Typ, das heißt, Iwahori-Hecke-Algebren, die im Zusammenhang mit den oben erwähnten exzeptionellen Serien von Gruppen vom Lie-Typ auftreten, unter Einsatz rechnergestützter Methoden zu bestimmen.

Zur Untersuchung insbesondere der sporadischen einfachen Gruppen, was deren Zerlegungstheorie, aber auch andere Aspekte angeht, wurden eine Reihe solcher Methoden entwickelt. Von ihrem Ansatzpunkt her unterscheidet man charaktertheoretische und modultheoretische Methoden.
Die Äquivalenzklassen einfacher Darstellungen einer Algebra kann man als ein freies Erzeugendensystem einer abstrakten frei-abelschen Gruppe—der Grothendieck-Gruppe der Algebra—auffassen. In diesem Kontext kann die Zerlegungsmatrix einer K-Algebra A als Matrix einer linearen Abbildung zwischen den Grothendieck-Gruppen A und A_k aufgefaßt werden. Damit kann man zu einer Zerlegungsabbildung auch ihre duale Abbildung betrachten. In den charaktertheoretischen Verfahren wird nun ausgenutzt, daß die zugrundeliegenden Strukturen frei-abelsche Gruppen sind, also $\mathbb{Z}$-Gitter, die rechnerisch gut zu behandeln sind. Außerdem kann man mit der Zerlegungsabbildung selbst auch ihre duale Abbildung und ihrer beider Wechselspiel ausnutzen.
Ebenfalls in diese Klasse von Methoden gehört der ursprünglich im Bereich der Zahlentheorie entwickelte LLL-Algorithmus. Dieser Algorithmus dient dazu, in einem gegebenen $\mathbb{Z}$-Gitter, das in einen euklidischen Vektorraum eingebettet ist, eine Basis aus Vektoren kurzer Länge zu finden. Wie sich zeigt, läßt sich eine im Verlauf der vorliegenden Arbeit auftretende Pro-

blemstellung auf eine Frage reduzieren, zu deren Beantwortung der LLL-Algorithmus benutzt werden kann. Und natürlich ist es besonders reizvoll, zu sehen, daß eine Methode, die zunächst zu anderen Zwecken entwickelt worden ist, eine ganz unerwartete Anwendung hat.
Komplementär zu den charaktertheoretischen Methoden werden auch modultheoretische Methoden verwendet. Ziel hierbei ist es, explizit Darstellungen, das heißt, darstellende Matrizen, zu konstruieren. Zum einen ist das die ebenfalls zur Untersuchung von sporadischen einfachen Gruppen entwickelte MeatAxe zur Behandlung von Matrixdarstellungen über endlichen Körpern. Dieses Programmsystem umfaßt Routinen, deren Aufgabenbereich von einfachen Operationen in einem endlich-dimensionalen Vektorraum über einem endlichen Körper, wie etwa Gauß-Elimination, bis hin zur expliziten Bestimmung von Teil- und Faktormoduln eines gegebenen Moduls und sogar ganzer Untermodulverbände reicht.
Zum anderen ist das der VectorEnumerator, der zur Konstruktion von Moduln für endlich-präsentierte Algebren über endlichen Körpern, aber auch über algebraischen Zahlkörpern benutzt wird. Die grundlegende Idee hierbei ist, daß durch eine Präsentation die Arithmetik in dieser Algebra festgelegt ist. Daraus kann man dann Informationen gewinnen, wie die Elemente dieser Algebra auf einem Modul operieren können. Es zeigt sich, daß Iwahori-Hecke-Algebren eine natürliche Präsentation besitzen, die im Sinne dieses Algorithmus arithmetisch sehr gut konditioniert ist.
Wie bereits erwähnt wurde, lebt die hier vorliegende Zerlegungstheorie von Iwahori-Hecke-Algebren in Charakteristik 0. Damit tut eine in Charakteristik 0 anwendbare rechnerische Methode not, die insofern über die im Bereich der Zerlegungstheorie bisher benutzten Methoden hinausgeht. Es stellt sich heraus, daß der VectorEnumerator, der in der Tat über Körpern der Charakteristik 0 einsetzbar ist, in dieser Hinsicht ein äußerst nützliches Hilfsmittel ist.

Der Verfasser sieht, neben der Darstellung der Ergebnisse und deren Beweise, eine wesentliche Aufgabe der vorliegenden Arbeit darin, zu beschreiben, wie Methoden, die aus verschiedenen Gebieten der rechnergestützten Algebra stammen, auf die hier auftretenden Probleme angewendet werden können. Natürlich muß die Beschreibung der ausgeführten Rechnungen so genau sein—und der Verfasser hofft, daß das gelungen ist—daß es dem Leser im Prinzip möglich ist, sie mit Hilfe eines eigenen Rechners nachzuvollziehen.

Ergebnisse und Gliederung

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, das Programm der Bestimmung aller Φ_e-modularen Zerlegungszahlen für die exzeptionellen generischen Iwahori-Hecke-Algebren einem Abschluß möglichst nahe zu bringen.
Dieses Programm wurde von M. Geck und K. Lux in [32] für die Algebra $H(F_4)$ mit gleichen Parametern, von K. Bremke in [7] für $H(F_4)$ mit ungleichen Parametern und von M. Geck in [28] und [30] für $H(E_6)$ vollständig und für $H(E_7)$ zum Teil durchgeführt. Ebenfalls von M. Geck wurden in [27] die Φ_e-modularen Zerlegungszahlen für $H(E_8)$ für die Fälle bestimmt, in denen das Kreisteilungspolynom Φ_e das Poincaré-Polynom von $H(E_8)$ nur zur ersten Potenz teilt.
Damit ist das Programm der vorliegenden Arbeit abgesteckt. Im folgenden werden die Φ_e-modularen Zerlegungszahlen der generischen Iwahori-Hecke-Algebra $H(E_8)$ für alle natürlichen Zahlen e, für die das Kreisteilungspolynom Φ_e das Poincaré-Polynom von $H(E_8)$ mindestens zur zweiten Potenz teilt, möglichst weitgehend bestimmt. Damit sind also die Fälle

$$e = 12, 10, 8, 6, 5, 4, 3, 2$$

zu betrachten. Bis auf wenige offene Fragen können mit den dem Verfasser bisher zur Verfügung stehenden Methoden alle Zerlegungszahlen bestimmt werden.
Außerdem wird die generische Iwahori-Hecke-Algebra $H(E_7)$ in den Fällen $e = 3$ und $e = 2$ untersucht, für die in [30] noch einige Fragen offen sind. Alle diese Fragen können abschließend behandelt werden, so daß nun die Φ_e-modularen Zerlegungszahlen für $H(E_7)$ vollständig bekannt sind.

Zusammen mit den oben erwähnten Ergebnissen anderer Autoren kann man also konstatieren: Ist H eine generische Iwahori-Hecke-Algebra vom Typ G_2, F_4, E_6, E_7 oder E_8, so

- sind die Ränge aller Φ_e-modularen Zerlegungsmatrizen, also die Anzahlen der Φ_e-modular irreduziblen Darstellungen, bekannt; für die generische Iwahori-Hecke-Algebra $H(E_8)$ und die oben genannten Moduli hat man etwa:

e	12	10	8	6	5	4	3	2
$H(E_8)$	102	104	100	75	96	69	52	23

;

- haben alle Zerlegungsmatrizen Dreiecksgestalt;

- sind mit Ausnahme des Typs E_8 sogar alle Zerlegungszahlen explizit bekannt.

Iwahori-Hecke-Algebren klassischen Typs werden in der vorliegenden Arbeit nur insofern behandelt, als sie als parabolische Teilalgebren in exzeptionellen Algebren auftreten. Die klassischen Algebren wurden und werden von anderen Autoren untersucht, siehe etwa die Arbeiten [20] und [21] von R. Dipper und G. James.

In den Kapiteln 2. und 3. werden die für die vorliegende Arbeit notwendigen Begriffe eingeführt und das theoretische Rüstzeug bereitgestellt. Die in diesen Kapiteln niedergelegten Konzepte sind bereits früher von verschiedenen Autoren erarbeitet worden. Deshalb werden hier vielfach deren Originalarbeiten zitiert, explizite Beweise dagegen nur an Stellen angegeben, wo sich Argumente anbieten, die von den dem Verfasser aus der Literatur bekannten abweichen. Der mit der hier benutzten Theorie vertraute Leser wird keine Probleme haben, die Lektüre der vorliegenden Arbeit in Kapitel 4. zu beginnen.
In Kapitel 4. werden die rechnerischen Ideen und Methoden, die in die Berechnung von Zerlegungszahlen Eingang gefunden haben, beschrieben. Ziel ist es hier einerseits, die verwendeten Methoden in einer Weise zu beschreiben, die es erlaubt, in den nachfolgenden Kapiteln darauf bezug zu nehmen, und die es dem Leser erlaubt, die Rechnungen mit Hilfe eines eigenen Rechners selbst nachzuvollziehen. Andererseits soll es dem vornehmlich an der Methodik interessierten Leser einen Eindruck von der Art des rechnerischen Zugangs vermitteln. Außerdem wird, soweit das möglich ist, zu den einzelnen Ideen auf ein Beispiel weiter hinten verwiesen, so daß der Leser auch eine konkrete Anwendung an der Hand hat.

Beginnend mit Kapitel 5. werden die einzelnen Ergebnisse dargestellt. Die Gliederung erfolgt nach dem betrachteten Modulus e. Für festes e werden zunächst die zur Untersuchung von $H(E_8)$ benötigten Ergebnisse über parabolische Teilalgebren zitiert oder berechnet. Dann werden die einzelnen nichttrivialen Blöcke untersucht. Am Ende der Betrachtungen zu einem festen Block wird, falls die Zerlegungsmatrix nicht vollständig bestimmt werden konnte, eine Liste mit den offen gebliebenen Fragen angegeben.
Diese Gliederung stellt sicher, daß einerseits die rechnerischen Ergebnisse in logischer Reihenfolge präsentiert werden, und daß andererseits die Φ_e-modularen Zerlegungszahlen für eine gegebene Algebra schnell aufzufinden sind. Dem insbesondere an der Wirkungsweise der eingesetzten Methoden

interessierten Leser wird empfohlen, die jeweiligen Abschnitte über parabolische Unteralgebren zu überschlagen und sein Augenmerk auf die Abschnitte über die Berechnung der Φ_2- und Φ_3-modularen Zerlegungszahlen für $H(E_7)$ und über die Berechnung der Zerlegungszahlen für $H(E_8)$, vorzugsweise für kleine Moduli e, zu richten.

In einem letzten Kapitel 13. wird, und damit schließt sich der Kreis der Betrachtungen in dieser Einleitung, anhand des Beispiels der 7-modularen Zerlegungszahlen für die endliche Gruppe vom Lie-Typ ${}^2E_6(2^2)$ gezeigt, wie sich Ergebnisse über Iwahori-Hecke-Algebren bei der Bestimmung von Zerlegungszahlen endlicher Gruppen nutzbar machen lassen.

Danksagung

Natürlich hätte auch die vorliegende Arbeit nicht ohne die Hilfe und Unterstützung durch viele Kollegen und Institutionen entstehen können. Ich danke insbesondere meinem Doktorvater Prof. H. Pahlings, sowie M. Geck, K. Lux und den anderen Mitarbeitern des Lehrstuhls D für viele anregende Diskussionen. In meinen Dank schließe ich auch die Mitarbeiter des IWR der Universität Heidelberg, dort insbesondere G. Hiss und G. Malle, deren Gast ich für mehrere Monate war, ein. Außerdem bin ich dankbar für die finanzielle Unterstützung, die ich durch eine Ausschüttung des Benningsen-Foerder-Preises des Landes Nordrhein-Westfalen und durch die Deutsche Forschungsgemeinschaft im Rahmen des Schwerpunkts 'Algorithmische Zahlentheorie und Algebra', zu dem die vorliegende Arbeit ein Beitrag ist, erhalten habe.

2. Iwahori-Hecke-Algebren

In diesem Kapitel soll das Konzept der Iwahori-Hecke-Algebren in einer für die Zwecke dieser Arbeit geeigneten Weise vorgestellt werden. Außerdem soll der Kontext beleuchtet werden, in dem Hecke-Algebren und Iwahori-Hecke-Algebren in natürlicher Weise vorkommen.

2.1. Coxeter-Gruppen

Zunächst sei hier das Konzept der Coxeter-Gruppen eingeführt. Dies wird sehr schnell zum Begriff der Iwahori-Hecke-Algebra führen. Die Darstellung in diesem Abschnitt ist [3] entlehnt.

2.1.1. Definition.
a) Eine Gruppe W zusammen mit einem Erzeugendensystem $S \subseteq W$ heißt *Coxeter-Gruppe*, falls sie in der Form

$$W \cong \langle S || s^2 = 1, \overbrace{ss's\cdots}^{m_{ss'}} = \overbrace{s'ss'\cdots}^{m_{ss'}} \text{ für alle } s, s' \in S, s \neq s' \rangle$$

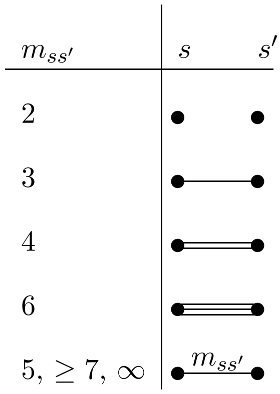
endlich präsentiert ist. Dabei soll

$$1 \neq m_{ss'} = m_{s's} \in I\!N \dot{\cup} \{\infty\}$$

gelten.
b) Die Matrix

$$M(W,S) = [m_{ss'}]_{s,s' \in S}$$

mit $m_{ss} := 1$ für alle $s \in S$ heißt die (W,S) zugeordnete *Coxeter-Matrix*.
c) Der *Coxeter-Graph* $\Gamma(W,S)$ ist als gewichteter Graph wie folgt definiert:
i) Die Ecken von $\Gamma(W,S)$ stehen in Bijektion zu S.
ii) Die Ecken $s, s' \in S$, $s \neq s'$ sind in Abhängigkeit von $m_{ss'}$ gemäß folgender Tabelle verbunden.



d) (W, S) heißt *unzerlegbar*, falls $\Gamma(W, S)$ ein zusammenhängender Graph ist.

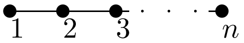
Da (W, S) durch $\Gamma(W, S)$ bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist, wird im folgenden häufig die Schreibweise $W(\Gamma)$ bzw. $M(\Gamma)$ verwendet.

Der nachfolgende Satz gibt einen vollständigen Überblick über die endlichen Coxeter-Gruppen, auf die sich die vorliegende Arbeit beschränkt.

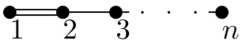
2.1.2. Satz. Es sei (W, S) eine endliche unzerlegbare Coxeter-Gruppe. Dann ist $\Gamma(W, S)$ bis auf Isomorphie genau einer der im Anschluß angegebenen Graphen.

Beweis. Siehe [3], Satz VI.4.1.1. $\sharp$

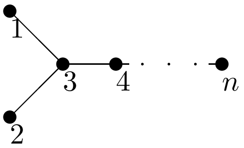
Die Graphen A_n, B_n und D_n werden als *klassische Typen*, die Graphen E_6, E_7, E_8, F_4 und G_2 als *exzeptionelle Typen* und die Graphen H_3, H_4 und $I_2(p)$ als *nicht-kristallographische Typen* bezeichnet. Zur Erklärung dieser Bezeichnungsweisen sei ebenfalls auf [3] verwiesen. Allerdings wird hier eine andere als dort angegebene Numerierung verwendet.

A_n 

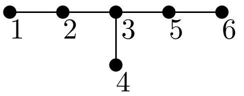
für $n \geq 1$

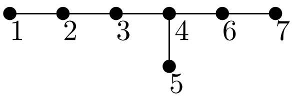
B_n 

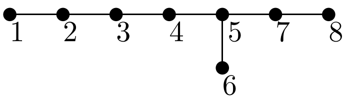
für $n \geq 2$

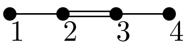
D_n 

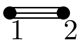
für $n \geq 4$

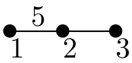
E_6 

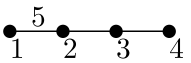
E_7 

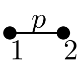
E_8 

F_4 

G_2 

H_3 

H_4 

$I_2(p)$ 

für $p = 5$ oder $p \geq 7$

Abschließend noch eine für das folgende nützliche Definition.

2.1.3. Definition.
a) Es sei $w \in (W, S)$. Eine Folge $\{s_i\}_{i=1}^l \subseteq S$ mit

$$w = s_1 \cdot \ldots \cdot s_l \in W$$

heißt ein *Ausdruck* für w.
b) Die *Länge* $l(w)$ von w ist das Minimum über die Längen aller Ausdrücke für w.
c) Ein Ausdruck $\{s_1, \ldots, s_l\}$ für w mit l Termen heißt *reduziert*, falls $l = l(w)$ ist.

2.2. Iwahori-Hecke-Algebren

In Analogie zur oben angegebenen Definition 2.1.1. für Coxeter-Gruppen kann jetzt der Begriff der Iwahori-Hecke-Algebra definiert werden. In der Literatur, etwa in [54], Abschnitt 3.3., sind verschiedene, jedoch äquivalente Definitionen zu finden. Hier wird die nachfolgende, sich für die vorliegende Arbeit als besonders zweckmäßig erweisende Definition ausgewählt, siehe etwa 4.10.

2.2.1. Definition. Es seien R ein kommutativer Ring mit 1 und Γ einer der Coxeter-Graphen aus Satz 2.1.2. Eine R-Algebra $H_R(\Gamma, \{q_s; s \in S\})$ mit Einselement T_1 zusammen mit einem Erzeugendensystem $\{T_s; s \in S\}$ heißt *Iwahori-Hecke-Algebra zum Graphen* Γ *mit Parametern* $\{q_s\}$, falls sie in der Form

$$H_R(\Gamma, \{q_s; s \in S\}) :=$$

$$\langle T_s; s \in S || T_s^2 = q_s \cdot T_1 + (q_s - 1) \cdot T_s, \overbrace{T_s T_{s'} T_s \cdots}^{m_{ss'}} = \overbrace{T_{s'} T_s T_{s'} \cdots}^{m_{ss'}}, s, s' \in S, s \neq s' \rangle$$

als assoziative R-Algebra endlich präsentiert ist. Dabei seien $M(\Gamma) = [m_{ss'}]$ die Γ zugeordnete Coxeter-Matrix und $\{q_s; s \in S\}$ eine Menge von Einheiten in R, für die $q_s = q_{s'}$ gilt, falls $m_{ss'}$ ungerade ist.

In obiger Definition bedeutet *endlich präsentiert* das folgende: Die $\{T_s\}$ sind freie Erzeuger einer assoziativen Algebra. Dann ist $H(\Gamma)$ die Faktoralgebra dieser Algebra nach dem von den Relationen erzeugten Ideal.
Im folgenden wird häufig zur Vereinfachung der Schreibweise auf die Angabe

des Grundrings R und der Parameter $\{q_s\}$ verzichtet und, wie soeben bereits geschehen, die Bezeichnungsweise

$$H(\Gamma) = H_R(\Gamma, \{q_s; s \in S\})$$

verwendet.
Der folgende Satz setzt die Strukturen der Iwahori-Hecke-Algebra $H(\Gamma)$ und der Coxeter-Gruppe $W(\Gamma)$ zueinander in Beziehung. Anschließend folgen noch einige Bemerkungen, die sich direkt an die Definition 2.2.1. anschließen.

2.2.2. Satz.
a) Für jedes $w \in W(\Gamma)$ und einen reduzierten Ausdruck $\{s_1, \ldots, s_l\}$ für w ist

$$T_w := T_{s_1} \cdot \ldots T_{s_l} \in H(\Gamma)$$

wohldefiniert, das heißt, unabhängig vom gewählten reduzierten Ausdruck.
b) Die Menge $\{T_w; w \in W(\Gamma)\}$ ist eine R-Basis für $H(\Gamma)$. Insbesondere ist also

$$\mathrm{Rang}_R(H(\Gamma)) = |W(\Gamma)|.$$

Beweis.
a) Siehe [3], Proposition IV.1.5.5.
b) Siehe [3], Aufgabe IV.2.23. $\sharp$

2.2.3. Bemerkung. Aus der Definition und dem eben vorgestellten Satz erhält man die folgenden Multiplikationsregeln für $s \in S$ und $w \in W$:

$$T_s T_w = \begin{cases} T_{sw} & \text{falls } l(sw) > l(w), \\ q_s \cdot T_{sw} + (q_s - 1) \cdot T_w & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$T_w T_s = \begin{cases} T_{ws} & \text{falls } l(ws) > l(w), \\ q_s \cdot T_{ws} + (q_s - 1) \cdot T_w & \text{sonst.} \end{cases}$$

Daraus folgt außerdem daß die T_s für $s \in S$ und damit die T_w für $w \in W$ invertierbare Elemente sind.

2.2.4. Bemerkung. Aus der Präsentation für $H(\Gamma)$ folgt sofort, daß

$$\begin{array}{lcccc} \mathrm{ind} & : & T_s & \mapsto & q_s \\ \mathrm{sgn} & : & T_s & \mapsto & -1 \end{array}$$

zu Algebrenhomomorphismen $H(\Gamma) \to R$ fortgesetzt werden können. Diese werden als *Indexdarstellung* und als *Signumsdarstellung* bezeichnet.

2.2.5. Definition. *(Dualität)*
Ebenfalls aus der Präsentation für $H(\Gamma)$ folgt, daß die Abbildung

$$\sigma : T_w \mapsto (-1)^{l(w)} \cdot \mathrm{ind}(T_w) \cdot T_{w^{-1}}^{-1}$$

einen involutorischen R-Algebren-Automorphismus beschreibt. Dieser Automorphismus operiert auf den Darstellungen von $H(\Gamma)$, dabei wird einer solchen Darstellung D die *duale* Darstellung

$$D^* : h \mapsto D(h^\sigma) \text{ für } h \in H(\Gamma)$$

zugeordnet.

2.3. Hecke-Algebren

Wie sich zeigen wird, ist der Begriff der Iwahori-Hecke-Algebra ein Spezialfall eines allgemeineren Konzeptes, das hier zunächst kurz vorgestellt werden soll.

Es seien R ein kommutativer Ring mit 1, G eine nicht notwendig endliche Gruppe und $U \leq G$ eine Untergruppe.
Ferner sei $(1_U)^G$ der vom trivialen RU-Modul nach RG induzierte Modul. Dieser ist R-frei mit einer kanonischen Basis, die durch die Rechtsnebenklassen $U|G$ von U in G indiziert ist, und damit kanonisch isomorph zum Permutationsmodul von RG auf den Rechtsnebenklassen nach U.
Ziel der nun folgenden Betrachtungen ist die Beschreibung des Endomorphismenrings dieses Permutationsmoduls.

Für $c \in G$ sei $k_c \in I\!N \dot\cup \{\infty\}$ definiert als

$$k_c := [U : (U \cap U^c)].$$

2.3.1. Definition. Der *Kommensurator* von U in G ist definiert als

$$\mathrm{Com}_G(U) := \{c \in G; k_c < \infty\} \subseteq G.$$

Man beachte, daß die in [47], Abschnitt I.3., angegebene Definition dieses Begriffs etwas von der hier verwendeten abweicht. Es ist $\mathrm{Com}_G(U)$ eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge von G, die U enthält. Nun sei D ein

Repräsentantensystem für die U-U-Doppelnebenklassen in $\mathrm{Com}_G(U)$. Für $d \in D$ sei $A_d \in \mathrm{End}_{RG}((1_U)^G)$ definiert als

$$A_d : Ug \mapsto \sum_u Udug,$$

wobei u über ein Repräsentantensystem der Rechtsnebenklassen von $U^d \cap U$ in U läuft.

2.3.2. Satz. (Schur)
Die Menge $\{A_d; d \in D\}$ ist eine R-Basis für $\mathrm{End}_{RG}((1_U)^G)$.

Beweis. Dieser Satz ist wohl zum ersten Mal in [64] bewiesen worden. Einen Beweis findet man etwa auch in [49]; dieser läßt sich wörtlich auf die hier vorliegende Situation, daß G nicht notwendig endlich ist, übertragen. $\sharp$

2.3.3. Definition. Die dem Paar (G,U) zugeordnete *Hecke-Algebra* ist definiert als

$$H_R(\mathrm{Com}_G(U),U) := \mathrm{End}_{RG}^{opp}((1_U)^G).$$

Nun werden zwei wichtige Situationen beschrieben, in denen Hecke-Algebren in natürlicher Weise auftreten.

2.3.4. (Siehe [47], Abschnitt IV.)
Es seien

$$\begin{array}{lllll} G & := & GL_2^+(\mathbb{Q}) & := & \{g \in \mathbb{Q}^{2\times 2}; \det(g) > 0\}, \\ M & := & & & \{g \in \mathbb{Z}^{2\times 2}; \det(g) > 0\}, \\ U & := & SL_2(\mathbb{Z}) & := & \{g \in \mathbb{Z}^{2\times 2}; \det(g) = 1\}. \end{array}$$

Dann gilt

$$\mathrm{Com}_G(U) = G$$

nach [47], Korollar IV.1.3., also ist $H_{\mathbb{Z}}(G,U)$ im Sinne von Definition 2.3.3. wohldefiniert. Außerdem ist M eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge von G, die U enthält. Nun betrachtet man die Unteralgebra

$$H_{\mathbb{Z}}(M,U) := \langle\{A_d; d \in D \cap M\}\rangle_{\mathbb{Z}\text{-Algebra}}$$

von $H_{\mathbb{Z}}(G,U)$. Dann ist mit [47], Lemma I.4.9., $\{A_d; d \in D \cap M\}$ eine $\mathbb{Z}$-Basis für $H_{\mathbb{Z}}(M,U)$.

Die verallgemeinerte Hecke-Algebra $H_{\mathbb{Z}}(M, U)$ operiert auf dem Raum der ganzen elliptischen Modulformen und bewirkt dort die zum ersten Mal von E. Hecke in [37] beschriebenen Endomorphismen. Diese werden heute in der Literatur auch als *Hecke-Operatoren* bezeichnet und stellen im Rahmen der Theorie der elliptischen Modulformen einen wichtigen Begriff dar. Diese Interpretation von Hecke-Algebren ist außerdem die Erklärung für den zweiten Teil des Namens 'Iwahori-*Hecke*-Algebra'.

2.3.5. Es sei G eine endliche Gruppe, natürlich ist dann $\mathrm{Com}_G(U) = G$. Außerdem sei k ein Körper, dessen Charakteristik nicht Teiler der Ordnung $|U|$ der Untergruppe ist. Dann kann A_d mit der Rechtsmultiplikation mit

$$|U|^{-1} \cdot \sum_{(u',u)} u'du \in kG$$

identifiziert werden. Dabei laufen u' über alle Elemente von U und u über ein Repräsentantensystem der Rechtsnebenklassen von $U^d \cap U$ in U.
Jetzt sei noch

$$e_U := |U|^{-1} \cdot \sum_{g \in U} g \in kG.$$

Dann ist $(1_U)^G$ ein projektiver kG-Modul und es gilt nach [16], Beispiel 11.22.:

$$(1_U)^G \cong e_U \cdot kG \text{ und } \mathrm{End}_{kG}^{opp}((1_U)^G) \cong e_u \cdot kG \cdot e_U.$$

2.3.6. Satz. (Fitting-Korrespondenz)
Wird sogar die Gruppenordnung G von der Charakteristik von k nicht geteilt, so bewirkt die Restriktion von kG nach $e_U \cdot kG \cdot e_U$ eine Bijektion zwischen den irreduziblen Darstellungen von kG, die Konstituenten von $(1_U)^G$ sind, und den irreduziblen Darstellungen von $e_U \cdot kG \cdot e_U$.

Beweis. Siehe [16], Satz 11.25. $\sharp$

Im nächsten Abschnitt wird sich zeigen, daß Iwahori-Hecke-Algebren gerade als Hecke-Algebren für geeignet gewählte endliche Gruppen auftreten.

2.3.7. Bemerkung. Im Rahmen der modularen Darstellungstheorie endlicher Gruppen erweist sich die Betrachtung von Moduln für die Hecke-Algebra $H_k(G, U)$ als sehr hilfreich. Dabei ist üblicherweise k ein Körper mit endlicher Charakteristik, die wohl die Gruppenordnung $|G|$, nicht aber

die Ordnung $|U|$ teilen darf. Unter geeigneten Voraussetzungen kann man aus der Untersuchung der Modulkategorie von $H_k(G,U)$ viele Informationen über die Modulkategorie von kG gewinnen.
Wie sich zeigt, läßt sich die Operation von $H_k(G,U)$ auf gewissen ihrer Moduln unter Rechnereinsatz effizient berechnen, auch wenn die direkte Untersuchung interessanter Moduln für kG nicht möglich ist. Mehr über die Anwendungen dieser *Kondensationsmethoden* findet man etwa in den Arbeiten [57] oder [55].

2.4. Gruppen mit Tits-System

In diesem Abschnitt wird gezeigt werden, daß Iwahori-Hecke-Algebren in der Tat als Hecke-Algebren für eine große und wichtige Klasse von Gruppen vorkommen. Hier richtet sich die Darstellung wieder nach [3].

2.4.1. Definition. Eine Gruppe G zusammen mit Untergruppen B und N und einer Teilmenge $S \subseteq N|(B \cap N)$ der Menge der Linksnebenklassen von $B \cap N$ in N heißt *Gruppe mit Tits-System*, falls folgendes erfüllt ist:
i) $G = \langle B, N \rangle$ und $B \cap N \trianglelefteq N$,
ii) $W := N/(B \cap N) = \langle S \rangle$ und $s^2 = 1 \in W$ für alle $s \in S$,
iii) $sBw \subseteq BwB \cup BswB$ für alle $s \in S$, $w \in W$,
iv) $sBs \not\subseteq B$ für alle $s \in S$.

Hierbei beachtet man, daß die Elemente $s \in S$ und $w \in W$ nach Definition Nebenklassen, also selbst Mengen sind. Das Produkt XY von Teilmengen X und Y von G sei definiert als

$$XY := \{x \cdot y; x \in X, y \in Y\} \subseteq G.$$

W heißt die der Gruppe G zugeordnete *Weyl-Gruppe*.

Der Zusammenhang zu den schon betrachteten Coxeter-Gruppen wird durch den folgenden Satz gestiftet.

2.4.2. Satz.
a) (W, S) ist eine Coxeter-Gruppe.
b) Es ist

$$G = \dot{\bigcup}_{w \in W} BwB.$$

Beweis. Siehe [3], Sätze IV.2.4.2. und IV.2.3.1. $\sharp$

Im folgenden seien K ein Körper der Charakteristik 0 und G eine endliche Gruppe mit Tits-System und Weyl-Gruppe $W = W(\Gamma)$. Man betrachtet den KG-Modul $(1_B)^G$. Für $w \in W$ setzt man noch

$$T_w := |B|^{-1} \cdot \sum_{g \in BwB} g \in KG.$$

Dann ist $\{T_w; w \in W\}$ eine K-Basis für $\mathrm{End}_{KG}^{opp}((1_B)^G)$, wie die Sätze 2.3.2. und 2.4.2. zeigen.
In dieser Situation hat man außerdem noch eine weitere sehr schöne Beschreibung des Endomorphismenrings, womit endlich die versprochene Interpretation für Iwahori-Hecke-Algebren gegeben wird. Der nachfolgende Satz ist übrigens der Grund für den ersten Teil des Namens '*Iwahori*-Hecke-Algebra'.

2.4.3. Satz. (Iwahori)
Es ist

$$\mathrm{End}_{KG}^{opp}((1_B)^G) \cong H_K(\Gamma, \{q_s\})$$

mit den *Indexparametern*

$$q_s := [B : (B \cap B^s)]$$

für alle $s \in S$. Dabei ist Γ der der Weyl-Gruppe W zugeordnete Coxeter-Graph.

Beweis. Siehe [42]. $\sharp$

Die wichtigsten Beispiele für diese Situation, ja geradezu die Motivation für Definition 2.4.1., sind die folgenden.

2.4.4. Es sei $k = GF(p^f)$ der Körper mit p^f Elementen. Weiter sei G eine *endliche Gruppe vom Lie-Typ über* k, wie sie etwa in [9], Abschnitte 4. und 13., als Gruppe von Automorphismen einer gewissen Lie-Algebra definiert wird. Im folgenden werden nur die zerfallenden Typen und die Typen betrachtet, die von einem Graphenautomorphismus eines Coxeter-Graphen mit einfachen Kanten herkommen. Dann existiert insbesondere zu einem gegebenen Typ zu jeder Primzahl p eine Gruppe dieses Typs über

einem endlichen Körper der Charakteristik p.
Dann ist G eine Gruppe mit Tits-System und Weyl-Gruppe $W = W(\Gamma)$. Die Zusammenhangskomponenten des zugehörigen Coxeter-Graphen Γ sind in der Liste nach Satz 2.1.2. zu finden; es kommen genau die klassischen und exzeptionellen Typen vor.

Die Untergruppe $T := B \cap N$ wird auch als *maximaler Torus* bezeichnet. Für alle so vorkommenden Gruppen kann die Ordnung des maximalen Torus explizit angegeben werden, siehe etwa [9], Abschnitte 8.6. und 14.1.

$$|T| = 1/d \cdot \begin{cases} \Phi_1(q)^n & \text{für die zerfallenden Typen,} \\ \Phi_1(q)^{\lceil n/2 \rceil}\Phi_2(q)^{\lfloor n/2 \rfloor} & \text{für } {}^2A_n(q^2), \\ \Phi_1(q)^{n-1}\Phi_2(q) & \text{für } {}^2D_n(q^2), \\ \Phi_1(q)^4\Phi_2(q)^2 & \text{für } {}^2E_6(q^2), \\ \Phi_1(q)^2\Phi_3(q) & \text{für } {}^3D_4(q^3). \end{cases}$$

Dabei sei $q := p^f$ die Mächtigkeit des Definitionskörpers von G für die zerfallenden Typen und $q^2 := p^f$ respektive $q^3 := p^f$ in den anderen Fällen. Weiter bezeichne n jeweils die Mächtigkeit $|S|$ von S, Φ_e das e-te Kreisteilungspolynom und $\lceil\cdot\rceil$ und $\lfloor\cdot\rfloor$ seien die obere und untere Gauß-Klammer-Funktion. Der Vorfaktor $d \in I\!N$ wird in [9] für alle Fälle explizit angegeben. Das Produkt der Kreisteilungspolynome, die in den Ordnungsformeln oben vorkommen, wird nach M. Broué und G. Malle, siehe [8], auch als das *Ordnungspolynom* von T bezeichnet.

Für alle solchen Gruppen G sind die Indexparameter explizit bekannt und etwa in [10], Abschnitt 13.5. zu finden. Man stellt fest, daß es sich immer um Potenzen der oben definierten Zahl q handelt. Man setzt deshalb:

$$q_s := q^{c_s}$$

mit geeigneten natürlichen Zahlen c_s für alle $s \in S$.
Dies gibt nun Anlaß zu der zentralen Definition der vorliegenden Arbeit schlechthin:

2.4.5. Definition. Es seien K ein Körper der Charakterisitik 0 und v eine Unbestimmte über K. Dann heißt

$$H_{K(v)}(\Gamma, \{v^{2c_s}\})$$

die G zugeordnete *generische Iwahori-Hecke-Algebra*.

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird von generischen Iwahori-Hecke-Algebren nur in diesem Kontext gesprochen, das heißt, zu einer generischen Iwahori-Hecke-Algebra gibt es immer auch eine endliche Gruppe vom Lie-Typ mit der jeweiligen Menge von Indexparametern. Eine erste Auskunft über die neu gewonnenen generischen Algebren gibt der nächste Satz.

2.4.6. Satz.
a) $\mathbb{Q}(v)$ ist Zerfällungskörper für $H_{\mathbb{Q}(v)}(\Gamma, \{v^{2c_s}\})$.
b) Es sei $H_{\mathbb{Q}(v)}(\Gamma, \{v^{2c_s}\})$ nicht vom Typ

$$H_{\mathbb{Q}(v)}(B_n, \{v^4, v^2, v^2, \dots, v^2\}).$$

Dann sind alle irreduziblen Darstellungen von $H_{\mathbb{Q}(v)}(\Gamma, \{v^{2c_s}\})$ sogar schon über $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ realisierbar, das heißt, sie kommen von Darstellungen von $H_{\mathbb{Z}[v,v^{-1}]}(\Gamma, \{v^{2c_s}\})$ her.

Beweis.
a) Das wird von C. Benson und C. Curtis in [2] gezeigt.
b) Der Fall gleicher Parameter c_s, wird von A. Gyoja in [36] behandelt. Für die Typen G_2, B_n und F_4 kommen auch ungleiche Parameter vor, dies wird in [17], Abschnitt 76C., von G. Lusztig in [53] mit Ausnahme des oben explizit genannten Falls respektive von K. Bremke in [6] untersucht. ♯

Nach Kenntnisstand des Verfassers ist nicht bekannt, ob die Aussage des zweiten Teils des obigen Satzes auch für den dort ausgeklammerten Fall gilt.

3. Zerlegungstheorie

Nachdem im Abschnitt 2. das Konzept der Iwahori-Hecke-Algebren vorgestellt wurde, soll es hier nun darum gehen, die notwendigen Begriffe der Zerlegungstheorie zunächst in einem allgemeinen Kontext und beginnend mit Abschnitt 3.6. im speziellen Rahmen für Iwahori-Hecke-Algebren zu erläutern. Auf explizite Beweise wird weiterhin meistenteils verzichtet. Die hier gewählte Darstellung ist der von M. Geck in [30] gegebenen entlehnt.

3.1. Symmetrische Algebren

Ausgangspunkt der Betrachtungen zur Zerlegungstheorie ist der folgende Begriff.

3.1.1. Definition. Es seien R ein kommutativer Ring mit 1 und H_R eine R-freie R-Algebra mit Basis $\{T_i\}$. H_R heißt *symmetrische Algebra*, falls eine symmetrische R-Bilinearform $(\cdot,\cdot)$ auf H_R existiert, für die folgendes gilt:
i) (Assoziativität) $(xy, z) = (x, yz)$ für alle $x, y, z \in H_R$,
ii) Die Gram-Matrix von $(\cdot,\cdot)$ bezüglich $\{T_i\}$ ist über R invertierbar.

Im folgenden werde die zu $\{T_i\}$ bezüglich $(\cdot,\cdot)$ duale Basis mit $\{T_i^*\}$ bezeichnet.

Für die Zerlegungstheorie wichtige Invarianten werden durch die nachfolgende Definition beschrieben. Eine erste wichtige Anwendung wird in dem anschließenden Satz gegeben.
Es seien k ein Körper der Charakteristik 0 und H_k eine symmetrische Algebra über k mit Basis $\{T_i\}$. Außerdem sei k schon ein Zerfällungskörper für H_k. Weiter sei χ ein irreduzibler Charakter von H_k, das heißt, χ ist Charakter einer irreduziblen Darstellung von H_k.

3.1.2. Definition. (Siehe [16], Proposition 9.17.)
Das *Schur-Element* $c_\chi \in k$ *zum Charakter* χ ist definiert als

$$c_\chi := \chi(1)^{-1} \cdot \sum_i \chi(T_i) \cdot \chi(T_i^*).$$

Dies ist wohldefiniert, das heißt, unabhängig von der gewählten Basis für H_k.

3.1.3. Satz. Es sei χ ein irreduzibler Charakter von H_k. Genau dann ist die zu χ gehörende Darstellung projektiv, wenn $c_\chi \neq 0$ ist. Insbesondere ist H_k genau dann halbeinfach, wenn $c_\chi \neq 0$ für alle irreduziblen Charaktere von H_k ist.

Beweis. Siehe [30], Satz 1.2.6. $\sharp$

3.2. Spezialisierung

Im Grunde genommen wird jede Zerlegungstheorie, wie sie etwa auch für Gruppenalgebren schon lange Gegenstand von Untersuchungen ist, durch das folgende formale Konzept beschrieben.

Es seien $f : R \to S$ ein Homomorphismus von Ringen mit 1, und H_R eine symmetrische R-Algebra mit Basis $\{T_i\}$. Ferner sei M die Gram-Matrix der der Symmetrie von H_R zugrundeliegenden assoziativen Bilinearform.
Dann kann man S via f als R-Modul auffasssen. Damit wird

$$H_S = H_f := H_R \otimes_R S$$

zu einer symmetrischen S-Algebra mit Basis $\{T_i \otimes 1\}$ unter der via f vererbten Bilinearform. Der Übergang von H_R zu H_S wird als *Spezialisierung* bezeichnet.

3.3. Zerlegungstheorie

In diesem Abschnitt sei K ein Körper der Charakteristik 0, R ein Bewertungsring in K mit maximalem Ideal $\wp$ und Restklassenkörper $k := R/\wp$. Man beachte, daß K als Körper der Charakteristik 0 perfekt ist. Im folgenden sei außerdem vorausgesetzt, daß k ein perfekter Körper ist. Alle in der vorliegenden Arbeit betrachteten Moduln seien endlich erzeugt und frei über dem jeweiligen Grundring.

Ist H_R eine symmetrische R-Algebra, so beschäftigt sich die Zerlegungstheorie mit dem Vergleich der irreduziblen Darstellungen von H_K und H_k. Dabei bezeichnen H_K und H_k die aus H_R durch Spezialisierung, wie in 3.2. beschrieben, via der natürlichen Injektion von R nach K respektive via des kanonischen Epimorphismus von R nach k gewonnenen Algebren.
Im folgenden wird nun die für die erfolgreiche Durchführung dieses Programms notwendige Theorie entwickelt. Zunächst soll gezeigt werden, daß

die in den Voraussetzungen oben beschriebene Situation eine sehr natürliche ist.

3.3.1. Satz. Es sei $S \subseteq K$ ein Teilring mit 1 und $I \trianglelefteq S$ ein Primideal in S. Dann existiert ein Bewertungsring R *über* S in K, das heißt, für das maximale Ideal $\wp \trianglelefteq R$ gilt $\wp \cap S = I$. Insbesondere ist der Integritätsring S/I ein Teilring von $R/\wp$.

Beweis. Siehe [34], Satz 5.1. $\sharp$

Die nächsten Sätze zeigen, daß man einen beliebigen H_K-Modul bereits über R *realisieren* kann, das heißt, daß die darstellenden Matrizen für die Basiselemente von H_R bereits Einträge über R haben. Somit kann man diese Matrixeinträge einer *Konstantenreduktion*, das heißt, dem kanonischen Epimorphismus von R nach k, unterwerfen und erhält damit aus einer Darstellung für H_K eine für H_k.
Beginnt man nun mit einer irreduziblen Darstellung für H_K und betrachtet verschiedene Realisierungen über R, so wird ferner gezeigt, daß die in der Konstantenreduktion dieser Realisierungen vorkommenden irreduziblen H_k-Moduln nicht von der Wahl der Realisierung abhängen.

3.3.2. Satz. Es sei V_K ein endlich erzeugter H_K-Modul. Dann existiert ein H_R-stabiler R-freier R-Teilmodul von V_K mit

$$V_K \cong V_R \otimes_R K.$$

Beweis. Der in [34], Sätze 5.2. und 5.3., angegebene Beweis läßt sich wörtlich auf die hier vorliegende Sitiuation übertragen. $\sharp$

3.3.3. Satz. (Brauer, Nesbitt)
Es seien V_R, V_R' zwei H_R-stabile R-freie R-Teilmoduln von V_K mit

$$V_K \cong V_R \otimes_R K \cong V_R' \otimes_R K.$$

Dann haben die H_k-Moduln

$$V_k := V_R \otimes_R k \text{ und } V_k' := V_R' \otimes_R k$$

bis auf Reihenfolge die gleichen Konstituenten.

Beweis. Dies geht für Moduln von Gruppenalgebren auf [5] zurück. Die allgemeine Situation wird von M. Geck in [30], Satz 1.3.4., behandelt. ♯

3.3.4. Es seien weiter K ein Körper der Charakteristik 0, R ein Bewertungsring in K mit maximalem Ideal $\wp$ und perfektem Restklassenkörper $k := R/\wp$. Diese Voraussetzungen werden in allen später untersuchten Fällen erfüllt sein.
Wegen der vorangehenden Sätze ist klar, daß unter diesen Voraussetzungen über diesen Reduktionsprozeß jeder irreduziblen Darstellung von H_K die Liste der Vielfachheiten, mit denen die irreduziblen H_k-Darstellungen als Konstituenten in der Konstantenreduktion einer R-Realisierung vorkommen, eindeutig zugeordnet ist. Also hat man eine Abbildung

$$D : G_0(H_K) \to G_0(H_k)$$

der jeweiligen *Grothendieck-Gruppen*, hier also der abstrakten freien abelschen Gruppen, die von den jeweiligen irreduziblen Darstellungen frei erzeugt werden, siehe [16], Abschnitt 16B.

3.3.5. Definition. Die Matrix von D bezüglich der natürlichen Basen der Grothendieck-Gruppen heißt die *Zerlegungsmatrix*, deren Einträge heißen *Zerlegungszahlen*.

3.4. Heben von Idempotenten

Ein weiterer wichtiger Begriff ist der des *Idempotents*. Über die Beziehungen zwischen den Idempotenten in den Algebren H_R und H_k gibt der nächste Satz Auskunft.
Im folgenden sei der Bewertungsring R diskret. Ferner sei K^* die Vervollständigung von K bezüglich der von R induzierten Bewertung und $R^* \subseteq K^*$ der zugehörige Bewertungsring mit maximalem Ideal $\wp^*$. Dann ist R^* wieder diskret.

3.4.1. Satz. Es seien K ein Zerfällungskörper für H_K und $f \in H_k$ ein Idempotent. Dann existiert ein Idempotent $e \in H_R$ mit

$$e \otimes 1_k = f.$$

Beweis. (Siehe auch [16], Aufgabe 6.16. Dort wird zusätzlich noch H_K als halbeinfach vorausgesetzt.)
Es ist $R^*/\wp^* \cong R/\wp \cong k$. Also existiert mit [58], Satz 10.17., ein Idempotent $e' \in H_{R^*}$ mit $e' \otimes 1_k = f$. Da K Zerfällungskörper für H_K ist, folgert man mit [15], Satz 29.21. und Korollar 29.22., die Existenz eines Idempotents $e'' \in H_K$ mit

$$e'' \cdot H_{K^*} \cong e' \cdot H_{K^*}.$$

Es ist H_{K^*} eine endlich-dimensionale Algebra, also gilt auch

$$(1 - e'') \cdot H_{K^*} \cong (1 - e') \cdot H_{K^*}.$$

Nun schließt man wie in [16], Aufgabe 6.14., daß eine Einheit $u \in H_{K^*}$ existiert mit

$$u \cdot e'' \cdot u^{-1} = e'.$$

Jetzt benutzt man den Satz von Wedderburn-Malcev, siehe [48], Satz 2.8., demnach existiert eine Teilalgebra S mit 1 von H_K und ein Isomorphismus

$$\psi : H_K \to S \oplus \mathrm{Rad}(H_K).$$

Ferner ist S als K-Algebra isomorph zu einer direkten Summe voller Matrixringe über K. Nach [15], Korollar 29.22., ist

$$\mathrm{Rad}(H_{K^*}) = \mathrm{Rad}(H_K) \otimes_K K^*.$$

Damit ist

$$\psi^* := \psi \otimes 1 : H_{K^*} \to (S \otimes_K K^*) \oplus \mathrm{Rad}(H_{K^*})$$

ein Isomorphismus und $S \otimes_K K^*$ ist isomorph zu einer direkten Summe voller Matrixringe über K^*. Wie im Beweis zu [48], Satz 2.8., schließt man jetzt, daß u von der Form

$$u = s \cdot (1 + x) \text{ für ein } s \in S \otimes_K K^*, x \in \mathrm{Rad}(H_{K^*})$$

ist. Die von der $\wp^*$-adischen Metrik auf H_{K^*} induzierte Topologie wird via ψ^* auf $(S \otimes_K K^*) \oplus \mathrm{Rad}(H_{K^*})$ übertragen. Nun sei $N \in \mathbb{N}$ zunächst beliebig. Es ist S dicht in $S \otimes_K K^*$ und die Menge der Einheiten in einem vollen Matrixring über K^* ist als Urbild von $K^* \setminus \{0\}$ unter dem stetigen Determinantenhomomorphismus offen. Also existiert eine Einheit $s' \in S$, so daß

$$\psi^{*-1}(s - s') \in \wp^{*N} \cdot H_{R^*}$$

ist. Analog ist $\mathrm{Rad}(H_K)$ dicht in $\mathrm{Rad}(H_{K^*})$. Also existiert $x' \in \mathrm{Rad}(H_K)$, für das man

$$\psi^{*-1}(x - x') \in \wp^{*N} \cdot H_{R^*}$$

hat. Jetzt setzt man

$$u' := s' \cdot (1 + x') \text{ und } e := u' \cdot e'' \cdot u'^{-1}.$$

Ein Standardargument unter Benutzung der Stetigkeit von Addition, Multiplikation und Inversion zeigt jetzt, daß für N genügend groß

$$e - e' \in \wp^* \cdot H_{R^*}$$

gilt. Damit ist $e \otimes 1_k = f$ und $e \in H_{R^*} \cap H_K = H_R$. ♯

Damit kann man nun den nächsten Satz beweisen, der in gewissem Sinne eine zur Definition duale Interpretation der Einträge der Zerlegungsmatrix liefert. Dieser bildet die entscheidende Grundlage für den rechnerischen Zugang zur Bestimmung von Zerlegungsmatrizen, wie er in Abschnitt 4. beschrieben wird.

3.4.2. Satz. (Brauer-Reziprozität)
Es seien R diskret und H_K eine halbeinfache Algebra mit Zerfällungskörper K. Ferner sei φ eine irreduzible Darstellung von H_k mit projektiver Hülle

$$P_\varphi \cong f_\varphi \cdot H_k,$$

das heißt, $P_\varphi/\mathrm{Rad}(P_\varphi)$ ist einfach und isomorph zu φ. Dabei ist $f_\varphi \in H_k$ ein geeignetes primitives Idempotent. Schließlich sei noch $e \in H_R$ mit $e \otimes 1_k = f$. Dann kommt jede irreduzible Darstellung χ von H_K mit der Vielfachheit

$$d_{\chi\varphi} \cdot \dim_k(\mathrm{End}_{H_k}(\varphi))$$

als Konstituent in $e \cdot H_K$ vor. Dabei bezeichnet $d_{\chi\varphi}$ die zu χ und φ gehörende Zerlegungszahl.

Beweis. Siehe [58], Satz 10.22. ♯

Da nach Satz 3.4.1. Idempotente von H_k nach H_K gehoben werden können, kann man jedem projektiven H_k-Modul einen Charakter von H_K zuordnen. Die so erhaltenen Charaktere werden auch als *projektive Charaktere* bezeichnet. Nimmt man nun zusätzlich noch an, daß k ein Zerfällungskörper für H_k ist, so besagt der obige Satz, daß man die projektiv-unzerlegbaren Charaktere gerade als die Spaltenvektoren der Zerlegungsmatrix erhält.

Zunächst sei jetzt der folgende (un)wichtige Spezialfall untersucht. Für die später zu beschreibenden Rechnungen ist dieser Fall unwichtig, weil er eine triviale Zerlegungsabbildung nach sich zieht. Von theoretischer Wichtigkeit ist er aber allemal. In der Literatur sind verschiedene Beweise zu finden, siehe etwa [3], Aufgabe IV.2.26., [17], Satz 68.17., oder [30], Satz 1.3.8. Hier wird ein Beweis angegeben, der in [17], Bemerkung 68A.(i), skizziert ist.

3.4.3. Satz. (Tits-Deformationssatz)
Es seien H_K eine Algebra mit Zerfällungskörper K und H_k halbeinfach. Dann ist H_K halbeinfach und k ist Zerfällungskörper für H_k. Ferner induziert die Zerlegungsabbildung eine Bijektion zwischen den irreduziblen Darstellungen von H_K und denen von H_k.

Beweis. Es sei M ein R-freier H_R-Modul, so daß $M \otimes K$ ein irreduzibler Modul für H_K ist. Dann ist die Konstantenreduktion $M/(\wp \cdot M)$ ein projektiver H_k-Modul. Mit [16], Satz 30.11., ist dann auch M projektiv, also von der Form

$$M \cong e \cdot H_R$$

für ein primitives Idempotent $e \in H_R$. Also ist $M \otimes K$ projektiv und damit H_K halbeinfach.
Aber mit e ist auch $e \otimes 1_k$ primitiv, außerdem kommt jede irreduzible Darstellung für H_k in der Konstantenreduktion eines einfachen H_K-Moduls vor. Daraus folgt mit Satz 3.4.2. die Behauptung. $\sharp$

3.5. Blöcke

In diesem Abschnitt seien H_K eine halbeinfache Algebra mit Zerfällungskörper K und H_k habe k als Zerfällungskörper und R sei diskret. Es sei weiter

$$1 = \sum \epsilon_i \in H_R$$

die Zerlegung der 1 in zentral-primitive Idempotente. Nach [22], Satz I.12.9., ist die korrespondierende Zerlegung $1 = \sum \overline{\epsilon_i} \in H_k$ die Zerlegung der 1 in zentral-primitive Idempotente dort.

Man bemerkt zunächst, daß ϵ_i mit dem Lemma von Schur auf allen irreduziblen Darstellungen von H_K entweder wie die Identität oder wie die Null operiert. Eine analoge Aussage gilt natürlich für $\overline{\epsilon_i}$.
Der i-te *Block* von H_k ist die Menge aller irreduziblen Darstellungen von H_k, auf denen $\overline{\epsilon_i}$ die Identität bewirkt. Der i-te *Block* von H_K ist die Menge aller irreduziblen Darstellungen von H_K, auf denen ϵ_i die Identität bewirkt. Daraus folgt, daß bei entsprechender Anordnung der irreduziblen Darstellungen von H_K und H_k die Zerlegungsmatrix Blockdiagonalgestalt hat. Also reicht es aus, die Zerlegungsmatrizen für die einzelnen Blöcke anzugeben.

3.5.1. Satz. Zwei irreduzible Darstellungen φ, φ' von H_k liegen genau dann in einem Block, wenn eine Folge $\varphi = \varphi_1, \ldots, \varphi_n = \varphi'$ existiert, so daß für alle $1 \leq i \leq n-1$ jeweils φ_i und φ_{i+1} Konstituenten eines Projektiven sind.

Beweis. Siehe [58], Satz 7.55. $\sharp$

Daraus folgt, daß die Blöcke die feinste Aufteilung der gesamten Zerlegungsmatrix in Blockdiagonalform liefern.

3.5.2. Bemerkung. Ist $z \in H_R$ ein zentrales Element, so operiert z respektive $\overline{z}$ auf den irreduziblen Darstellungen von H_K respektive H_k wie ein Skalar. Aus dem obigen Satz folgt, daß dieser Skalar für ein festes z für alle irreduziblen Darstellungen von H_k in einem Block der gleiche ist, und außerdem gleich der Reduktion des Skalars, mit dem z auf den irreduziblen Darstellungen von H_K operiert.

Eine wichtige Invariante eines Blocks wird durch die nächste Definition beschrieben.

3.5.3. Definition. Es sei B ein Block von H_K. Man betrachtet zu jeder Darstellung χ von H_K in B das Schur-Element c_χ. Ferner sei ν die von R induzierte Bewertung von K. Dann heißt

$$d_B := \max_{\chi \in B}\{\nu(c_\chi)\}$$

der *Defekt* des Blockes B.

3.5.4. Ist für eine irreduzible Darstellung χ im Block B die Bewertung $\nu(c_\chi) \leq 0$, so folgt aus [16], Proposition 9.17., daß das Blockidempotent ϵ_B zum Block B bereits durch das zentral-primitive Idempotent $\epsilon_\chi \in H_K$ zur Darstellung χ gegeben ist. Also ist χ die einzige irreduzible Darstellung von H_K in B und χ ist eine projektive Darstellung von H_R. Daraus folgt mit [15], Satz 62.11., daß χ unter Konstantenreduktion irreduzibel bleibt.
Also liegt in diesem Fall eine triviale Zerlegungsabbildung vor. Solch ein Block B wird auch als *trivialer Block* bezeichnet. Aus den soeben gemachten Bemerkungen folgt also, daß nichttriviale Blöcke immer echt positiven Defekt haben.

3.6. Iwahori-Hecke-Algebren als symmetrische Algebren

Nun werden die oben eingeführten Begriffe auf ihre Bedeutung für Iwahori-Hecke-Algebren hin untersucht, hierzu sei an Definition 2.2.1. erinnert. Es stellt sich heraus, daß Iwahori-Hecke-Algebren in der Tat symmetrische Algebren sind. Die Betrachtung der Schur-Elemente führt direkt zu einer weiteren zentralen Definition.

3.6.1. Bemerkung. (Siehe [17], Lemma 68.29.)
Die Iwahori-Hecke-Algebra $H_R(\Gamma, \{q_s\})$ mit der Basis $\{T_w; w \in W(\Gamma)\}$ ist eine symmetrische R-Algebra unter

$$(T_v, T_w) := \delta_{v^{-1},w} \cdot \operatorname{ind}(T_w).$$

Es sei $H := H_{K(v)}(\Gamma, \{v^{2c_s}\})$ eine generische Iwahori-Hecke-Algebra im Sinne von Definition 2.4.5. Dann ist mit Satz 2.4.6. schon $K(v)$ ein Zerfällungskörper für H. Mit den Bemerkungen in Abschnitt 3.7.1. oder 3.7.7. sowie Satz 3.4.3. folgt, daß H außerdem halbeinfach ist.

3.6.2. Definition. Das *Poincaré-Polynom* von H ist definiert durch:

$$P_H := \sum_{w \in W(\Gamma)} \operatorname{ind}(T_w).$$

Die Poincaré-Polynome sind für alle vorkommenden Typen explizit bekannt und etwa in [9], Satz 10.2.3. und Propositionen 10.2.5. und 14.2.1, zu finden. Die dort angegebenen Resultate implizieren auch, daß P_H ein Produkt von Kreisteilungspolynomen in der Unbestimmten $u = v^2$ ist.

3.6.3. Definition. Zu einem irreduziblen Charakter χ von H heißt

$$D_\chi := P_H \cdot c_\chi^{-1}$$

der *generische Grad von* χ.

3.6.4. Bemerkung. Diese Definition geht auf C. Benson und C. Curtis [2] zurück. Die generischen Grade sind von verschiedenen Autoren für alle vorkommenden Typen explizit bestimmt worden und etwa in [10], Abschnitte 13.5. und 13.8., wiedergegeben. In [17], Satz 68.31., wird gezeigt, daß für die in der vorliegenden Arbeit betrachteten generischen Iwahori-Hecke-Algebren, siehe Definition 2.4.5., die D_χ sogar rationale Polynome in der Unbestimmten $u = v^2$ sind. Aus der Definition der c_χ und der Realisierbarkeit der irreduziblen Darstellungen von H über allen Bewertungsringen, über denen die Unbestimmte v eine Einheit ist, folgt, daß die D_χ als Produkt einer rationalen Zahl, eines Monoms in u und von Kreisteilungspolynomen in u darstellbar sind.
Unter den in Abschnitt 3.7. betrachteten Spezialisierungsabbildungen kann man also auch die generischen Grade D_χ abbilden. Unter der Abbildung D_1, siehe 3.7.7., erhält man dabei Charaktergrade der Weyl-Gruppe. Unter der Abbildung D_q, siehe 3.7.1., erhält man den Grad des zu χ in Fitting-Korrespondenz, siehe 2.3.6., stehenden Charakters der endlichen Gruppe mit Tits-System G, siehe etwa [17], Proposition 68.30.

Die folgende Aussage ist schon länger bekannt, siehe etwa [10], Proposition 10.5.5., und dort für die unter der Abbildung D_q, siehe 3.7.1., spezialisierten generische Grade formuliert. Dem Verfasser ist aus der Literatur kein Beweis bekannt, der vollständig im Kontext von generischen Iwahori-Hecke-Algebren formuliert ist.
Zu einer endlichen Coxeter-Gruppe W sei $w_0 \in W$ das eindeutig bestimmte längste Element, siehe [3], Korollar VI.1.6.3. Es ist von der Ordnung 2.

3.6.5. Satz. Es sei H eine generische Iwahori-Hecke-Algebra, und χ ein irreduzibler Charakter von H. Mit χ^* werde der zu χ duale irreduzible Charakter im Sinne von Definition 2.2.5. bezeichnet. Dann existiert ein Monom x_χ in der Unbestimmten v mit positivem oder negativem Exponenten, so daß für die Schur-Elemente c_χ, c_{χ^*} gilt:

$$c_\chi = x_\chi^2 \cdot \mathrm{ind}(T_{w_0})^{-1} \cdot c_{\chi^*}.$$

Dabei bezeichne *ind* die Indexdarstellung, siehe Definition 2.2.4.

Beweis. Es ist nach Definition 3.1.2.

$$\chi(1) \cdot c_\chi = \sum_{w \in W} \operatorname{ind}(T_w)^{-1} \cdot \chi(T_w) \cdot \chi(T_{w^{-1}}).$$

Da mit $w \in W$ auch $w_0 w$ über alle Elemente aus W läuft, hat man

$$\chi(1) \cdot c_\chi = \sum_{w \in W} \operatorname{ind}(T_{w_0 w})^{-1} \cdot \chi(T_{w_0 w}) \cdot \chi(T_{w^{-1} w_0}).$$

Da weiter $l(w_0 w) + l(w^{-1}) = l(w_0)$ für alle $w \in W$ gilt, hat man unter Benutzung der Rechenregeln 2.2.3., daß

$$T_{w_0 w} \cdot T_{w^{-1}} = T_{w_0} \text{ und } T_w \cdot T_{w^{-1} w_0} = T_{w_0}$$

gilt. Das ergibt wegen $\operatorname{ind}(T_w) = \operatorname{ind}(T_{w^{-1}})$:

$$\chi(1) \cdot c_\chi = \sum_{w \in W} \operatorname{ind}(T_w) \cdot \operatorname{ind}(T_{w_0})^{-1} \cdot \chi(T_{w_0} T_{w^{-1}}^{-1}) \cdot \chi(T_w^{-1} T_{w_0}).$$

Es sei D die zu χ gehörende Darstellung. M. Geck hat in [30], Satz 2.4.8., gezeigt, daß $D(T_{w_0})$ ohne Einschränkung als Matrix der Form $x_\chi \cdot M$ angenommen werden kann, wobei M eine Diagonalmatrix der Ordnung 1 oder 2 und x_χ ein Monom wie oben beschrieben ist. Damit ist für alle $w \in W$

$$\chi(T_{w_0}^2 T_w) = x_\chi^2 \cdot \chi(T_w).$$

Somit ist

$$\chi(1) \cdot c_\chi = x_\chi^2 \cdot \operatorname{ind}(T_{w_0})^{-1} \cdot \sum_{w \in W} \operatorname{ind}(T_w) \cdot \chi(T_{w_0}^{-1} T_{w^{-1}}^{-1}) \cdot \chi(T_w^{-1} T_{w_0}).$$

Nun verwendet man die Definition der Dualität, siehe 2.2.5., damit hat man

$$\chi^*(T_{w_0} T_w) = (-1)^{l(w_0)+l(w)} \cdot \operatorname{ind}(T_{w_0}) \cdot \operatorname{ind}(T_w) \cdot \chi(T_{w_0}^{-1} T_{w^{-1}}^{-1}),$$

also folgt wieder mit $\operatorname{ind}(T_w) = \operatorname{ind}(T_{w^{-1}})$

$$\chi(1) \cdot c_\chi = x_\chi^2 \cdot \operatorname{ind}(T_{w_0})^{-1} \cdot \sum_{w \in W} \operatorname{ind}(T_w)^{-1} \cdot \chi^*(T_{w_0} T_w) \cdot \chi^*(T_{w^{-1}} T_{w_0}^{-1}).$$

Nun bilden auch die Mengen

$$\{T_{w_0} T_w ; w \in W\} \text{ und } \{\operatorname{ind}(T_w)^{-1} \cdot T_{w^{-1}} T_{w_0}^{-1} ; w \in W\}$$

zueinander duale Basen von H, also ist schließlich

$$\chi(1) \cdot c_\chi = x_\chi^2 \cdot \operatorname{ind}(T_{w_0})^{-1} \cdot \chi^*(1) \cdot c_{\chi^*}.$$

$\sharp$

3.7. Zerlegungstheorie generischer Iwahori-Hecke-Algebren

In diesem Abschnitt werden die für Iwahori-Hecke-Algebren interessanten Spezialisierungen und Zerlegungsabbildungen angesprochen. Dazu sei an die Bemerkungen in 3.3.4. erinnert.
Es sei $H_{\mathbb{Q}(v)}(\Gamma, \{v^{2c_s}\})$ eine generische Iwahori-Hecke-Algebra. Man beachte, daß mit Satz 2.4.6. $\mathbb{Q}(v)$ ein Zerfällungskörper für diese Algebra ist.

3.7.1. Es sei $q \in \mathbb{N}$. Dann ist das Polynom $v^2 - q \in \mathbb{Q}[v]$ entweder irreduzibel oder es existieren rationale Quadratwurzeln von q. Eine zunächst beliebige dieser Wurzeln werde mit $q^{1/2}$ bezeichnet. Man betrachtet nun die folgende Lokalisierung:

$$R_q := \begin{cases} \mathbb{Q}[v]_{(v^2-q)}, & \text{falls } v^2 - q \in \mathbb{Q}[v] \text{ irreduzibel,} \\ \mathbb{Q}[v]_{(v-q^{1/2})}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dies ist ein diskreter Bewertungsring in $\mathbb{Q}(v)$. Also hat man eine zugehörige Zerlegungsabbildung

$$D_q : G_0(H_{\mathbb{Q}(v)}(\Gamma, \{v^{2c_s}\})) \to G_0(H_{\mathbb{Q}[q^{1/2}]}(\Gamma, \{q^{c_s}\})).$$

Nun ist aber mit den Bezeichnungen aus Satz 2.4.3.

$$H_{\mathbb{Q}[q^{1/2}]}(\Gamma, \{q^{c_s}\}) \cong \mathrm{End}^{opp}_{\mathbb{Q}[q^{1/2}]}((1_B)^G),$$

also ist $H_{\mathbb{Q}[q^{1/2}]}(\Gamma, \{q^{c_s}\})$ als Endomorphismenring eines halbeinfachen Moduls halbeinfach und mit Satz 3.4.3. ist *cum grano salis* D_q die Identität.

3.7.2. Man betrachtet den algebraischen Zahlkörper $\mathbb{Q}[q^{1/2}]$. Falls $q \in \mathbb{Q}$ ein Quadrat ist, so sei dabei wieder $q^{1/2} \in \mathbb{Q}$ eine beliebige Quadratwurzel von q, in diesem Fall ist natürlich $\mathbb{Q}[q^{1/2}] = \mathbb{Q}$. Ist $q \in \mathbb{Q}$ kein Quadrat, so liegt eine Erweiterung von $\mathbb{Q}$ vom Grad 2 vor.
Es seien $l \in \mathbb{N}$ eine Primzahl, die q nicht teilt, und R_l die Lokalisierung des Ganzheitsringes $\mathcal{O}$ im algebraischen Zahlkörper $\mathbb{Q}[q^{1/2}]$ an einem zunächst beliebigen Primideal über $l \cdot \mathcal{O}$. Dann hat man die Zerlegungsabbildung

$$D_l : G_0(H_{\mathbb{Q}[q^{1/2}]}(\Gamma, \{q^{c_s}\})) \to G_0(H_{GF(l)[\overline{q}^{1/2}]}(\Gamma, \{\overline{q}^{c_s}\})).$$

Dabei bezeichnet $\overline{q}$ die Restklasse von q modulo l.

D_l ist wegen des folgenden Satzes von großer Bedeutung für die Zerlegungstheorie der in 2.4.4. behandelten Gruppen G mit Tits-System. Im folgenden sei l kein Teiler der Ordnung $|T|$.
Dazu sei $\tilde{K} \geq \mathbb{Q}[q^{1/2}]$ ein algebraischer Zahlkörper, der Zerfällungskörper für $\tilde{K}G$ ist. Ferner seien $S \subseteq \tilde{K}$ ein Bewertungsring über R mit Restklassenkörper $\tilde{k} \geq GF(l)[\overline{q}^{1/2}]$. Außerdem sei noch $\tilde{k}$ ein Zerfällungskörper für $\tilde{k}G$. Die Existenz solch eines Körpers $\tilde{K}$ ist ein wohlbekanntes Ergebnis der Zerlegungstheorie endlicher Gruppen, siehe etwa [16], Korollar 17.2.
Also hat man eine Zerlegungsabbildung

$$\tilde{D}_l : G_0(H_{\tilde{K}}(\Gamma, \{q^{c_s}\})) \to G_0(H_{\tilde{k}}(\Gamma, \{\overline{q}^{c_s}\}))$$

von Iwahori-Hecke-Algebren und eine Zerlegungsabbildung

$$D_{l,G} : G_0(\tilde{K}G) \to G_0(\tilde{k}G)$$

von Gruppenalgebren.

3.7.3. Satz. (Dipper)
Die Zerlegungsmatrix von $\tilde{D}_l$ ist eine Teilmatrix der Zerlegungsmatrix von $D_{l,G}$ von der Form

$$D_{l,G} = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{D}_l & \star \\ \hline 0 & \star \end{array}\right].$$

Dabei stehen die Zeilen von $D_{l,G}$ und $\tilde{D}_l$ in Fitting-Korrespondenz, siehe 2.3.6.

Beweis. Zum ersten Mal wurde das von R. Dipper in [19] beobachtet. Einen anderen Beweis findet man bei G. Hiss [38], Abschnitt 5.1. Die Voraussetzung, daß l kein Teiler von $|T|$ sei, wird nur benötigt, um zu zeigen, daß unterhalb der Teilmatrix $\tilde{D}_l$ alle Einträge verschwinden. $\sharp$

3.7.4. Korollar. Die Algebra $H_{GF(l)[\overline{q}^{1/2}]}(\Gamma, \{\overline{q}^{c_s}\})$ hat $GF(l)[\overline{q}^{1/2}]$ zum Zerfällungskörper, also ist

$$D_l = \tilde{D}_l.$$

Beweis. (Siehe [30], Satz 4.2.5.)
Mit $D_{l,G}$ ist auch $\tilde{D}_l$ surjektiv. Damit sind die Charaktere von $H_{\tilde{k}}(\Gamma, \{\overline{q}^{c_s}\})$ sogar schon über $GF(l)[\overline{q}^{1/2}]$ realisierbar. Daraus folgt mit [22], Satz I.19.3., die Behauptung. $\sharp$

Jetzt kann endlich die für die vorliegende Arbeit zentrale Zerlegungsabbildung angesprochen werden.

3.7.5. Es sei

$$R_e := \mathbb{Q}[v]_{(\Phi_{2e})}$$

die Lokalisierung von $\mathbb{Q}[v]$ an dem vom $2e$-ten Kreisteilungspolynom Φ_{2e} erzeugten Ideal. Dies ist ein diskreter Bewertungsring in $\mathbb{Q}(v)$. Man erhält die zugehörige Zerlegungsabbildung

$$D_e : G_0(H_{\mathbb{Q}(v)}(\Gamma, \{v^{2c_s}\})) \to G_0(H_{\mathbb{Q}[\zeta_{2e}]}(\Gamma, \{\zeta_e^{c_s}\})).$$

Dabei bezeichnet ζ_e eine primitive e-te Einheitswurzel über $\mathbb{Q}$. Synonym zu dieser Schreibweise wird in den späteren Kapiteln die Abbildung D_e auch als Φ_e-modulare Zerlegungsabbildung bezeichnet.

Es wird die Aufgabe der nächsten Abschnitte sein, für alle interessanten, bisher in der Literatur noch nicht oder nicht vollständig untersuchten Iwahori-Hecke-Algebren vom exzeptionellen Typ die Zerlegungsmatrizen D_e so weit als möglich zu bestimmen.
Doch zunächst seien noch kurz zwei Fragen beleuchtet. Zum einen kann die Frage, für welche Werte e die spezialisierte Algebra $H_{\mathbb{Q}[\zeta_{2e}]}(\Gamma, \{\zeta_e^{c_s}\})$ halbeinfach ist, genau beantwortet werden. Zum anderen ist der Fall $e = 1$ ein interessanter Spezialfall.

3.7.6. Satz. Es ist $H_{\mathbb{Q}[\zeta_{2e}]}(\Gamma, \{\zeta_e^{c_s}\})$ genau dann halbeinfach, wenn

$$c_\chi \not\equiv 0 \bmod \Phi_{2e} \cdot R_e$$

für alle irreduziblen Charaktere χ von $H_{\mathbb{Q}(v)}(\Gamma(W,S), \{v^{2c_s}\})$ gilt.

Beweis. (Siehe [30], Satz 1.3.8.)
Man beachte, daß die Schur-Elemente c_χ für alle irreduziblen Charaktere χ von $H_{\mathbb{Q}(v)}(\Gamma, \{v^{2c_s}\})$ bereits in R_e liegen. Gilt $c_\chi \not\equiv 0$ für alle irreduziblen Charaktere, so folgt aus den Bemerkungen in 3.5.4., daß $H_{\mathbb{Q}[\zeta_{2e}]}(\Gamma, \{\zeta_e^{c_s}\})$ halbeinfach ist. Ist umgekehrt $H_{\mathbb{Q}[\zeta_{2e}]}(\Gamma, \{\zeta_e^{c_s}\})$ halbeinfach, so hat man eine Bijektion zwischen den irreduziblen Darstellungen von $H_{\mathbb{Q}(v)}(\Gamma, \{v^{2c_s}\})$ und den irreduziblen Darstellungen von $H_{\mathbb{Q}[\zeta_{2e}]}(\Gamma, \{\zeta_e^{c_s}\})$, wie Satz 3.4.3. zeigt. Daraus folgt die Behauptung mit der Definition der c_χ. $\sharp$

3.7.7. Für den Fall $e = 1$ wird die Unbestimmte v zu -1 spezialisiert und es ist

$$H_{\mathbb{Q}[\zeta_{2e}]}(\Gamma, \{\zeta_e^{c_s}\}) \cong \mathbb{Q}W(\Gamma),$$

wobei $\mathbb{Q}W(\Gamma)$ die Gruppenalgebra der Weyl-Gruppe $W(\Gamma)$ bezeichnet. Da $\mathbb{Q}W(\Gamma)$ halbeinfach ist, liegt hier eine triviale Zerlegungsabbildung vor, und die irreduziblen Darstellungen von $H_{\mathbb{Q}(v)}(\Gamma, \{v^{2c_s}\})$ stehen in Bijektion zu denen von $\mathbb{Q}W(\Gamma)$.
Also können die irreduziblen Charaktere von $H_{\mathbb{Q}(v)}(\Gamma, \{v^{2c_s}\})$ genauso parametrisiert werden, wie das für die Charaktere von $\mathbb{Q}W(\Gamma)$ üblich ist, man vergleiche etwa [10], Abschnitte 13.5. und 13.8. Von dieser Parametrisierung wird auch im Verlaufe dieser Arbeit ständig Gebrauch gemacht.

3.7.8. Bemerkung. Aus der Definition 2.2.5. des der Dualität zugrundeliegenden Automorphismus folgt, daß das Dualisieren mit den hier betrachteten Spezialisierungsabbildungen vertauschbar ist. Das heißt, zwei zueinander duale Darstellungen haben unter der Zerlegungsabbildung genau die zueinander dualen Konstituenten. Damit wird auch die Blockstruktur der Zerlegungsabbildung respektiert, das heißt, man kann von *zueinander dualen Blöcken* sprechen und bei geeigneter Anordnung von Zeilen und Spalten haben solche Blöcke gleiche Zerlegungsmatrizen.
Außerdem stellt man fest, daß unter der Spezialisierungsabbildung D_e mit $e = 1$ der Dualität auf der Ebene der Weyl-Gruppen gerade das Tensorieren mit der Signumsdarstellung entspricht.

3.8. Zusammenhang zwischen den Zerlegungsabbildungen

Die vorgenannten Zerlegungsabbildungen sind nicht unabhängig voneinander. Für die weiteren Rechnungen wird gerade dieser Zusammenhang von großer Bedeutung sein.

3.8.1. Es habe q die multiplikative Ordnung e modulo l, es sei $e > 1$. Zunächst hat man

$$\Phi_e(v^2) = \begin{cases} \Phi_{2e}(v) & \text{für gerades } e, \\ \Phi_e(v)\Phi_{2e}(v), \Phi_{2e}(v) = \Phi_e(-v) & \text{für ungerades } e. \end{cases}$$

3.8.2. Man betrachtet den algebraischen Zahlkörper $\mathbb{Q}[q^{1/2}]$, siehe 3.7.2. Nun unterscheidet man wieder danach, ob $q \in \mathbb{Q}$ ein Quadrat ist oder nicht.

Ist $q \in \mathbb{Q}$ ein Quadrat, dann kann also die Wurzel $q^{1/2}$ so gewählt werden, daß $q^{1/2}$ die multiplikative Ordnung $2e$ modulo l hat.
Ist $q \in \mathbb{Q}$ kein Quadrat, so liegen im algebraischen Zahlkörper $\mathbb{Q}[q^{1/2}]$ möglicherweise zwei Primideale des Ganzheitsrings $\mathcal{O}$ über dem Ideal $l \cdot \mathcal{O}$. Aus der obigen Aussage über Kreisteilungspolynome folgt aber, daß die Lokalisierung R_l mit maximalem Ideal $\wp_l$ so gewählt werden kann, daß der gewählte Erzeuger $q^{1/2}$ die Ordnung $2e$ modulo $\wp_l$ hat.

Nun setzt man die eben beschriebenen konsistenten Wahlen voraus und betrachtet die Lokalisierung R_i des Ganzheitsringes $\mathcal{O}$ im algebraischen Zahlkörper $\mathbb{Q}[\zeta_{2e}]$ an einem beliebigen Primideal über $l \cdot \mathcal{O}$. Es sei D_i die zugehörige Zerlegungsabbildung.
Außerdem muß man noch voraussetzen, daß nicht der in Satz 2.4.6. genannte Ausnahmefall vorliegt. Das heißt, daß alle irreduziblen Darstellungen von $H_{\mathbb{Q}(v)}(\Gamma, \{v^{2c_s}\})$ schon über $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ realisierbar sind.
Dann gilt die zuerst von M. Geck in [27], [30] beobachtete Gleichheit

$$D_q \cdot D_l = D_e \cdot D_i.$$

Dabei ist D_q eine triviale Zerlegungsabbildung, in diesem Sinne faktorisiert also die Zerlegungsabbildung D_l über D_e.

Unter Benutzung dieser Gleichung erhält man den nächsten, wichtigen Satz.

3.8.3. Satz. (Siehe [27] und [30], Satz 4.2.7.)
Es liege nicht der in Satz 2.4.6. genannte Ausnahmefall vor. Ferner seien $e > 1$ und Φ_e kein Teiler des Ordnungspolynoms von T. Dann ist $\mathbb{Q}[\zeta_{2e}]$ ein Zerfällungskörper für $H_{\mathbb{Q}[\zeta_{2e}]}(\Gamma, \{\zeta_e^{c_s}\})$ und D_e ist surjektiv.

Beweis. Man betrachtet eine Zerlegung der 1 in eine Summe von primitiven orthogonalen Idempotenten in $H_{\mathbb{Q}[\zeta_{2e}]}(\Gamma, \{\zeta_e^{c_s}\})$. Für alle Primzahlen l, die größer als eine bestimmte Schranke sind, ist diese Zerlegung schon über R_i realisiert.
Durch zweifache Anwendung des Dirichletschen Satzes über die Primzahlen in arithmetischer Progression findet man, daß unendliche viele Primzahlen l existierten, so daß die multiplikative Gruppe modulo l eine durch e teilbare Ordnung hat, und daß weiter unendlich viele Primzahlen q existieren, die für ein festes solches l die Ordnung e besitzen. Also existiert ein Paar (l, q), so daß die oben erwähnte Zerlegung der 1 schon über R_i realisiert ist, und

daß q die multiplikative Ordnung e modulo l hat.
Außerdem sei noch $K \geq \mathbb{Q}[\zeta_{2e}]$ ein Zerfällungskörper für $H_{\mathbb{Q}[\zeta_{2e}]}(\Gamma, \{\zeta_e^{c_s}\})$, dieser existiert nach [16], Proposition 7.13. Weiter seien R_i' ein Bewertungsring von K über R_i und $D_{i'}$ die von R_i' bewirkte Zerlegungsabbildung. Außerdem sei D_j die von der Einbettung $\mathbb{Q}[\zeta_{2e}] \to K$ bewirkte 'Zerlegungsabbildung'.
Nach Satz 3.4.1. existiert eine Bijektion zwischen den Typen von Idempotenten von

$$H_K(\Gamma, \{\zeta_e^{c_s}\}) \text{ und } H_{GF(l)[\overline{q}^{1/2}]}(\Gamma, \{\overline{q}^{c_s}\}).$$

Da nach 3.7.4. schon $GF(l)[\overline{q}^{1/2}]$ ein Zerfällungskörper für die letztgenannte Algebra ist, hat man damit

$$D_l = D_e \cdot D_j \cdot D_{i'}$$

und die Bildbereiche von D_l und $D_e \cdot D_j$ haben denselben Rang. Aber D_l ist surjektiv, damit ist auch $D_e \cdot D_j$ surjektiv. Schließlich kommt aber D_j von einer Skalarerweiterung her, also folgt aus der Surjektivität von $D_e \cdot D_j$, daß D_j die Identität ist, und damit die Behauptung. $\sharp$

3.8.4. Korollar. Für Paare (l, q) wie oben ist D_i sogar die Identität.

Beweis. Dies folgt aus der Bijektion zwischen den Typen von Idempotenten von $H_K(\Gamma, \{\zeta_e^{c_s}\})$ und $H_{GF(l)[\overline{q}^{1/2}]}(\Gamma, \{\overline{q}^{c_s}\})$. $\sharp$

Abschließend noch zwei Bemerkungen, die im folgenden sehr nützlich sein werden.

3.8.5. Bemerkung. *(Spezialisierung in einen endlichen Körper)*
Die oben betrachtete Spezialisierungsabbildung D_i wird bei den später beschriebenen expliziten Rechnungen eine wichtige Rolle spielen. Für ein festes $e > 1$ wählt man dabei eine zunächst beliebige Primzahl l und betrachtet wieder die von der Lokalisierung R_i des Ganzheitsringes $\mathcal{O}$ im algebraischen Zahlkörper $\mathbb{Q}[\zeta_{2e}]$ an einem beliebigen Primideal über $l \cdot \mathcal{O}$ bewirkte Zerlegungsabbildung D_i. Zur Untersuchung der Zerlegung einer Darstellung für eine generische Algebra unter D_e kann man die Verkettung $D_e \cdot D_i$ betrachten. Die unter D_e spezialisierte Darstellung wird also weiter spezialisiert in einen endlichen Körper der Charakteristik l.
Wie Korollar 3.8.4. zeigt, kann man bei geeigneter Wahl von l damit genau

das von D_e bewirkte Zerfällungsverhalten mit Hilfe von Moduln über einem endlichen Körper studieren. Leider ist die dort angegebene Schranke für l nicht effektiv, aber immerhin deutet die Aussage des Korollars darauf hin, daß das Spezialisieren in den endlichen Körper nützliche Aussagen über D_e liefern könnte.
Die Standardanwendung der Verkettung $D_e \cdot D_i$ ist die folgende. Stellt man fest, daß eine irreduzible Darstellung der generischen Algebra unter der von dieser Verkettung bewirkten Zerlegungsabbildung irreduzibel bleibt, so gilt dies auch unter der Zerlegungsabbildung D_e. Damit kann man direkt aus dem Zerlegungsverhalten über einem endlichen Körper auf das Zerlegungsverhalten modulo e zurückschließen. Ein ersten Beispiel dazu findet man etwa in 5.2.5.

3.8.6. Bemerkung. Diese Beobachtung geht auf R. Rouquier zurück, siehe [30], Beispiel 4.5.3.
Es sei $e = l^m$ eine Primzahlpotenz. Dann ist l ein Teiler von $\Phi_e(1)$. Die in 3.7.1. und 3.7.2. beschriebenen Spezialisierungen und Zerlegungsabildungen D_q und D_l sind auch im Falle $q = 1$ wohldefiniert. In dieser Situation ist die unter D_q spezialisierte Iwahori-Hecke-Algebra gerade die Gruppenalgebra $\mathbb{Q}W$ der Weyl-Gruppe $W = W(\Gamma)$, D_q ist nach wie vor die Identität und $\mathbb{Q}$ ist mit Satz 3.4.3. ein Zerfällungskörper für $\mathbb{Q}W$. Also geht die Zerlegungsabbildung D_l in die l-modulare Zerlegungsabbildung $D_{l,W}$ der Weyl-Gruppe über. Also faktorisiert $D_{l,W}$ über D_e.

4. Näheres zu den Rechnungen

In diesem Kapitel soll näher auf die zur Behandlung der in dieser Arbeit interessierenden Beispiele benutzten rechnerischen Ideen und Methoden eingegangen werden.

Im folgenden wird eine generische Iwahori-Hecke-Algebra nur noch durch ihr Diagramm identifiziert, der Grundkörper und die Parameter werden nicht mehr explizit erwähnt. Da die vorliegende Arbeit sich im weiteren mit der Algebra $H(E_8)$ und gewissen parabolischen Teilabgebren beschäftigt, kann für die Parameter ohnehin ohne Einschränkung $c_s = 1$ angenommen werden. Die zu den im folgenden vorkommenden Iwahori-Hecke-Algebren gehörenden Coxeter-Matrizen stehen, was die Numerierung der Ecken des zugehörigen Coxeter-Graphen angeht, im Einklang mit der nach Satz 2.1.2. angegebenen Liste.

4.1. Benutzte Programme und Programmsysteme

Bei den zu beschreibenden Rechnungen wurden vom Verfasser mehrere Computer-Algebra-Systeme, namentlich GAP, MAPLE, CHEVIE, die MeatAxe und der VectorEnumerator eingesetzt. In Ermangelung geeigneter, üblicher deutscher Bezeichnungsweisen sollen auch hier die englischsprachigen verwendet werden.

Eine Beschreibung der in der MeatAxe benutzten Ideen findet man in der Originalarbeit von R. Parker [59]. Hier kommt die in Aachen von M. Ringe entwickelte Implementation [62] zum Einsatz. Die im VectorEnumerator verwendeten Ideen sind von S. Linton in [50], [51] beschrieben worden, der auch die hier benutzte Implementation [52] geschrieben hat. Das System MAPLE ist in [11] dokumentiert. Eine Dokumentation des ebenfalls in Aachen von M. Schönert und vielen anderen entwickelten Systems GAP ist in [63] zu finden. Das System CHEVIE wird von M. Geck, G. Hiss, F. Lübeck, G. Malle und G. Pfeiffer [31] entwickelt. Vom Verfasser wurden einige der darin enthaltenen vorhandenen Programme zum Rechnen mit endlichen Weyl-Gruppen, Iwahori-Hecke-Algebren und deren Charaktertafeln, zur Berechnung von Kazhdan-Lusztig-Polynomen und zur Konstruktion von Darstellungen von Iwahori-Hecke-Algebren benutzt. Diese Programme sind von GAP aus zugänglich und wurden dem Verfasser schon vor ihrer Veröffentlichung zur Verfügung gestellt. Am Rande sei bemerkt, daß die in der Liste nach Satz 2.1.2. angegebene Numerierung von der in CHEVIE gewählten abweicht.

Wie in 3.7.7. bereits bemerkt wurde, stehen die irreduziblen Charaktere von $H(\Gamma)$ zu denen der zugehörigen Weyl-Gruppe in Bijektion. Im folgenden werden diese also genauso parametrisiert, wie das von den Weyl-Gruppen bekannt ist. Dazu sei nochmals auf [10], Abschnitte 13.5. und 13.8., verwiesen. Dort werden zu den Charakteren einer Weyl-Gruppe auch jeweils die generischen Grade, siehe 3.6.4., angegeben. Im Falle der unzerlegbaren exzeptionellen Typen werden dort explizite Listen angegeben, die auch in der Datenbank von CHEVIE enthalten sind. Für die unzerlegbaren klassischen Typen werden dort Algorithmen beschrieben, die es ermöglichen, aus der Parametrisierung eines Charakters den zugehörigen generischen Grad zu bestimmen. Entsprechende MAPLE-Programme wurden von M. Geck geschrieben und dem Verfasser ebenfalls zur Verfügung gestellt.
Die gewöhnlichen Charaktertafeln der unzerlegbaren exzeptionellen Weyl-Gruppen und der unzerlegbaren klassischen Weyl-Gruppen kleinen Rangs sind ebenfalls unter CHEVIE verfügbar. Die Numerierung der irreduziblen Charaktere von $H(\Gamma)$ wird von dort übernommen. Diese stimmt übrigens mit der in [13] angegebenen überein, soweit die Charaktertafeln von Weyl-Gruppen dort vorkommen.

4.2. Charaktertafeln von Iwahori-Hecke-Algebren

In [33] haben M. Geck und G. Pfeiffer das Konzept der Charaktertafel einer generischen Iwahori-Hecke-Algebra $H_{\mathbb{Q}(v)}$ entwickelt. M. Geck hat in [29] und [30] die Charaktertafeln für die exzeptionellen Iwahori-Hecke-Algebren $H(F_4)$, $H(E_6)$ und $H(E_7)$ bestimmt. Alle diese Charaktertafeln sind auch in CHEVIE verfügbar. Nach Kenntnisstand des Verfassers ist die Charaktertafel der Algebra $H(E_8)$ (noch) nicht bekannt.
Für alle in der vorliegenden Arbeit vorkommenden Iwahori-Hecke-Algebren vom klassischen Typ sind die Charaktertafeln explizit bekannt. Sie können im Prinzip aus den Ergebnissen von P. Hoefsmit [41], der sogar explizit darstellende Matrizen berechnet, bestimmt werden. Außerdem sind für diese Algebren Rekursionsformeln für die Charakterwerte bekannt, siehe die Arbeiten von A. Ram [61] und G. Pfeiffer [60]. Natürlich sind auch alle diese Tafeln in der Datenbank von CHEVIE enthalten.

4.2.1. Bemerkung. Die Einträge einer solchen Charaktertafel sind Polynome in der Unbestimmten v. Daher können sie unter der Abbildung Φ_e spezialisiert werden. Aus der Surjektivität der Zerlegungsabbildung Φ_e, siehe 3.8.3., folgt, daß der Rang der spezialisierten Charaktertafel von $H_{\mathbb{Q}(v)}$ gleich der Anzahl der Φ_e-modular irreduziblen Darstellungen von $H_{\mathbb{Q}[\zeta_{2e}]}$ ist, siehe auch [33], Abschnitt 4.1.

4.3. Bestimmung der Blöcke

Der erste Schritt zur Berechnung von Zerlegungsmatrizen ist die Bestimmung der Blockeinteilung.
Es sei ν die vom Bewertungsring $R_e \subseteq \mathbb{Q}(v)$ herkommende Bewertung, siehe 3.7.5. Wegen der speziellen Gestalt der Schur-Elemente c_χ für Iwahori-Hecke-Algebren, siehe 3.6.4., hat man wegen 3.8.1. zur Bestimmung von $\nu(c_\chi)$ nur die Vielfachheit des Kreisteilungspolynoms $\Phi_e(u)$ als Faktor von c_χ zu bestimmen. Insbesondere ist hier immer $\nu(c_\chi) \geq 0$.
Von zentraler Bedeutung ist nun der folgende Satz.

4.3.1. Satz. (Geck)
Es sei B ein Φ_e-Block von $H_{\mathbb{Q}(v)}$. Dann ist $\nu(c_\chi)$ für alle $\chi \in B$ konstant.

Beweis. Siehe [27]. ♯

Zur Bestimmung einer Partition aller irreduziblen Charaktere in Teilmengen, die Vereinigungen von Blöcken sind, benutzt man die nachfolgenden Kriterien. Algorithmisch gesprochen beginnt man also mit der Partition, die aus der Menge aller irreduziblen Charaktere besteht und führt folgende Schritte aus:

4.3.2. Eine erste Einteilung wird durch Satz 4.3.1. gegeben. Man bildet also die Teilmengen von irreduziblen Charakteren χ, für die der Defekt $\nu(c_\chi)$ gleich ist. Aus den Ausführungen in 3.5.4. folgt, daß ein gewöhnlicher Charakter vom Defekt $\nu(c_\chi) = 0$ einen trivialen Block bildet, in dem er der einzige irreduzible Charakter ist. Also teilt man die soeben gewonnene Teilmenge der irreduziblen Charaktere mit Defekt 0 in lauter einelementige Teilmengen auf.

4.3.3. Ist $e = l^m$ eine Primzahlpotenz, so folgt aus Bemerkung 3.8.6., daß die l-modulare Zerlegungsabbildung der zur betrachteten Algebra gehörenden Weyl-Gruppe über Φ_e faktorisiert, also sind die l-Blöcke der Weyl-Gruppe Vereinigungen von e-Blöcken der betrachteten Algebra. Man betrachtet nun die oben beschriebenen Teilmengen von irreduziblen Charakteren vom Defekt echt größer als 0 und bildet aus ihnen jeweils Teilmengen durch Schnittbildung mit den l-modularen Blöcken der Weyl-Gruppe, falls $e = l^m$ gilt, sonst läßt man die Mengen unverändert.

4.3.4. Man kann außerdem Bemerkung 3.5.2. in folgender Weise anwenden: Ist das längste Element $w_0 \in W(\Gamma)$ zentral in der Weyl-Gruppe, so folgt aus den Rechenregeln in Bemerkung 2.2.3., daß das zugehörige Basiselement $T_{w_0} \in H(\Gamma)$ ebenfalls zentral ist. T. Springer hat in den 'Corrections' zu [2] gezeigt, wie man aus der Charaktertafel der Weyl-Gruppe den Skalar für die Operation von T_{w_0} auf den irreduziblen Darstellungen für die generische Algebra bestimmen kann. Es ist jeweils ein Monom in der Unbestimmten v. Dies kann nun für $H(E_7)$ und $H(E_8)$ durchgeführt werden. In diesen Fällen hat man

$$W(E_7) \cong 2 \times S_6(2) \text{ und } W(E_8) \cong 2 \cdot O_8^+(2) : 2,$$

wie man in [3], Aufgaben VI.4.1. und VI.4.3., nachlesen kann. Die Charaktertafeln dieser Gruppen wurden von J. Frame in [26] berechnet und sind etwa in [13] wiedergegeben und auch in der Datenbank von GAP verfügbar. Zur Bestimmung der Blöcke für diese beiden Algebren nimmt man also die bisher bestimmte Partition der irreduziblen Charaktere her und bildet eine verfeinerte Partition, indem man nur die irreduziblen Charaktere zusammenfaßt, für die die oben bestimmten Skalare modulo $\Phi_{2e}(v)$ gleich sind. Für alle anderen in der vorliegenden Arbeit betrachteten Algebren verändert man in diesem Schritt die Partition nicht.

4.3.5. Schließlich betrachtet man noch diejenigen Teilmengen, die irreduzible Charaktere vom Defekt 1 enthalten. Man betrachtet die Reste der generischen Grade dieser Charaktere unter Polynomdivision durch Φ_e^a. Dabei bezeichnet Φ_e^a die maximale Potenz des e-ten Kreisteilungspolynoms, die noch das Poincaré-Polynom der betrachteten Algebra teilt. Aus den von M. Geck in [27] erzielten Ergebnissen folgt mit Satz 4.6.2. unten, daß diese Reste sich für irreduzible Charaktere in einem Block nur um ein Vorzeichen unterscheiden können. Also kann man noch eine verfeinerte Partition erhalten, indem man nur irreduzible Charaktere vom Defekt 1 zusammenfaßt, für die sich die oben bestimmten Reste nur um ein Vorzeichen unterscheiden.

Am Rande sei vermerkt, daß Φ_e^a auch das Schur-Element zum Indexcharakter teilt, wie man sofort nachrechnet. Also ist a auch der maximale Defekt eines Φ_e-Blockes der betrachteten Algebra.

Damit hat man eine Partition der irreduziblen Charaktere der betrachteten Algebra erhalten, die diese in Vereinigungen von Blöcken einteilt. Diese Partition wird für jeden Modulus e, für den Zerlegungszahlen für $H(E_8)$ bestimmt werden, am Beginn der entsprechenden Betrachtungen in Form einer Tabelle wiedergegeben, siehe etwa 5.2.1. Dabei werden die trivialen Blöcke, also die irreduziblen Charaktere vom Defekt 0 jeweils fortgelassen.
Wie sich herausstellt, ist die so gefundene Einteilung der irreduziblen Charaktere in fast allen später untersuchten Fällen sogar genau die Blockzerlegung. Dies folgt jeweils aus den weiteren zu einem Modulus e und einer Algebra angegebenen Ergebnissen. Die einzige Ausnahme ist in 10.9.3. zu finden.

4.4. Erzeugung von projektiven Charakteren

Die allgemeine Strategie zur Bestimmung von Zerlegungsmatrizen geht von Satz 3.4.2. aus. Man versucht, die Spalten der Zerlegungsmatrix, die nach diesem Satz als projektive Charaktere interpretiert werden können, zu approximieren. Dazu berechnet man zunächst eine ganze Reihe von projektiven Charakteren. Es ist das Ziel dieses Abschnitts, Methoden dafür anzugeben. In den nächsten Abschnitten wird dann erklärt, wie man daraus sukzessive bessere Approximationen an die Zerlegungsmatrix erhält.

Das wichtigste Hilfsmittel zur Erzeugung von projektiven Charakteren ist die Induktion projektiver Charaktere von parabolischen Teilalgebren. Dazu zunächst einige Vorbemerkungen.

4.4.1. Definition. Es sei $W = W(\Gamma)$ eine Coxeter-Gruppe mit Standarderzeugern S. Ferner sei $J \subseteq S$ eine Teilmenge von S. Dann heißt

$$W_J := \langle s \in J \rangle \leq W$$

die von J erzeugte *parabolische* Untergruppe.

Mit [3], Satz IV.1.8.2., ist dies wieder eine Coxeter-Gruppe mit Standarderzeugern J, deren Coxeter-Graph Γ_J gerade der von J erzeugte volle Untergraph von Γ ist.
Jetzt sei $H_J = H(\Gamma_J)$ die Iwahori-Hecke-Algebra zu diesem Untergraphen. Aus der Gestalt der Präsentationen für H und H_J folgt mit einem Rangargument, siehe Satz 2.2.2., daß H_J isomorph zu der von den $\{T_s; s \in J\}$ erzeugten *parabolischen Unteralgebra* von H ist.

In [9], Satz 2.5.8., wird die Existenz eines kanonischen Vetretersystems D für die Rechtsnebenklassen $W_J|W$ gezeigt, das für alle $w \in W_J$, $d \in D$ die Bedingung

$$l(wd) = l(w) + l(d)$$

erfüllt.

4.4.2. Bemerkung. Aus den Rechenregeln 2.2.3. folgt, daß H als H_J-Linksmodul und als H_J-Rechtsmodul frei von endlichem Rang ist.

Nun kann man den folgenden allgemeinen Satz anwenden.

4.4.3. Satz. Es seien H eine Algebra über einem Körper und H' eine Unteralgebra mit 1, so daß H als H'-Rechtsmodul und als H'-Linksmodul frei ist. Dann gilt:
Ist P ein projektiver H-Modul, so ist die Einschränkung $P_{H'}$ von P auf H' ein projektiver H'-Modul. Ist umgekehrt Q ein projektiver H'-Modul, so ist der induzierte Modul

$$Q^H := Q \otimes_{H'} H$$

ein projektiver H-Modul. Außerdem kommt jeder projektive H-Modul als direkter Summand eines von H' nach H induzierten projektiven H'-Moduls vor.

Beweis. Siehe [22], Lemma I.4.6. und Satz I.4.8. $\sharp$

4.4.4. Also erhält man projektive Charaktere für eine Iwahori-Hecke-Algebra H, indem man projektive Charaktere von parabolischen Unteralgebren induziert. Wie bereits in Satz 3.4.2. bemerkt wurde, kann ein projektiver Charakter als Spaltenvektor der Zerlegungsmatrix aufgefaßt werden, das heißt, man schreibt diesen Charakter als $\mathbb{Z}$-Linearkombination der irreduziblen Charaktere. Hat man einen projektiven Charakter einer parabolischen

Teilalgebra H_J gegeben, so ist man vor die Aufgabe gestellt, eine entsprechende Darstellung für den induzierten Charakter zu finden. Es ist nun klar, daß es ausreicht, wenn man die Zerlegung eines induzierten irreduziblen Charakters einer parabolischen Teilalgebra in die irreduziblen Charaktere der betrachteten Algebra kennt.
Nun ist aber die Induktion $\cdot \otimes_{H_J} H$ mit der Spezialisierung D_1 vertauschbar. Außerdem stehen die irreduziblen Charaktere einer generischen Iwahori-Hecke-Algebra via D_1 in Bijektion zu den irreduziblen Charakteren der jeweiligen Weyl-Gruppe. Also reicht es aus, jeden irreduziblen Charakter von W_J nach W zu induzieren und in die irreduziblen Charaktere dort zu zerlegen. Dies kann mit den charaktertheoretischen Algorithmen in GAP durchgeführt werden. Faßt man die so gefundenen Zerlegungen in Form einer Induktionsmatrix zusammen, so ist die Induktion eines projektiven Charakters auf eine Multiplikation eines Vektors mit einer Matrix zurückgeführt.

Dieses Verfahren wird in den betrachteten Beispielen sehr häufig angewendet und dort immer nur mit 'Induktion' bezeichnet, siehe etwa 5.2.3. Unter Umständen muß man dazu auch erst projektive Charaktere für eine parabolische Teilalgebra bestimmen, falls diese nicht schon aus früheren Arbeiten bekannt sind. Dazu kann man dieses Verfahren natürlich iterieren, siehe etwa Kapitel 10.
Am Rande sei vermerkt, daß im allgemeinen das Tensorprodukt zweier Darstellungen für eine Iwahori-Hecke-Algebra nicht wieder zu einer Darstellung unter der Diagonaloperation wird. Eine Ausnahme bilden hier die antisymmetrischen Potenzen der Spiegelungsdarstellung, siehe 4.8.2. Damit kann diese Methode, die sich im Falle von Gruppenalgebren als sehr leistungsfähig herausstellt hat, hier nur eingeschränkt benutzt werden.

4.4.5. Im Falle eines Blocks vom Defekt 1 kann dieselbe Idee, wie sie auch schon zur Bestimmung von Blöcken in 4.3.5. verwendet wurde, zur Berechnung von projektiven Charakteren benutzt werden. Aus den Ergebnissen in [27] folgt, daß ein projektiv-unzerlegbarer Charakter die Summe von genau zwei verschiedenen irreduziblen Charakteren ist. Betrachtet man die Reste der generischen Grade der irreduziblen Charaktere im Block unter Polynomdivision durch Φ_e^a, wobei Φ_e^a wieder die maximale Potenz des e-ten Kreisteilungspolynoms, die noch das Poincaré-Polynom der betrachteten Algebra teilt, ist, so folgt mit Satz 4.6.2. unten, daß diese Reste sich für irreduzible Charaktere, deren Summe ein projektiver Charakter ist, genau um ein Vorzeichen unterscheiden müssen.

Die genaue Kenntnis der Form der projektiv-unzerlegbaren Charaktere in Blöcken vom Defekt 1, zuweilen in Verbindung mit einigen induzierten projektiven Charakteren, legen in den meisten hier untersuchten Fällen die Zerlegungsmatrix schon fest, siehe etwa 5.2.3. oder 8.4.2.

4.4.6. Für den Fall $e = l^m$ können mit Bemerkung 3.8.6. auch die l-modularen projektiven Charaktere einer Weyl-Gruppe als Φ_e-modulare projektive Charaktere für die zugehörige Iwahori-Hecke-Algebra aufgefaßt werden. Dabei betrachtet man die projektiven Charaktere wieder als zerlegt in Summen von irreduziblen Charakteren und benutzt noch die von D_1 vermittelte Bijektion zwischen den irreduziblen Charakteren von Weyl-Gruppe und Iwahori-Hecke-Algebra. Ein Beispiel ist etwa in 10.9.4. zu finden.

4.5. Der FindBasis-Algorithmus

4.5.1. Nach Anwendung der oben beschriebenen Methoden zur Generierung von projektiven Charakteren hat man eine endliche Menge von projektiven Charakteren, geschrieben als Linearkombinationen mit nichtnegativen Koeffizienten in der kanonischen Basis der Grothendieck-Gruppe, den irreduziblen Charakteren. Die projektiven Charaktere liegen also als $\mathbb{Z}$-Vektoren vor und spannen ein Untergitter des von allen irreduziblen Charakteren aufgespannten Gitters, also des $\mathbb{Z}^n$ auf, wobei n die Anzahl der irreduziblen Charaktere bezeichnet. Die nächste Aufgabe besteht nun darin, eine $\mathbb{Z}$-Basis für das von den projektiven Charakteren aufgespannte Gitter zu finden, deren Elemente Summen der gegebenen Erzeuger, mithin projektive Charaktere sind.
Aus der Literatur sind Algorithmen bekannt, wie etwa der weiter hinten noch erwähnte LLL-Algorithmus, siehe 4.6.4., die eine Basis finden, deren Elemente im allgemeinen $\mathbb{Z}$-Linearkombinationen der gegebenen Erzeuger sind. In [40], Abschnitt V., und [56], Abschnitt 3.10., wird ein von R. Parker formulierter Algorithmus, dort FBA-Algorithmus genannt, angegeben, der genau das hier Gewünschte leistet. Für die hier untersuchten Beispiele wurde vom Verfasser in GAP der unten beschriebene, verwandte Algorithmus implementiert und benutzt, der auf eine Idee von C. Jansen zurückgeht. Dieser Algorithmus ist in seiner Effizienz den anderen oben beschriebenen unterlegen, reicht aber für die hier diskutierten Beispiele aus.

Es empfiehlt sich zunächst, die Vektoren etwa nach euklidischer Norm zu ordnen. Die gewählte Reihenfolge ist für das folgende mathematisch nicht wesentlich, hat aber Einfluß auf die Laufzeiten des Algorithmus.

Gegeben sei also eine endliche Menge von $\mathbb{Z}$-Vektoren. Nun wird sukzessive das von den gegebenen Vektoren erzeugte $\mathbb{Z}$-Gitter aufgebaut. Man beginnt mit dem trivialen Gitter bestehend aus dem Nullvektor, dessen Basis die leere Liste ist. Jetzt werden die Vektoren aus der gegebenen Liste der Reihe nach zu der bereits gefundenen Basis hinzugenommen. Man bestimmt die Elementarteiler des so erhaltenen erweiterten Erzeugendensystems, das heißt, die Elementarteiler der Matrix, die von den entsprechenden $\mathbb{Z}$-Vektoren gebildet wird. Es können folgende Fälle eintreten:
i) Wird der letzte Elementarteiler zu 0, so liegt der neue Vektor bereits in dem von der alten Basis erzeugten Gitter und kann vernachlässigt werden. Die alte Basis bleibt unverändert.
ii) Sind alle Elementarteiler betragsmäßig gleich 1, so hat man eine Basis für ein Gitter mit einem um 1 inkrementierten Rang. Als Basis nimmt man nun die neue Basis.
iii) Ist der letzte Elementarteiler vom Betrage $z > 1$, so hat man wiederum eine Basis für ein Gitter mit einem um 1 größeren Rang, aber es gibt eine Linearkombination in der neuen Basis mit nichtnegativen Koeffizienten, so daß der entsprechende Vektor nur Einträge hat, die durch z dividierbar sind. Aus der Surjektivität der Zerlegungsabbildung Φ_e, siehe Satz 3.8.3., folgt, daß der aus diesem Vektor durch Division aller Einträge durch z entstehende Charakter wiederum projektiv ist. Dieser so entstandene Vektor wird nun zu der alten Basis hinzugenommen und diese Basis wird weiterverwendet. Damit hat man das von der Basis aufgespannte Gitter nochmals um einen endlichen Index vergrößert.

Solch eine Linearkombination findet man mit folgender Methode: Man wählt eine Primzahl p, die den Elementarteiler z teilt, und reduziert die von den $\mathbb{Z}$-Vektoren der aktuellen Basis gebildete Matrix einträgeweise modulo p. Die so gefundene Matrix kann als Matrix einer linearen Abbildung aufgefaßt werden und hat als solche einen 1-dimensionalen Kern. Man bestimmt eine Linearkombination der reduzierten Basisvektoren, die einen nichttrivialen Vektor des Kerns ergibt und hebt die so gefundene Linearkombination beliebig, jedoch mit nichtnegativen Einträgen zurück zu Charakteristik 0. Der von dieser Linearkombination beschriebene Vektor hat nur durch p dividierbare Einträge. Nun führt Iteration zum Ziel.

Damit ist klar, daß dieser Algorithmus nicht nur eine linear unabhängige Menge aus projektiven Charakteren findet, sondern unter Umständen sogar

das von dem gegebenen Erzeugendensystem aufgespannte Gitter um einen endlichen Index verbessert.
Auch dieses Verfahren wird bei den untersuchten Beispielen häufig eingesetzt, ohne daß explizit der FindBasis-Algorithmus zitiert wird. Es wird aber jeweils angegeben, welche Vektoren vom Algorithmus ausgewählt wurden. Zum einen wird ihre Herkunft beschrieben, meistenteils als induzierte Charaktere, zum anderen wird die Zerlegung dieser Vektoren in die irreduziblen Charaktere als Spaltenvektoren angegeben. Damit nehmen die gefundenen Basen optisch schon die Form von Approximationen an die Zerlegungsmatrix an. Als Beispiel siehe etwa 5.2.5.

4.5.2. Hat man nun mit obiger Methode eine Basis mit den geforderten Eigenschaften gefunden, so kann man alle gefundenen projektiven Charaktere in dieser Basis ausdrücken. Dabei können auch negative Koeffizienten auftreten, wenn die aktuelle Basis noch nicht aus projektiv-unzerlegbaren Charakteren besteht. In diesem Fall kann gerade das Vorkommen von negativen Koeffizienten dazu benutzt werden, die bekannte Basis, die ja aus Summen von projektiv-unzerlegbaren Charakteren besteht, zu verbessern. Diese Ideen entstammen ebenfalls dem in [40], Abschnitte III. und V., beschriebenen Ideenkreis zur Bestimmung von Zerlegungszahlen für endliche Gruppen. Als Beispiel für ihre Anwendung möge etwa 8.5.4. dienen.

4.6. Der Test auf Unzerlegbarkeit

Um die oben beschriebene Methode, sukzessive Basen für den Raum der projektiven Charaktere zu konstruieren, voll auszunutzen, braucht man ein Kriterium, einen gegebenen projektiven Charakter als unzerlegbar zu erkennen. Dazu einige Vorbemerkungen.

Die Φ_e-modularen Zerlegungszahlen eines irreduziblen Charakters χ von $H_{\mathbb{Q}(v)}$ seien mit $d_{\chi\varphi}$ bezeichnet, wobei φ über die irreduziblen Charaktere von $H_{\zeta_{2e}}$ läuft.

4.6.1. Definition. Es sei P_φ der Charakter der projektiven Hülle des irreduziblen Charakters φ. Dann heißt

$$DP_\varphi := \sum_\chi d_{\chi\varphi} D_\chi \in \mathbb{Q}[u]$$

der *generische Grad des projektiven Charakters P_φ.*

4.6.2. Satz. (Geck)
Es sei ν die von R_e induzierte Bewertung auf $\mathbb{Q}(v)$. Ferner sei $P_H(u)$ das Poincaré-Polynom zu H. Dann gilt

$$\nu(DP_\varphi(u)) \geq \nu(P_H(u)).$$

Beweis. Siehe [28]. $\sharp$

4.6.3. Es sei nun ein projektiver Charakter als Summe von irreduziblen Charakteren, also als $\mathbb{Z}$-Vektor gegeben. Da alle projektiven Summanden dieses Charakters die im obigen Satz genannte Bedingung erfüllen müssen, erhält man durch das folgende Verfahren, das auf eine Anregung von M. Geck zurückgeht, eine Liste von Charakteren, die alle projektiven Summanden umfaßt. Findet man hier nur den gegebenen Vektor, so folgt, daß der entsprechende Charakter projektiv-unzerlegbar ist.

Es sei Φ_e^a die maximale Potenz des e-ten Kreisteilungspolynoms, die noch das Poincaré-Polynom P_H teilt. Identifiziert man den Faktorring des Polynomrings $\mathbb{Q}[u]$ nach dem von $\Phi_e^a(u)$ erzeugten Ideal kanonisch mit dem $\mathbb{Q}$-Standardvektorraum, so kann jedem Charakter χ der Rest der Division seines generischen Grades D_χ durch Φ_e^a, mit der Wahl einer Basis also ein $\mathbb{Q}$-Vektor, zugeordnet werden. Man geht noch zu ganzzahligen Einträgen über, indem komponentenweise mit einer geeigneten Konstanten multipliziert wird. Dann ist diese Resteabbildung α ein Homomorphismus der Grothendieck-Gruppe in die freie abelsche Gruppe vom Rang Grad(Φ_e^a). Die Aussage in Satz 4.6.2. besagt jetzt gerade, daß der generische Grad eines projektiven Charakters unter α auf den Nullvektor abgebildet wird, also liegen projektive Charaktere im Kern von α.
Nun betrachtet man den als $\mathbb{Z}$-Vektor gegebenen projektiven Charakter und durchläuft alle $\mathbb{Z}$-Vektoren mit nichtnegativen Einträgen, die komponentenweise nicht größer als der gegebene Vektor sind. Für alle diese Vektoren untersucht man, ob sie im Kern von α liegen, und gibt die Liste derer, die im Kern liegen, zurück.
Ein entsprechendes GAP-Programm für die kleineren Beispiele und einfache C-Programme für die Fälle, in denen die GAP-Routine keine akzeptablen Laufzeiten mehr geboten hat, wurden vom Verfasser entwickelt und eingesetzt.

Als ein Beispiel für die Anwendung sei wieder 5.2.5. erwähnt. Leider ist die Laufzeit dieser Methode exponentiell in der Anzahl der Einträge des gegebe-

nen Vektors, so daß sie zwar für die meisten der in der vorliegenden Arbeit untersuchten Beispiele ausreicht, für einige aber an die Grenzen ihrer Einsatzfähigkeit stößt, was die Laufzeiten angeht.
Insbesondere stellt sich heraus, daß dieses Verfahren zur Bestimmung der Φ_2-modularen Zerlegungszahlen für die Algebra $H(E_8)$ keinesfalls ausreicht. Im folgenden soll nun eine verfeinerte Methode beschrieben werden, die auch dieses Beispiel, siehe 12.2.5., angreifbar gemacht hat. Die Idee hierbei ist, weitere notwendige Bedingungen an mutmaßliche projektive Summanden eines gegebenen projektiven Charakters zu stellen. Wie bereits in 4.4. ausgeführt wurde, ist die Einschränkung eines projektiven Charakters auf eine parabolische Teilalgebra H' wiederum projektiv. Ein projektiver Summand muß also nicht nur im Kern der oben betrachteten Resteabildung α liegen, sondern unter Einschränkung auf eine parabolische Teilalgebra H' muß sich ein Charakter ergeben, der in dem von den projektiv-unzerlegbaren Charakteren von H' aufgespannten Untergitter der Grothendieck-Gruppe liegt. In der hier vorliegenden Situation $H = H(E_8)$ wird es übrigens ausreichend sein, die parabolische Teilalgebra $H' \cong H(E_7)$ zu betrachten.

4.6.4. Das verfeinerte Verfahren macht maßgeblich vom LLL-Algorithmus und seinen Verfeinerungen und Anwendungen Gebrauch. Diese werden in der vorliegenden Arbeit unter dem Begriff *LLL-Algorithmus* subsummiert, obschon es sich im strengen Sinne um mehrere verwandte Verfahren handelt, die von verschiedenen Autoren entwickelt wurden. Die notwendigen Details findet man etwa in [12], Abschnitte 2.6. und 2.7. Der LLL-Algorithmus bestimmt für ein in einen euklidischen Raum eingebettetes $\mathbb{Z}$-Gitter, das durch ein Erzeugendensystem gegeben ist, eine Gitterbasis aus Vektoren kleiner Norm. Außerdem erhält man eine Basis für den Raum der Relationen, die zwischen den gegebenen erzeugenden Vektoren bestehen, und zu jedem der neu gefundenen Basisvektoren wird eine Darstellung in den gegebenen erzeugenden Vektoren, die natürlich nicht eindeutig sein muß, angegeben. Die hier benötigten allgemeinen LLL-Reduktionsroutinen sind bereits in GAP implementiert. Die weiteren speziellen Programme, wie der unten erwähnte Zassenhaus-Algorithmus, ein partieller Elementarteileralgorithmus, und auch die die nötigen Verknüpfungen zwischen den Datenstrukturen schaffenden Routinen wurden vom Verfasser hinzugefügt.

Es sei wieder ein projektiver Charakter als $\mathbb{Z}$-Linearkombination der irreduziblen Charaktere mit nichtnegativen Koeffizienten gegeben.
Natürlich betrachtet man bei den im folgenden beschriebenen Rechnungen

nur diejenigen irreduziblen Charaktere, die in der Darstellung des gegebenen projektiven Charakters auch vorkommen. Da im Falle der Φ_2-modularen Zerlegungsabbildung zueinander duale nicht-exzeptionelle Charaktere gleiche Zerlegungszahlen besitzen, wie aus der Definition 2.2.5. der Dualität und [30], Satz 2.4.4., folgt, reicht es hier aus, statt der irreduziblen Charaktere Bahnsummen von Charakteren unter der Dualitätsoperation zu betrachten. Hierbei werden die Charaktere $\chi_{60} = \chi_{(512,12)}$, $\chi_{59} = \chi_{(512,11)}$ von $H(E_7)$ und $\chi_{62} = \chi_{(4096,12)}$, $\chi_{63} = \chi_{(4096,26)}$, $\chi_{105} = \chi_{(4096,11)}$, $\chi_{106} = \chi_{(4096,27)}$ von $H(E_8)$ als exzeptionelle Charaktere bezeichnet.

Man hat zunächst wieder die schon oben beschriebene Resteabbildung α gegeben als einen Homomorphismus freier abelscher Gruppen. Betrachtet man die α-Bilder der Basisvektoren des Definitionsbereichs, also der irreduziblen Charaktere von H, als erzeugende Vektoren eines $\mathbb{Z}$-Gitters im Zielbereich, so ergibt die vom LLL-Algorithmus bestimmte Basis des Relationenraums durch Multiplikation mit den gegebenen erzeugenden Vektoren eine Basis für den Kern von α. In dem in 4.6.3. beschriebenen Verfahren wurden nun alle Vektoren gesucht, die komponentenweise durch den gegebenen Vektor majorisiert werden und im Kern von α liegen. Idee der nachfolgenden Schritte ist es, den Suchraum auf ein $\mathbb{Z}$-Untergitter dieses Kerns zu verkleinern.

Die Einschränkungsabbildung r von H zur Unteralgebra H' ist wie die Induktionsabbildung ein Homomorphismus der jeweiligen Grothendieck-Gruppen. Wie die Induktion ist auch die Restriktion von H nach H' mit der Spezialisierungsabbildung D_1 vertauschbar. Außerdem sind Induktion und Restriktion zueinander adjungierte Funktoren. Also wird die Restriktionsmatrix, das heißt, die Matrix der Abbildung r bezüglich der kanonischen Basen bestehend aus den irreduziblen Charakteren, durch die Transponierte der schon in 4.4.4. betrachteten Induktionsmatrix gegeben.
Man bestimmt ein Erzeugendensystem des Schnittes S des Bildes von r mit dem Gitter, das von den projektiv-unzerlegbaren Charakteren von H' aufgespannt wird. Dazu benutzt man etwa den aus der linearen Algebra bekannten Zassenhaus-Algorithmus, der sich natürlich wörtlich vom Fall des Vektorraums auf den eines $\mathbb{Z}$-Gitters übertragen läßt. Eine Basis für S findet man wieder mittels des LLL-Algorithmus.
Jetzt bestimmt man, wieder mittels LLL-Algorithmus, eine Basis B für das Bild von r und eine Darstellung der Basisvektoren in den gegebenen Erzeugern, das heißt hier natürlich den Bildern der irreduziblen Charaktere von H unter r. Außerdem erhält man aus dem dabei gefundenen Relationenraum

eine Basis C für den Kern von r, wie es oben schon im Falle der Abbildung α erklärt wurde. Nun schreibt man die Vektoren in der oben bestimmten Basis für S als $\mathbb{Z}$-Linearkombinationen in der soeben gefundenen Basis B. Der letztgenannte Schritt erfolgt mit einem p-adischen Zerlegungsalgorithmus, der auf R. Parker und J. Dixon zurückgeht und etwa in [40], Abschnitt V., dort DEC-Algorithmus genannt, oder [56], Abschnitt 3.8., beschrieben wird, inzwischen aber auch in GAP verfügbar ist.
Nun hat man eine Basis für S als $\mathbb{Z}$-Linearkombinationen in B und B wiederum als $\mathbb{Z}$-Linearkombinationen in den r-Bildern der irreduziblen Charaktere von H geschrieben. Nimmt man nun die entprechenden $\mathbb{Z}$-Linearkombinationen der irreduziblen Charaktere von H, fügt diese mit der oben gefundenen Basis C des Kerns von r zusammen, so erhält man mit dem Homomorphiesatz eine Basis für das Urbild $r^{-1}(S)$.
Schließlich bestimmt man noch mit Hilfe des Zassenhaus-Algorithmus ein Erzeugendensystem und mittels LLL-Algorithmus eine Basis für den Schnitt T von $r^{-1}(S)$ mit dem Kern der Resteabbildung α. Damit ist der Suchraum auf ein Untergitter des ursprünglich zu betrachtenden Gitters reduziert.

Um nun mögliche Summanden des gegebenen projektiven Charakters zu finden, bieten sich zwei Möglichkeiten an. Zum einen kann man alle Vektoren von T aufzählen, deren euklidische Norm kleiner als die des gegebenen Vektors sind, und unter diesen dann diejenige heraussuchen, die nicht-negative Einträge haben und komponentenweise von dem gegebenen Vektor majorisiert werden.
Die Vektoren eines Gitters mit einer durch eine vorgegebene Schranke beschränkten Norm kann man mit der Fincke-Pohst-Variante des LLL-Algorithmus bestimmen, siehe [12], Abschnitt 2.7.7. Diese Variante ist bereits in GAP implementiert. Leider ist dieser Algorithmus ebenfalls exponentiell in der Normschranke, so daß für einige Beispiele dieses Verfahren noch immer nicht ausreichend gewesen ist.

Anstatt alle Vektoren kleiner Norm zu suchen, und unter diesen dann die möglichen Summanden, die ja alle nichtnegative Vektoren sind, kann man mit der folgenden Idee direkt alle Vektoren mit nichtnegativen Einträgen, die komponentenweise durch den gegebenen Vektor majorisiert werden, bestimmen.
In den folgenden Betrachtungen werden die behandelten Vektoren als Zeilenvektoren aufgefaßt. Zunächst bringt man die gefundene Basis mittels eines partiellen Elementarteileralgorithmus mit $\mathbb{Z}$-invertierbaren Zeilenum-

formungen auf Dreiecksgestalt. Man kann dann alle Vektoren in dem von der Basis aufgespannten $\mathbb{Z}$-Gitter aufzählen, für die die Bedingung an die Einträge in den Pivot-Spalten gilt. Für diese muß man dann noch die Bedingung in allen anderen Spalten nachweisen. Zur Umsetzung dieser Idee ist ein geeignetes C-Programm vom Verfasser geschrieben und auch eingesetzt worden.

Die oben beschriebenen Ideen zum Auffinden von projektiven Summanden eines gegebenen projektiven Charakters haben sich für die in der vorliegenden Arbeit vorkommenden Beispiele als ausreichend erwiesen, die unten dargestellten Ergebnisse zu erhalten.

4.7. Fongs Lemma

P. Fong hat in [23], Lemma 1.1., gezeigt, daß für endliche Gruppen das von den projektiv-unzerlegbaren Charakteren aufgespannte Gitter bereits von den projektiven Charakteren, die man durch Induzieren der projektiv-unzerlegbaren Charaktere aller echten Untergruppen erhält, erzeugt wird. Dabei kann man sich natürlich auf Induzierte von maximalen Untergruppen beschränken. Ein Ersatz dafür in der hier vorliegende Situation wäre wünschenswert für eine *a priori* Abschätzung für den Rang der Zerlegungsmatrix, das heißt, für die Anzahl der projektiv-unzerlegbaren Charaktere. Ohne Kenntnis der irreduziblen Charaktere, wie im Fall $H(E_8)$, ist dieser Rang nicht von vorneherein bekannt. Leider ist dem Verfasser, was Iwahori-Hecke-Algebren angeht, nur ein schwacher Ersatz des Resultats aus [23] bekannt, der hier trotzdem erwähnt werden soll. Insbesondere liefert dieses Kriterium für den schwierigen Fall der Φ_2-modularen Zerlegungsabbildung für $H(E_8)$ (leider) keine Aussage. Ausgangspunkt ist der folgende Satz.

4.7.1. Satz. (Solomon)
Es seien (W, S) eine endliche Coxeter-Gruppe mit Signumsdarstellung *sgn*. Dann gilt
$$\mathrm{sgn} = \sum_{J \subseteq S} (-1)^{|J|} \cdot (1_{W_J})^W.$$

Beweis. Siehe [65]. $\sharp$

Damit folgt für alle Charaktere χ von W:
$$\chi \otimes \mathrm{sgn} = \sum_{J \subseteq S} (-1)^{|J|} \cdot (\chi_{W_J})^W.$$

Bezeichnet χ^* den zu χ dualen Charakter, so hat man unter Verwendung der Spezialisierung D_1 für die generische Iwahori-Hecke-Algebra H zu W:

$$\chi^* = \sum_{J \subseteq S} (-1)^{|J|} \cdot (\chi_{H_J})^H,$$

also

$$\chi^* - (-1)^{|S|}\chi = \sum_{J \subset S} (-1)^{|J|} \cdot (\chi_{H_J})^H.$$

4.7.2. Nun sei Φ ein projektiver Charakter von H. Man unterscheidet die Fälle $|S|$ ungerade und $|S|$ gerade.
Im Fall, daß $|S|$ ungerade ist, ist dann $\Phi + \Phi^*$ in dem von induzierten projektiven Charakteren aufgespannten Gitter. Induziert man also alle projektiv-unzerlegbaren Charaktere von allen maximalen parabolischen Teilalgebren nach H und bildet für jeden von diesen die Bahnsumme unter der Dualität, so hat das so erhaltene Gitter einen Rang, der gleich der Summe der Anzahl von Paaren nicht selbstdualer projektiv-unzerlegbarer Charaktere und der Anzahl der selbstdualen projektiv-unzerlegbaren Charaktere ist.
Analog erhält man im Fall, daß $|S|$ gerade ist, durch Übergang zu alternierenden Bahnsummen die Anzahl der nicht selbstdualen projektiv-unzerlegbaren Charaktere.

4.8. Konstruktion von Darstellungen: Spiegelungsdarstellung

Zur vollständigen Bestimmung von Zerlegungsmatrizen reicht die Betrachtung von Charakteren im allgemeinen nicht aus. Daher werden in diesem und den nächsten Abschnitten Methoden beschrieben, wie explizit Matrixdarstellungen für Iwahori-Hecke-Algebren bestimmt und untersucht werden können.

Zunächst sei noch einmal an die in Bemerkung 2.2.4. erwähnten linearen Darstellungen, die Signumsdarstellung und die Indexdarstellung, erinnert.

4.8.1. Spiegelungsdarstellung. Es sei (W, S) eine klassische oder exzeptionelle Coxeter-Gruppe. Aus den Betrachtungen in [3], Abschnitt V.4., folgt, daß W eine $\mathbb{Q}$-Darstellung vom Grad $|S|$ besitzt, für die eine W-invariante symmetrische Bilinearform exisitiert, so daß die Erzeuger $s \in S$ von W bezüglich dieser Bilinearform wie Spiegelungen operieren. Außerdem

kann man für die Standarderzeuger $s \in S$ explizit darstellende Matrizen angeben. Diese Darstellung wird auch *Spiegelungsdarstellung* von W genannt. Ist W eine unzerlegbare Coxeter-Gruppe, so ist ihre Spiegelungsdarstellung sogar irreduzibel.
Die unter der Spezialisierungsabbildung D_1, siehe 3.7.7., zu dieser Darstellung korrespondierende Darstellung der generischen Iwahori-Hecke-Algebra $H_{\mathbb{Q}(v)}$ wird ebenfalls als *Spiegelungsdarstellung* bezeichnet. In [14], Proposition 9.8., haben C. Curtis, N. Iwahori und R. Kilmoyer gezeigt, daß sich die in [3] angegebene Konstruktion für $H_{\mathbb{Q}(v)}$ verallgemeinern läßt. Außerdem lassen sich auch hier für die Erzeuger $\{T_s; s \in S\}$ von $H_{\mathbb{Q}(v)}$ explizit darstellende Matrizen angeben.

4.8.2. Antisymmetrische Potenzen. Das $\mathbb{Q}(v)$-Tensorprodukt zweier Darstellungen von $H_{\mathbb{Q}(v)}$ ist im allgemeinen nicht wieder ein Darstellungsraum für $H_{\mathbb{Q}(v)}$ unter der Diagonaloperation der Erzeuger $\{T_s\}$. Im Falle der Spiegelungsdarstellung von $H_{\mathbb{Q}(v)}$ kann aber nach [14], Satz 9.13., jede antisymmetrische Potenz wieder zu einer Darstellung von $H_{\mathbb{Q}(v)}$ gemacht werden. Auch hier können darstellende Matrizen für die Erzeuger $\{T_s\}$ explizit angegeben werden.
In CHEVIE sind bereits Routinen vorhanden, die diese Konstruktion ausführen. Außerdem zeigen die Betrachtungen in [14], daß die Bildung der antisymmetrischen Potenzen und die Spezialisierung 3.8.5. in einen endlichen Körper miteinander vertauschbar sind. Damit kann diese Konstruktion über einem endlichen Körper auch mit der MeatAxe durchgeführt werden.
Die so erhaltenen k-ten antisymmetrischen Potenzen ergeben für $0 \le k \le |S|$ paarweise verschiedene irreduzible Darstellungen von $H_{\mathbb{Q}(v)}$. Außerdem zeigt die Konstruktion in [14], daß der Übergang zu einer antisymmetrischen Potenz und die Spezialisierung D_1 miteinander kommutieren. Also ist auch die Parametrisierung der so gewonnenen neuen Darstellungen leicht zu bestimmen.

Spiegelungsdarstellungen und ihre Potenzen spielen etwa in 12.1. eine Rolle.

4.9. Konstruktion von Darstellungen: Zelldarstellungen

4.9.1. Zelldarstellungen. In [45], Satz 1.3., haben D. Kazhdan und G. Lusztig für den Fall gleicher Parameter $\{c_s\}$ eine Methode beschrieben, weitere Darstellungen von $H_{\mathbb{Q}(v)}$ zu konstruieren. Die Idee hierbei ist, eine kanonische Filtrierung der regulären Darstellung von $H_{\mathbb{Q}(v)}$ zu beschreiben.

Diese beruht auf dem Konzept der *Linkszellen*, die zugehörigen Darstellungen werden deshalb auch als *Linkszelldarstellungen* bezeichnet. Die Konstruktion von darstellenden Matrizen für die Erzeuger $\{T_s\}$ wird algorithmisch auf die Bestimmung von *Kazhdan-Lusztig-Polynomen* zurückgeführt. Deren Existenz wird in [45], Satz 1.1., gezeigt, wobei die Analyse des Beweises eine rekursive Methode zu ihrer Berechnung angibt.
Wie sich zeigt, werden die hierzu erforderlichen Rechnungen schnell sehr aufwendig, man vergleiche etwa die entsprechenden Bemerkungen in [7]. Eine Anwendung von Zelldarstellungen für den Fall $H(D_5)$ findet man in 12.1.

4.9.2. Zelldarstellungen für $H(A_n)$. Im Falle der Algebra $H(A_n)$ ist die Bestimmung der Linkszellen besonders einfach, da sie auf einen kombinatorischen Prozeß zurückgeführt werden kann. Eine Anwendung der nachfolgend beschriebenen Methoden auf die Algebra $H(A_6)$ findet man in 8.4.4.
Die Coxeter-Gruppe $W = W(A_n)$ ist isomorph zur symmetrischen Gruppe S_{n+1} auf $n+1$ Punkten. Die Linkszellen von W können mittels der *Robinson-Schensted-Abbildung* beschrieben werden. Dabei wird jedem Element von $\pi \in W$, also jeder Permutation auf $n+1$ Punkten, durch ein kombinatorisches Verfahren ein *Standardtableau* $P(\pi)$ zugeordnet. Das einem Tableau zugrundeliegende *Young-Diagramm* beschreibt in natürlicher Weise eine Partition von $n+1$. Die Details hierzu findet man etwa in [46], Abschnitt 5.1.4.

4.9.3. Satz. (Barbasch, Vogan)
$\pi, \pi' \in W$ sind genau dann Elemente derselben Linkszelle, falls

$$P(\pi) = P(\pi').$$

Beweis. Siehe [1]. $\sharp$

Mit [46], Satz 5.1.4.A., kann man die Menge aller Permutationen, die unter der Robinson-Schensted-Abbildung auf ein vorgegebenes Standardtableau abgebildet werden, und damit die Linkszellen, ebenfalls durch ein kombinatorisches Verfahren bestimmen. Der Verfasser dankt M. Schönert, der ein entsprechendes GAP-Programm zur Verfügung gestellt hat.
Außerdem kann man für $H(A_n)$ die von den Linkszellen getragenen Darstellungen genau beschreiben. Zunächst hat man den folgenden Satz.

4.9.4. Satz. (Kazhdan, Lusztig)
Die Linkszelldarstellungen von $H_{\mathbb{Q}(v)}(A_n)$ sind irreduzibel und jede irreduzible Darstellung von $H_{\mathbb{Q}(v)}(A_n)$ kann so erhalten werden.

Beweis. [45], Satz 1.4. ♯

Die gewöhnlichen irreduziblen Darstellungen E von W stehen in Bijektion zu den Partitionen β von $n+1$, wie die entsprechenden Ausführungen zu [43], Satz 2.1.11., zeigen. Nun gibt der nächste Satz über die Parametrisierung von Linkszelldarstellungen Auskunft.

4.9.5. Satz. Es sei L eine Linkszelle von W, auf der die Darstellung $E(\beta)$ lebt. Außerdem sei $\pi \in L$. Dann gehört das $P(\pi)$ zugrundeliegende Young-Diagramm zur Partition β.

Beweis. In [54], Abschnitt 4.2., wird von G. Lusztig das Konzept der *Familien* von irreduziblen Darstellungen beschrieben. Weiter wird dort in Abschnitt 4.4. gezeigt, daß im Falle des Typs A_n zwei irreduzible Darstellungen von W genau dann in einer Familie liegen, wenn sie isomorph sind. Weiter haben D. Barbasch und D. Vogan in [1] gezeigt, daß zwei irreduzible Darstellungen genau dann in derselben Familie liegen, wenn sie auf derselben *zweiseitigen Zelle* leben, siehe auch die Bemerkungen in [54], Abschnitt 5.15. Schließlich wird in [1] noch gezeigt, daß zwei Elemente $\pi, \pi' \in W$ genau dann in derselben zweiseitigen Zelle liegen, wenn die Tableaux $P(\pi)$ und $P(\pi')$ dasselbe zugrundeliegende Young-Diagramm besitzen. Also wird dadurch jedem Isomorphietyp von Linkszelldarstellungen für $H(A_n)$ eindeutig eine Partition von $n+1$ zugeordnet, die nicht von der gewählten Linkszelle abhängt.
Nun wählt man ein geeignetes Element π. Dazu beachtet man zunächst, daß die irreduziblen Komponenten aller parabolischen Untergruppen wieder vom Typ A_{n_i} sind. Die parabolischen Untergruppen stehen ebenfalls in Bijektion zu den Partitionen von $n+1$. Wie die Ausführungen zu [43], Satz 2.1.11., zeigen, kommt die Darstellung $E(\beta)$ dabei als Konstituent in der von der parabolischen Untergruppe $W(\beta^*)$ induzierten Signumsdarstellung vor. Dabei bezeichnet β^* die zu β duale Partition.
Jetzt sei π das längste Element der Untergruppe $W(\beta^*)$. Dann folgt aus den Ausführungen in [54], Abschnitt 5.16., daß die π enthaltende Linkszelle L gerade die Darstellung $E(\beta)$ trägt. Nun wendet man die Robinson-Schensted-

Abbildung auf π an und findet für das Young-Diagramm von $P(\pi)$ gerade $(\beta^*)^* = \beta$. $\sharp$

4.10. Der VectorEnumerator

Der VectorEnumerator erweist sich als ein für diese Arbeit sehr wichtiges Hilfsmittel zur Konstruktion und Untersuchung von Darstellungen, insbesondere auch über Körpern der Charakteristik 0. In diesem Abschnitt sollen die formalen Ideen, die zu diesem Algorithmus führen, angesprochen werden. Außerdem wird beschrieben, wie der VectorEnumerator in der hier vorliegenden speziellen Situation eingesetzt werden kann.
Der Verfasser dankt W. Nickel für einige anregende Diskussionen zu Wesen und Wirken des VectorEnumerator-Programms. Die hier gewählte Darstellung ist der von S. Linton in [51] entlehnt.

4.10.1. Es seien F ein Körper und H eine F-Algebra mit Einselement 1, die durch eine endliche Präsentation

$$H := \langle T || R(T) \rangle_{F-\mathrm{Algebra}}$$

als assoziative Algebra mit 1 gegeben ist. Das heißt, die Elemente der endlichen Menge T sind freie Erzeuger einer assoziativen Algebra und $R(T)$ ist eine endliche Teilmenge der von T erzeugten freien Algebra. $R(T)$ sind also Summen von Produkten der Erzeuger T. Dann ist H die Faktoralgebra dieser freien Algebra nach dem von $R(T)$ erzeugten Ideal.

Weiter sei

$$M := \langle E || r(E) \rangle_{H-\mathrm{Modul}}$$

ein endlich präsentierter H-Modul. Analog betrachtet man hier also den von der endlichen Menge E erzeugten freien H-Rechtsmodul

$$F(E) := \oplus_{b \in E} (b \cdot H).$$

Dieser ist eine direkte Summe von Untermoduln $b \cdot H$, die alle isomorph zum Modul H_H sind, also der Menge H, auf der H durch Rechtsmultiplikation operiert. Weiter ist $r(E)$ eine endliche Teilmenge von $F(E)$, also eine Menge von Ausdrücken der Form

$$\sum_{b \in E} b \cdot h_b \text{ mit } h_b \in H.$$

Dann ist M der Faktormodul des freien H-Moduls $F(E)$ nach dem von $r(E)$ erzeugten H-Untermodul.

Die vom VectorEnumerator durchgeführte Aufgabe wird nun durch den folgenden Satz beschrieben.

4.10.2. Satz. (Linton)
Es seien H und M wie oben gegeben. Falls M eine endliche F-Dimension hat, so terminiert der VectorEnumerator und gibt eine F-Basis für den H-Modul M und darstellende Matrizen für die Erzeuger T von H bezüglich dieser Basis zurück.

Beweis. Siehe [51], Abschnitt 1. $\sharp$

Zunächst noch einige Bemerkungen zum Prinzip des Algorithmus, diese sind [50], Abschnitt 2, entlehnt. Dort findet man auch mehr Details.
Während des Algorithmus wird, beginnend mit den gegebenen Modulerzeugern E, eine Menge B von Vektoren generiert, die, wenn der Algorithmus terminiert, eine F-Basis von M bildet. Auf B werden nun die Algebrenrelatoren $R(T)$ angewendet. Dabei müssen sukzessive Produkte der Form $b \cdot t$ für $b \in B$ und $t \in T$, also die Anwendung von t auf b, gebildet werden. Ist so ein Produkt noch nicht definiert, so wird zu B ein neuer formaler Erzeuger b' hinzugenommen, der durch

$$b' := b \cdot t$$

definiert wird. Ist schließlich die Wirkung eines Relators $R \in R(T)$ auf ein $b \in B$ definiert, so setzt man $b \cdot R = 0$, da ja $R = 0 \in H$ gelten soll. Dies erzwingt eine lineare Abhängigkeit zwischen den Elementen von B. Also kann man eines dieser Elemente durch andere F-linear ausdrücken; dieses kann somit aus B gestrichen werden. Ähnliche Relationen werden durch die Modulrelatoren $r(E)$ erzeugt. Dies wird nun solange durchgeführt, bis die Wirkung aller Erzeuger in T auf alle Basiselemente in B definiert ist und alle Relationen erfüllt sind.

Damit ist die Grundidee dieses Verfahrens beschrieben. Es folgen nun einige Bemerkungen, wie sich der VectorEnumerator für die Zwecke der vorliegenden Arbeit einsetzen läßt. Übrigens wurde die Definition einer Iwahori-Hecke-Algebra in 2.2.1. mit Bedacht so gewählt, daß sie direkt als Eingabe für den VectorEnumerator geeignet ist. Als Beispiel für die nachfolgend diskutierten Anwendungen des VectorEnumerator möge etwa 12.1. dienen.

4.10.3. Weder in der Formulierung der grundlegenden Idee des VectorEnumerator oben noch im expliziten Algorithmus wird eine Voraussetzung über die Charakteristik des Grundkörpers F gemacht. Deshalb ist diese Methode sowohl in endlicher, aber insbesondere auch in Charakteristik 0 anwendbar. Insofern geht ihr Anwendungsbereich über den etwa der MeatAxe hinaus. In den behandelten Beispielen werden sowohl endliche Grundkörper als auch Rechnungen über $\mathbb{Q}$ vorkommen.
Zum Rechnen über einem algebraischen Zahlkörper L als Grundkörper kann die folgende Idee benutzt werden, mit deren Hilfe man die Rechnungen über L auf Rechnungen über den rationalen Zahlen zurückführen kann. Aus den nachfolgenden Bemerkungen wird unmittelbar klar, wie man dazu die Eingaben in den VectorEnumerator modifizieren muß.

Es sei $L \geq K$ eine endliche separable Körpererweiterung. Mit dem Satz vom primitiven Element wird diese durch ein irreduzibles Polynom $p(z) \in K[z]$ beschrieben. Das heißt, alle Elemente von L sind als K-Polynome in der erzeugenden Wurzel ζ von $p(z)$ darstellbar.
Weiter sei $H_L := \langle T || R(T) \rangle$ eine endlich präsentierte L-Algebra. Man betrachtet die um einen weiteren formalen Erzeuger ergänzte Menge

$$\tilde{T} := T \,\dot{\cup}\, \{z\}.$$

Die in den Relatoren in $R(T)$ vorkommenden Körperelemente, also Polynome in ζ, werden durch die entsprechenden Polynome in z ersetzt, damit erhält man einen Satz von Relatoren $R(T, z)$ und setzt noch:

$$\tilde{R}(\tilde{T}) := R(T, z) \cup \{p(z); zt - tz \text{ für alle } t \in T\}.$$

Damit gilt der folgende Satz.

4.10.4. Satz. Es seien $\tilde{H}_K$ die durch die folgende Präsentation

$$\tilde{H}_K := \langle \tilde{T} || \tilde{R}(\tilde{T}) \rangle$$

gegebene K-Algebra und $(H_L)_K$ die durch Einschränken des Skalarbereichs als K-Algebra aufgefaßte Algebra H_L. Dann gilt:

$$(H_L)_K \cong \tilde{H}_K \text{ als } K\text{-Algebren.}$$

Beweis. Es sei $H_L(T)$ die von der Menge T erzeugte freie assoziative L-Algebra. Diese kann als K-Algebra $(H_L(T))_K$ aufgefaßt werden. Dann wird durch

$$t \mapsto t \text{ und } z \mapsto \zeta$$

ein K-Algebren-Isomorphismus

$$\psi : \langle \tilde{T} || p(z), zt - tz \text{ für alle } t \in T\rangle \to (H_L(T))_K$$

definiert. Weiter wird das Ideal $\langle R(T)\rangle \trianglelefteq H_L(T)$ in $(H_L(T))_K$ erzeugt unter der Wirkung von $(H_L(T))_K$ zusammen mit der Skalaroperation der Primitivwurzel ζ. Dieses Ideal entspricht also via ψ^{-1} dem Idealerzeugnis von $R(T, z)$ im Urbildbereich von ψ. ♯

4.10.5. Korollar. Ist außerdem $M := \langle E || r(E)\rangle$ ein endlich präsentierter H_L-Modul, so sei analog zu oben $r(E, z)$ die durch Ersetzen der Primitivwurzel ζ durch z entstehende Menge. Unter dem in obigem Beweis angegebenen Isomorphismus erhält man also

$$M_K := \langle E || r(E, z)\rangle$$

als Präsentation des Moduls M, aufgefaßt als Modul für $\tilde{H}_K \cong (H_L)_K$.

4.10.6. Es sei $M := \langle E || r(E)\rangle$ ein endlich präsentierter Modul für die F-Algebra H. Es ist klar, daß durch Hinzufügen zusätzlicher Relatoren zu der Menge $r(E)$ ein Faktormodul von M definiert wird.
Jetzt seien $R(T)$ eine Menge von F-Algebren-Relatoren und

$$\tilde{H} := H/\langle R(T)\rangle$$

die zu dem von $R(T)$ erzeugten Ideal gehörende Faktoralgebra. Außerdem wählt man eine Menge $\tilde{E}$ von freien $\tilde{H}$-Modulerzeugern, die in Bijektion zu E steht. Dann erhält man aus $r(E)$ in natürlicher Weise $\tilde{H}$-Modulrelatoren $\tilde{r}(\tilde{E})$ und die $\tilde{H}$-Modulpräsentation

$$\tilde{M} := \langle \tilde{E} || \tilde{r}(\tilde{E})\rangle.$$

Da $\tilde{H}$ ein epimorphes Bild von H ist, kann man $\tilde{M}$ wieder als H-Modul auffassen. Damit gilt:

4.10.7. Satz. *Der als H-Modul aufgefaßte Modul $\tilde{M}$ ist ein epimorphes Bild des H-Moduls M.*

Beweis. Der endlich präsentierte H-Modul M ist der Faktormodul des freien H-Moduls

$$F(E) \cong \oplus_{b\in E}(b \cdot H)$$

nach dem von den Relatoren $r(E)$ erzeugten Teilmodul. Nun betrachtet man noch

$$N := r(E)_H + \oplus_{b\in E} b \cdot \langle R(T)\rangle \leq F(E),$$

wobei $r(E)_H$ den von den Modulrelatoren erzeugten Teilmodul von $F(E)$ und $\langle R(T)\rangle$ das von $R(T)$ in H erzeugte Ideal bezeichnet. Nun ist $F(E)/N$ ein Faktormodul von M und kann als $\tilde{H}$-Modul aufgefaßt werden. Andererseits ist

$$F(E)/ \oplus_{b\in E} b \cdot \langle R(T)\rangle \leq F(E)$$

gerade der von $\tilde{E}$ erzeugte freie $\tilde{H}$-Modul. Also ist $F(E)/N$ der Faktormodul dieses freien Moduls nach dem von $\tilde{r}(\tilde{E})$ erzeugten $\tilde{H}$-Teilmodul. $\sharp$

Ist also die Algebra H durch eine endliche Präsentation gegeben, so kann man Faktormoduln eines endlich präsentierten H-Moduls M dadurch definieren, und mittels des VectorEnumerator auch bestimmen, indem man zu der gegebenen Präsentation für H weitere Algebren-Relatoren hinzufügt. Dies wird sich später als nützlich zum Beweise der Existenz oder Nichtexistenz von gewissen Teilmoduln erweisen.

4.10.8. Im Falle von Iwahori-Hecke-Algebren ist eine Präsentation für die untersuchte Algebra *per definitionem* gegeben. Damit stellt sich natürlich die Frage, wie man geeignete Modulpräsentationen erhalten kann. Die Standardbeispiele sind die folgenden.

Es seien für einen H-Modul M eine F-Basis $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ und darstellende Matrizen $D(t) = [d_{ij}(t)]$ für die Erzeuger $t \in T$ bezüglich dieser Basis bekannt. Es werde Zeilenkonvention vorausgesetzt. Nun betrachtet man die Teilmenge

$$r(B) := \{b_i \cdot t - \sum_{j=1}^{n} b_j \cdot d_{ij}(t);\ \text{für alle } i = 1, \ldots, n \text{ und } t \in T\} \subseteq F(B)$$

des von B erzeugten freien H-Moduls.

4.10.9. Satz. Es ist M als H-Modul endlich präsentiert durch

$$M \cong \langle B || r(B)\rangle.$$

Beweis. Da M von B sogar als F-Vektorraum erzeugt wird, und die Relatoren per Konstruktion in M verschwinden, ist M ein epimorphes Bild von $\langle B||r(B)\rangle$. Außerdem folgt aus der Gestalt der Relatoren, daß $\langle B||r(B)\rangle$ eine durch n beschränkte F-Dimension hat, und damit die Behauptung. $\sharp$

4.10.10. Schließlich sei noch beschrieben, wie man den VectorEnumerator zur Induktion von Darstellungen einsetzen kann. Auch hier wird aus den nachfolgenden Bemerkungen sofort klar, welche Eingangsdaten dazu zur Verfügung gestellt werden müssen. Zunächst einige Vorbemerkungen.

Es sei H eine F-Algebra, die durch eine endliche Präsentation gegeben ist. Ferner seien $H' \leq H$ eine Unteralgebra mit 1, deren Erzeuger T' als Wörter in den Erzeugern T von H gegeben sind, und N ein H'-Modul gegeben durch eine endliche H'-Modulpräsentation:

$$N \cong \langle E'||r'(E')\rangle.$$

Wie oben beschrieben kann so eine Präsentation etwa aus darstellenden Matrizen für die Erzeuger T' gewonnen werden. Nun möchte man die Operation von H' auf N zu einer von H ‘ausweiten’. Die formale Konstruktion, die dies bewirkt, ist die Bildung des Tensorprodukts $N \otimes_{H'} H$. Der so entstehende H-Modul wird auch als der *induzierte* Modul bezeichnet.
Nun betrachtet man eine Menge E freier H-Modulerzeuger, die in Bijektion zu den freien H'-Modulerzeugern E' steht. Identifiziert man nun H' mit einer Teilmenge von H, so erhält man in natürlicher Weise aus den H'-Modulrelatoren $r'(E')$ eine Menge $r(E)$ von H-Modulrelatoren. Damit gilt:

4.10.11. Satz. Der induzierte Modul $N \otimes_{H'} H$ besitzt die folgende Präsentation:

$$N \otimes_{H'} H \cong \langle E||r(E)\rangle.$$

Beweis. Nach Voraussetzung ist N als H'-Modul isomorph zum Faktormodul des von E' erzeugten freien H'-Moduls

$$F'(E') \cong \oplus_{b \in E'}(b \cdot H')$$

nach dem von den Relatoren $r'(E')$ erzeugten H'-Teilmodul $\langle r'(E')\rangle_{H'}$. Also hat man

$$N \otimes_{H'} H \cong \{F'(E')/\langle r'(E')\rangle_{H'}\} \otimes_{H'} H.$$

Nun ist der Tensorfunktor $? \otimes_{H'} H$ ein rechtsexakter Funktor, siehe etwa [35], Proposition III.7.3. Also ist das Tensorieren mit der Bildung des Faktormoduls vertauschbar:

$$N \otimes_{H'} H \cong \{F'(E') \otimes_{H'} H\}/\{\langle r'(E')\rangle_{H'} \otimes_{H'} H\}.$$

Offenbar ist $F'(E') \otimes_{H'} H$ gerade der von E erzeugte freie H-Modul $F(E)$ und $\langle r'(E')\rangle_{H'} \otimes_{H'} H$ ist der von $r(E)$ erzeugte H-Teilmodul von $F(E)$. Damit hat man also

$$N \otimes_{H'} H \cong F(E)/\langle r(E)\rangle_H.$$

$\sharp$

4.10.12. Bemerkung. Ist H als H'-Linksmodul sogar frei von endlichem Rang und hat N eine endliche F-Dimension, so gilt

$$\dim_F(N \otimes_{H'} H) = \mathrm{Rang}_{H'}(H) \cdot \dim_F(N).$$

In den in der vorliegenden Arbeit vorkommenden Anwendungen wird H eine Iwahori-Hecke-Algebra und H' eine parabolische Teilalgebra sein. Nach Bemerkung 4.4.2. ist in diesem Fall H als H'-Linksmodul frei von endlichem Rang.

4.11. Der Satz von Zassenhaus

Die Aufgabe wird später darin bestehen, die mit den oben beschriebenen Methoden gewonnenen expliziten Darstellungen zu untersuchen, um etwa die Existenz oder Nichtexistenz von gewissen Teilmoduln oder Faktormoduln nachzuweisen. Besonders in Charakteristik 0 stellt sich dabei als schwierig heraus, Unterstrukturen von Moduln in den Griff zu bekommen. Das nachfolgend angegebene Kriterium erweist sich in dieser Hinsicht als sehr nützlich. Als Beispiel für seine Anwendung möge wieder 12.1. dienen.

Es sei R ein diskreter Bewertungsring mit Quotientenkörper K und maximalem Ideal $\wp$. Ferner sei M ein R-freier R-Modul.

4.11.1. Definition. Ein R-Teilmodul N von M heißt *R-rein*, falls

$$N\wp = N \cap M\wp$$

gilt.

4.11.2. Bemerkung. Aus der Definition folgt wegen

$$(N + M\wp)/M\wp \cong N/(N \cap M\wp) \cong N/N\wp,$$

daß die Reduktion von N modulo $\wp$ als Teilmodul in der Reduktion von M vorkommt. Da zwar allgemein $N\wp \subseteq N \cap M\wp$, aber nicht notwendig Gleichheit gilt, kommt im allgemeinen nur ein gewisser Faktormodul der Reduktion von N in der Reduktion von M vor.

Nun sei H_R eine R-freie R-Algebra. An dieser Stelle wird übrigens nicht vorausgesetzt, daß $H_K := H_R \otimes_R K$ halbeinfach ist.

4.11.3. Satz. (Zassenhaus)
Es seien M ein R-freier H_R-Modul und U ein H_K-Teilmodul von $M \otimes_R K$. Dann existiert ein R-reiner H_R-Teilmodul N von M mit

$$N \otimes_R K \cong U.$$

Beweis. Der in [49], Satz I.17.3., angegebene Beweis läßt sich wörtlich auf die hier vorliegende Situation übertragen, da dort keine Voraussetzung über die Halbeinfachheit von $M \otimes_R K$ eingeht. $\sharp$

5. Φ_{12}-modulare Zerlegungszahlen

Mit diesem Kapitel beginnt die Beschreibung der expliziten Ergebnisse zur Bestimmung von Zerlegungszahlen. Der Abschnitt 5.2. ist etwas ausführlicher kommentiert als es die späteren Abschnitte sind, hier werden auch die im folgenden verwendeten Notationen erklärt. Da sich gewisse Schlußweisen in späteren Abschnitten analog wiederholen, sollte dies zum Verständnis auch der späteren Abschnitte ausreichen. Zu Details bezüglich der benutzten Methoden sei auf Kapitel 4. verwiesen.

5.1. Die Φ_{12}-modularen Zerlegungszahlen für $H(E_7)$

Da Φ_{12} das Poincaré-Polynom von $H(E_7)$ nur zur ersten Potenz teilt, sind alle nichttrivialen Blöcke vom Defekt 1. Dieser Fall wurde in [27] untersucht, dort sind auch die folgenden Zerlegungsmatrizen bestimmt worden. Sie werden hier wiedergegeben, um die Reihenfolge der projektiv-unzerlegbaren Charaktere festzulegen.
Man findet zwei zueinander duale nichttriviale Blöcke, alle hier nicht vorkommenden Charaktere sind vom Defekt 0. Bezüglich der hier verwendeten Numerierung und Paramterisierung der Charaktere beachte man Abschnitt 5.2.1. Verschwindende Einträge werden durch einen Punkt '.' bezeichnet.

		Ψ_1	Ψ_2	Ψ_3	Ψ_4	Ψ_5	Ψ_6
1	$(1,0)$	1	.	.	.	.	.
18	$(56,3)$	1	1	.	.	.	.
39	$(210,6)$	.	1	1	.	.	.
52	$(336,11)$	.	.	1	1	.	.
45	$(280,18)$	.	.	.	1	1	.
30	$(120,25)$	.	.	.	.	1	1
9	$(21,36)$	.	.	.	.	.	1

		Ψ_7	Ψ_8	Ψ_9	Ψ_{10}	Ψ_{11}	Ψ_{12}
2	$(1,63)$	1	.	.	.	.	.
17	$(56,30)$	1	1	.	.	.	.
40	$(210,21)$	.	1	1	.	.	.
51	$(336,14)$	.	.	1	1	.	.
46	$(280,9)$	.	.	.	1	1	.
29	$(120,4)$	.	.	.	.	1	1
10	$(21,3)$	.	.	.	.	.	1

5.2. Φ_{12}-modulare Zerlegungszahlen für $H(E_8)$

5.2.1. Blöcke. Zur Bestimmung einer Partition der irreduziblen Charaktere in Teilmengen, die Vereinigungen von Blöcken sind, verwendet man den in 4.3. beschriebenen 'Algorithmus'. Für die weiteren Rechnungen zu einem 'Block' wird nicht vorausgesetzt, daß die genaue Blockeinteilung schon bekannt ist. Aus den explizit bestimmten projektiven Charakteren und den daraus gebildeten Zerlegungsmatrizen folgt dann mit der Charakterisierung der Charaktere, die zu einem festen Block gehören, in Satz 3.5.1., daß die so gefundene Partition schon genau die Blockeinteilung ist.
Auch in fast allen später behandelten Beispielen wird es so sein, daß die mit den notwendigen Bedingungen gefundene Einteilung der Charaktere schon mit der Blockeinteilung identisch ist, ohne daß jedoch explizit darauf hingewiesen wird. Dies kann dann jeweils mit einem zu dem obigen Argument analogen nachgeprüft werden. Einzige Ausnahme ist der in 10.9.3. betrachtete Fall. Es sei noch angemerkt, daß in den Fällen, in denen die Zerlegungsmatrix nicht vollständig bestimmt wird, die möglichen Fälle so gering an der Zahl sind, daß diese durch Fallunterscheidung abgehandelt werden können.
Im folgenden werden nur die nichtrivialen Blöcke, das heißt, die Blöcke von echt positivem Defekt, in Form einer Tabelle beschrieben. In dieser Tabelle werden zu jedem Block der Defekt d, siehe Definition 3.5.3., zu nicht selbstdualen Blöcken, siehe Bemerkung 3.7.8., in der Spalte 'dl' der jeweilige duale Partner und die Nummern der jeweiligen irreduziblen Charaktere angegeben. Bezüglich der Numerierung beachte man die entsprechenden Bemerkungen in Abschnitt 4.1. Im Sinne der Bemerkungen in 3.7.7. werden die irreduziblen Charaktere einer Iwahori-Hecke-Algebra genauso parametrisiert wie es von den Charakteren der zugehörigen Weyl-Gruppe bekannt ist. In den unten stehenden Zerlegungsmatrizen ist zu der Nummer eines Charakters auch jeweils diese Parametrisierung angegeben.

Nr.	d	dl	Charaktere
1	2		$1, 2, 5, 6, 8, 9, 15, 16, 22, 23, 31, 37, 38, 39, 42,$
			$43, 44, 56, 72, 73, 77, 78, 97, 98, 102, 103$
2	1		$3, 4, 18, 19, 32, 33, 74, 75, 83$
3	1		$10, 11, 29, 30, 64, 65, 104$
4	1	5	$40, 52, 60, 68, 80, 81, 108$
5	1	4	$41, 51, 61, 69, 79, 82, 107$

Nun werden die einzelnen Blöcke in der Reihenfolge aufsteigenden Defekts untersucht.

5.2.2. Block 2. Man induziert die Defekt-0-Charaktere

$$\chi_4, \chi_{24}, \chi_{31}, \chi_{21}, \chi_{22}, \chi_{32}, \chi_{23}, \chi_3$$

von $H(E_7)$, siehe 4.4., und findet nach Einschränken auf Block 2 direkt die folgenden projektiven Charaktere. In der nachfolgenden Matrix werden die so gefundenen projektiven Charaktere mit $\Lambda_1, \dots, \Lambda_8$ bezeichnet und wiedergegeben als Summe von irreduziblen Charakteren. In diesem Sinne kann man die Spaltenvektoren der nachfolgenden Matrix mit den projektiven Charakteren identifizieren. Verschwindende Einträge werden weiterhin durch einen Punkt '.' bezeichnet.
Die hier gefundenen projektiven Charaktere sind offenbar schon unzerlegbar, damit ist die folgende Matrix bereits die Zerlegungsmatrix.

		Λ_1	Λ_2	Λ_3	Λ_4	Λ_5	Λ_6	Λ_7	Λ_8
3	$(28, 8)$	1	.	.	.	.	.	.	.
74	$(160, 7)$	1	1	.	.	.	.	.	.
18	$(300, 8)$	.	1	1	.	.	.	.	.
32	$(840, 14)$	.	.	1	1	.	.	.	.
83	$(1344, 19)$	.	.	.	1	1	.	.	.
33	$(840, 26)$	.	.	.	.	1	1	.	.
19	$(300, 44)$	.	.	.	.	.	1	1	.
75	$(160, 55)$	.	.	.	.	.	.	1	1
4	$(28, 68)$	.	.	.	.	.	.	.	1

5.2.3. Block 3. Durch Induzieren der projektiv-unzerlegbaren Charaktere $\Psi_1, \dots, \Psi_6$ von $H(E_7)$ und Einschränken auf Block 3 erhält man die folgenden projektiven Charaktere, die außerdem offenbar projektiv-unzerlegbar sind.

		Λ_1	Λ_2	Λ_3	Λ_4	Λ_5	Λ_6
10	$(84, 4)$	1	.	.	.	.	.
29	$(700, 6)$	1	1	.	.	.	.
64	$(4200, 12)$	.	1	1	.	.	.
104	$(7168, 17)$	.	.	1	1	.	.
65	$(4200, 24)$	.	.	.	1	1	.
30	$(700, 42)$	.	.	.	.	1	1
11	$(84, 64)$	.	.	.	.	.	1

5.2.4. Blöcke 4 **und** 5. Analog zu den oben gemachten Bemerkungen findet man unter Induktion von $\Psi_1, \ldots, \Psi_6$ von $H(E_7)$ die folgende Zerlegungsmatrix für Block 3 und durch Dualisieren die für Block 4.

		Λ_1	Λ_2	Λ_3	Λ_4	Λ_5	Λ_6
68	$(8,1)$	1	.	.	.	.	.
81	$(560,5)$	1	1	.	.	.	.
40	$(1344,8)$	.	1	1	.	.	.
60	$(3200,16)$	.	.	1	1	.	.
108	$(4200,21)$	.	.	.	1	1	.
52	$(2240,28)$	.	.	.	.	1	1
80	$(448,39)$	.	.	.	.	.	1

		Λ_1	Λ_2	Λ_3	Λ_4	Λ_5	Λ_6
69	$(8,91)$	1	.	.	.	.	.
82	$(560,47)$	1	1	.	.	.	.
41	$(1344,38)$	.	1	1	.	.	.
61	$(3200,22)$	.	.	1	1	.	.
107	$(4200,15)$	.	.	.	1	1	.
51	$(2240,10)$	.	.	.	.	1	1
79	$(448,9)$	.	.	.	.	.	1

5.2.5. Block 1. Man induziert alle projektiven Charaktere von $H(E_7)$, schränkt auf Block 1 ein und findet mit der in 4.5. beschriebenen Methode, daß das von diesen aufgespannte $\mathbb{Z}$-Gitter im Raum aller verallgemeinerten projektiven Charaktere dieses Blocks bereits von den linear unabhängigen Induzierten $\{\Lambda_i^1\}_{i=1}^{20}$ der folgenden Charaktere erzeugt wird:

$$\Psi_1, \Psi_7, \chi_4, \chi_3, \chi_6, \chi_5, \Psi_{12}, \Psi_{11}, \Psi_6, \Psi_5,$$

$$\chi_{27}, \chi_{28}, \chi_{57}, \chi_{44}, \chi_{25}, \chi_{43}, \chi_{26}, \chi_{59}, \chi_{50}, \chi_{49}.$$

Dabei werden mit Ψ die in 5.1. angegebenen projektiven Charaktere und mit χ die irreduziblen Charaktere von $H(E_7)$ bezeichnet. Die hier aufgeführten Charaktere von $H(E_7)$ sind vom Defekt 0.

	$\{\Lambda_i^1\}_{i=1}^{20}$																				
1	$(1,0)$	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2	$(1,120)$	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
5	$(35,2)$	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
6	$(35,74)$	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
8	$(50,8)$	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
9	$(50,56)$	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
15	$(210,4)$	1	.	1	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
16	$(210,52)$	.	1	.	1	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
22	$(525,12)$	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
23	$(525,36)$	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.
31	$(1400,20)$	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.
37	$(1050,10)$	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.
38	$(1050,34)$	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.
39	$(2100,20)$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.
42	$(2688,20)$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	1	.	.
43	$(1400,8)$	1	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	1	.
44	$(1400,32)$	.	1	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	1	.	.	1
56	$(4536,18)$	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	.	1	.	.	.	.	1	1	1
72	$(112,3)$	2	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
73	$(112,63)$	.	2	.	1	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
77	$(400,7)$	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.
78	$(400,43)$	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.
97	$(2800,13)$	.	.	.	.	.	.	1	2	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	1	.
98	$(2800,25)$	.	.	.	.	.	.	.	.	1	2	.	1	1	.	.	.	.	.	.	1
102	$(3360,13)$	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	1	1	.	.	1	1	.
103	$(3360,25)$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	1	1	1	.	1

Mit der in 4.6.3. angegebenen Methode findet man, daß die obigen projektiven Charaktere mit Ausnahme von Λ_1^1, Λ_2^1, Λ_8^1, Λ_{10}^1 projektiv-unzerlegbar sind. Außerdem stellt man mit derselben Methode fest, daß entweder Λ_1^1 projektiv-unzerlegbar oder $\Lambda_1^1 - \Lambda_3^1$ projektiv und dann auch unzerlegbar ist. Benutzung der Dualität zieht die analoge Aussage über Λ_2^1 und Λ_4^1 nach sich.

Zur Beantwortung dieser Frage konstruiert man durch explizites Induzieren, siehe 4.10., der Indexdarstellung von $H(E_7)$ einen Modul der Dimension 240 für $H(E_8)$. Dabei wird die Unbestimmte u zu einer primitiven 12-ten Einheitswurzel über $GF(13)$ spezialisiert, siehe Bemerkung 3.8.5. Da die Indexdarstellung zur generischen Iwahori-Hecke-Algebra hebbar ist, kann man dem induzierten Modul einen Charakter von $H(E_8)$ zuordnen, hier hat man:

$$\chi_{(1,0)} + \chi_{(35,2)} + \chi_{(112,3)} + \chi_{(84,4)} + \chi_{(8,1)}.$$

Es ist bereits bekannt, daß $\chi_{(1,0)}$, $\chi_{(84,4)}$ und $\chi_{(8,1)}$ unter Φ_{12}-modularer Reduktion irreduzibel bleiben. Für $\chi_{(35,2)}$ bleiben zwei mögliche Fälle:

Entweder ist $\chi_{(35,2)}$ irreduzibel, dann zerfällt

$$\chi_{(112,3)} = 1 + 35 + 76,$$

oder $\chi_{(35,2)}$ ist reduzibel, dann zerfallen

$$\chi_{(35,2)} = 1 + 34 \text{ und } \chi_{(112,3)} = 1^2 + 34 + 76.$$

Dabei geben Hochzahlen jeweils die Vielfachheit an, mit der ein Konstituent in der Zerlegung vorkommmt.
Nun kann man mit der MeatAxe die Konstituenten dieses induzierten Moduls explizit bestimmen. Man findet:

$$1a^2, 8a, 35a^2, 76a, 84a.$$

Die in 3.8.5. beschriebene Standardanwendung der Spezialisierung in einen endlichen Körper ergibt durch Vergleich der Dimensionen der Konstituenten, daß $\chi_{(35,2)}$ ein Φ_{12}-modular irreduzibler Charakter ist. Somit sind

$$\Lambda_1^2 := \Lambda_1^1 - \Lambda_3^1 \text{ und } \Lambda_2^2 := \Lambda_2^1 - \Lambda_4^1$$

projektiv. Alle anderen Basisvektoren bleiben unverändert, damit hat man eine neue Basis wie folgt:

	$\{\Lambda_i^2\}_{i=1}^{20}$																				
1	(1, 0)	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2	(1, 120)	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
5	(35, 2)	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
6	(35, 74)	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
8	(50, 8)	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
9	(50, 56)	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
15	(210, 4)	.	.	1	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
16	(210, 52)	.	.	.	1	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
22	(525, 12)	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
23	(525, 36)	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.
31	(1400, 20)	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.
37	(1050, 10)	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.
38	(1050, 34)	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.
39	(2100, 20)	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.
42	(2688, 20)	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	1	.	.
43	(1400, 8)	1	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	1	.
44	(1400, 32)	.	1	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	1	.	.	1
56	(4536, 18)	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	.	1	.	.	.	.	1	1	1
72	(112, 3)	1	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
73	(112, 63)	.	1	.	1	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
77	(400, 7)	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.
78	(400, 43)	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.
97	(2800, 13)	.	.	.	.	.	.	1	2	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	1	.
98	(2800, 25)	.	.	.	.	.	.	.	.	1	2	.	1	1	.	.	.	.	.	.	1
102	(3360, 13)	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	1	1	.	.	1	1	.
103	(3360, 25)	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	1	1	1	.	1

Nun sind Λ_1^2 und Λ_2^2 sogar unzerlegbar.
Mit Hilfe der oben gemachten Bemerkungen findet man, daß alle möglichen projektiven Summanden der noch nicht als unzerlegbar erkannten projektiven Charaktere in dem von den bekannten projektiven Charakteren aufgespannten Gitter liegen. Daraus folgt, daß der Rang der Zerlegungsmatrix, also damit die Anzahl der modular irreduziblen Darstellungen in diesem Block, bekannt ist. Außerdem folgt, daß die Zerlegungsmatrix Dreiecksgestalt hat. Auch in allen später behandelten Beispielen wird es möglich sein, den Rang der Zerlegungsmatrix zu bestimmen und zu zeigen, daß Dreiecksgestalt vorliegt, auch ohne daß dieses weiterhin explizit erwähnt wird.
Damit bleiben hier die folgenden, auch für die späteren Beispiele typischen,

5.2.6. Offene Fragen. Analog zu den oben gemachten Bemerkungen findet man für den projektiven Charakter Λ_8^2: Entweder ist Λ_8^2 projektiv-unzerlegbar oder $\Lambda_8^2 - \Lambda_{19}^2$ ist projektiv-unzerlegbar. Die dazu duale Aussage gilt für Λ_{10}^2 und Λ_{20}^2.
Dieses Problem erweist sich mit den heute zur Verfügung stehenden Ideen und Methoden als nicht lösbar und bleibt einer zukünftigen Untersuchung vorbehalten.

6. Φ_{10}-modulare Zerlegungszahlen

6.1. Die Φ_{10}-modularen Zerlegungszahlen für $H(E_7)$

Da Φ_{10} das Poincaré-Polynom von $H(E_7)$ nur zur ersten Potenz teilt, sind alle nichttrivialen Blöcke vom Defekt 1. Die folgenden Zerlegungsmatrizen wurden ebenfalls in [27] bestimmt. Die ersten beiden der nun folgenden Blöcke sind zueinander dual.

		Ψ_1	Ψ_2	Ψ_3	Ψ_4	Ψ_5	Ψ_6
1	$(1,0)$	1	.	.	.	.	.
10	$(21,3)$	1	1	.	.	.	.
38	$(189,7)$	.	1	1	.	.	.
57	$(420,10)$	.	.	1	1	.	.
56	$(405,15)$	.	.	.	1	1	.
35	$(189,22)$	.	.	.	.	1	1
16	$(35,31)$	.	.	.	.	.	1

		Ψ_7	Ψ_8	Ψ_9	Ψ_{10}	Ψ_{11}	Ψ_{12}
2	$(1,63)$	1	.	.	.	.	.
9	$(21,36)$	1	1	.	.	.	.
37	$(189,20)$	.	1	1	.	.	.
58	$(420,13)$	.	.	1	1	.	.
55	$(405,8)$	.	.	.	1	1	.
36	$(189,5)$	.	.	.	.	1	1
15	$(35,4)$	.	.	.	.	.	1

		Ψ_{13}	Ψ_{14}	Ψ_{15}	Ψ_{16}	Ψ_{17}	Ψ_{18}	Ψ_{19}
4	$(7,1)$	1	.	.	.	.	.	.
11	$(27,2)$	1	1	.	.	.	.	.
31	$(168,6)$	.	1	1	.	.	.	.
54	$(378,9)$	.	.	1	1	.	.	.
53	$(378,14)$	.	.	.	1	1	.	.
32	$(168,21)$	.	.	.	.	1	1	.
12	$(27,37)$	.	.	.	.	.	1	1
3	$(7,46)$	.	.	.	.	.	.	1

6.2. Die Φ_{10}-modularen Zerlegungszahlen für $H(E_8)$

6.2.1. Blöcke. Man findet wiederum mit der in 4.3. beschriebenen Methode folgende Einteilung der gewöhnlichen Charaktere echt positiven Defekts in Blöcke.

Nr.	d	dl	Charaktere
1	2		$1, 2, 3, 4, 10, 11, 24, 25, 31, 35, 36, 47, 50, 53,$
			$54, 55, 68, 69, 79, 80, 86, 87, 93, 94, 109, 110$
2	1	3	$5, 9, 58, 64, 81, 92, 100$
3	1	2	$6, 8, 57, 65, 82, 91, 101$

6.2.2. Blöcke 2 und 3. Durch Induzieren der projektiv unzerlegbaren Charaktere $\{\Psi_1, \ldots, \Psi_6\}$ von $H(E_7)$ und Einschränken auf Block 2 erhält man die folgenden projektiven Charaktere. Diese sind offenbar projektiv unzerlegbar. Es sei noch einmal an die Ergebnisse in [27] erinnert. Dualisieren ergibt die Zerlegungsmatrix für Block 3.

		Λ_1	Λ_2	Λ_3	Λ_4	Λ_5	Λ_6
5	$(35, 2)$	1	.	.	.	.	.
81	$(560, 5)$	1	1	.	.	.	.
100	$(3240, 9)$	.	1	1	.	.	.
64	$(4200, 12)$	.	.	1	1	.	.
58	$(2835, 22)$	.	.	.	1	1	.
92	$(1400, 29)$	.	.	.	.	1	1
9	$(50, 56)$	.	.	.	.	.	1

		Λ_1	Λ_2	Λ_3	Λ_4	Λ_5	Λ_6
6	$(35, 74)$	1	.	.	.	.	.
82	$(560, 47)$	1	1	.	.	.	.
101	$(3240, 31)$	.	1	1	.	.	.
65	$(4200, 24)$	.	.	1	1	.	.
57	$(2835, 14)$	.	.	.	1	1	.
91	$(1400, 11)$	.	.	.	.	1	1
8	$(50, 8)$	.	.	.	.	.	1

6.2.3. Block 1. Man induziert alle projektiven Charaktere von $H(E_7)$ und findet mit der in 4.5. beschriebenen Methode eine Basis $\{\Lambda_i^1\}_{i=1}^{20}$ aus den Induzierten von

$$\Psi_1, \Psi_7, \Psi_{13}, \chi_7, \Psi_{19}, \chi_8, \Psi_{12}, \Psi_6, \chi_{18}, \chi_{17},$$

$$\Psi_4, \chi_{46}, \chi_{45}, \chi_{21}, \chi_{22}, \chi_{41}, \chi_{20}, \chi_{19}, \chi_{50}, \chi_{49}.$$

Wiederum bezeichnen Ψ die in 6.1. angegebenen projektiven Charaktere und χ irreduzible Charaktere von $H(E_7)$.

	$\{\Lambda_i^1\}_{i=1}^{20}$																				
1	$(1,0)$	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2	$(1,120)$	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
3	$(28,8)$	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
4	$(28,68)$	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
10	$(84,4)$	2	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
11	$(84,64)$	.	2	.	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
24	$(567,6)$	1	.	2	1	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
25	$(567,46)$	.	1	.	.	2	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
31	$(1400,20)$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.
35	$(972,12)$	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.
36	$(972,32)$	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.
47	$(3150,18)$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	1	1	1	.	.
50	$(4200,18)$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	1	1	1	.	.	.	.
53	$(4480,16)$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	.	.	.	.	1	.	.	1	1
54	$(2268,10)$	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	1	.	.	.	.	.	.	1	.
55	$(2268,30)$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	1	.	.	.	.	.	.	1
68	$(8,1)$	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
69	$(8,91)$	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
79	$(448,9)$	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.
80	$(448,39)$	.	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.
86	$(1008,9)$	.	.	1	1	.	.	.	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.
87	$(1008,39)$	.	.	.	.	1	1	.	.	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.
93	$(1400,7)$	1	.	1	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.
94	$(1400,37)$	.	1	.	.	1	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
109	$(4536,13)$	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	1	.	1	1	.	1	.
110	$(4536,23)$	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	1	.	.	.	1	1	.	1	.	1

Mit Ausnahme von Λ_1^1, Λ_2^1, Λ_3^1, Λ_5^1, Λ_{11}^1 stellen sich diese Charaktere als projektiv-unzerlegbar heraus. Dabei wird wiederum die Methode aus 4.6.3. benutzt.

Zur Untersuchung dieser projektiven Charaktere auf Unzerlegbarkeit konstruiert man die Spiegelungsdarstellung von $H(E_8)$, siehe 4.8., und wählt eine Spezialisierung, die die Unbestimmte u auf eine primitive 10-te Einheitswurzel über $GF(11)$ abbildet. Die MeatAxe zeigt dann, daß die so erhaltene Darstellung irreduzibel über $GF(11)$ ist.
Daraus folgt, daß Λ_1^1 und Λ_3^1 einen gemeinsamen projektiven Summanden enthalten. Mit der Methode aus 4.6.3. stellt man fest, daß dieser gleich

$$\Lambda_3^2 := \Lambda_3^1 - \Lambda_4^1$$

sein muß, außerdem ist

$$\Lambda_1^2 := \Lambda_1^1 - \Lambda_3^2$$

projektiv. Mittels Dualität hat man noch:

$$\Lambda_5^2 := \Lambda_5^1 - \Lambda_6^1 \text{ und } \Lambda_2^2 := \Lambda_2^1 - \Lambda_5^2.$$

Jetzt betrachtet man die parabolische Teilalgebra $H(A_3) \times H(A_4)$, siehe die Bemerkungen in 4.4., deren Standarderzeuger zu den Standarderzeugern $\{1, 2, 3, 6, 5, 7, 8\}$ von $H(E_8)$ korrespondieren. Zur Numerierung der Standarderzeuger von $H(E_8)$ siehe die Tabelle in Satz 2.1.2.
Da Φ_{10} das Poincaré-Polynom von $H(A_3) \times H(A_4)$ nicht teilt, sind deren irreduzible Charaktere vom Defekt 0, nach 3.5.4. also schon projektiv. Man betrachtet das Tensorprodukt des Signumscharakters von $H(A_3)$ und des Indexcharakters von $H(A_4)$. Induktion nach $H(E_8)$ und Einschränken auf Block 1 ergibt einen projektiven Charakter, der sich wie folgt in die bisher gefundene Basis zerlegt:

$$\Lambda_9^1 + \Lambda_{11}^1 + \Lambda_{12}^1 - \Lambda_{16}^1.$$

Das zeigt, daß

$$\Lambda_{11}^2 := \Lambda_{11}^1 - \Lambda_{16}^1$$

projektiv ist. Damit sind alle projektiv-unzerlegbaren Charaktere gefunden.

	$\{\Lambda_i^2\}_{i=1}^{20}$																				
1	$(1,0)$	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2	$(1,120)$	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
3	$(28,8)$	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
4	$(28,68)$	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
10	$(84,4)$	1	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
11	$(84,64)$	.	1	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
24	$(567,6)$	.	.	1	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
25	$(567,46)$	.	.	.	1	.	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
31	$(1400,20)$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.
35	$(972,12)$	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.
36	$(972,32)$	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.
47	$(3150,18)$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	.	.
50	$(4200,18)$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	.	.	.	.
53	$(4480,16)$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	1	.	.	1	1
54	$(2268,10)$	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	1	.	.	.	.	.	.	1	.
55	$(2268,30)$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	1	.	.	.	.	.	.	1
68	$(8,1)$	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
69	$(8,91)$	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
79	$(448,9)$	1	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.
80	$(448,39)$	.	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.
86	$(1008,9)$	.	.	1	.	.	.	.	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.
87	$(1008,39)$	.	.	.	1	.	.	.	.	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.
93	$(1400,7)$	.	.	.	.	1	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.
94	$(1400,37)$	.	.	.	.	.	.	1	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
109	$(4536,13)$	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	1	.	1	.
110	$(4536,23)$	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	1	1	.	1	.	1

7. Φ_8-modulare Zerlegungszahlen

7.1. Die Φ_8-modularen Zerlegungszahlen für $H(E_7)$

Da Φ_8 das Poincaré-Polynom von $H(E_7)$ wiederum nur zur ersten Potenz teilt, kann auch hier auf [27] zurückgegriffen werden. Der erste und zweite sowie der dritte und vierte der nachfolgenden Blöcke sind zueinander dual.

		Ψ_1	Ψ_2	Ψ_3	Ψ_4	Ψ_5
1	$(1,0)$	1	.	.	.	.
25	$(105,6)$	1	1	.	.	.
44	$(216,9)$	.	1	1	.	.
48	$(280,17)$	.	.	1	1	.
35	$(189,22)$	.	.	.	1	1
9	$(21,36)$	.	.	.	.	1

		Ψ_6	Ψ_7	Ψ_8	Ψ_9	Ψ_{10}
2	$(1,63)$	1	.	.	.	.
26	$(105,21)$	1	1	.	.	.
43	$(216,16)$	.	1	1	.	.
47	$(280,8)$	.	.	1	1	.
36	$(189,5)$	.	.	.	1	1
10	$(21,3)$	.	.	.	.	1

		Ψ_{11}	Ψ_{12}	Ψ_{13}	Ψ_{14}	Ψ_{15}
4	$(7,1)$	1	.	.	.	.
29	$(120,4)$	1	1	.	.	.
38	$(189,7)$	.	1	1	.	.
28	$(105,15)$	.	.	1	1	.
17	$(56,30)$	.	.	.	1	1
12	$(27,37)$	.	.	.	.	1

		Ψ_{16}	Ψ_{17}	Ψ_{18}	Ψ_{19}	Ψ_{20}
3	$(7,46)$	1	.	.	.	.
30	$(120,25)$	1	1	.	.	.
37	$(189,20)$	.	1	1	.	.
27	$(105,12)$	.	.	1	1	.
18	$(56,3)$	.	.	.	1	1
11	$(27,2)$	.	.	.	.	1

7.2. Die Φ_8-modularen Zerlegungszahlen für $H(E_8)$

7.2.1. Blöcke. Man findet die folgende Einteilung der irreduziblen Charaktere, die nicht vom Defekt 0 sind.

Nr.	d	dl	Charaktere
1	2		$1, 2, 5, 6, 13, 14, 22, 23, 24, 25, 43, 44,$
			$45, 46, 57, 58, 66, 67, 74, 75, 88, 99, 104$
2	1	3	$3, 19, 48, 55, 89, 98$
3	1	2	$4, 18, 49, 54, 90, 97$
4	1	5	$10, 27, 30, 36, 73, 77$
5	1	4	$11, 28, 29, 35, 72, 78$
6	1	7	$40, 52, 69, 100, 107, 110$
7	1	6	$41, 51, 68, 101, 108, 109$

7.2.2. Blöcke 2 und 3. Durch Induzieren der folgenden projektiv-unzerlegbaren Charaktere

$$\Psi_{11}, \Psi_{12}, \Psi_{13}, \chi_{40}, \chi_{23}$$

von $H(E_7)$ erhält man direkt die nachfolgenden projektiven Charaktere für Block 2. Dualisieren liefert die Zerlegungsmatrix für Block 3.

		Λ_1	Λ_2	Λ_3	Λ_4	Λ_5
3	$(28, 8)$	1	.	.	.	.
89	$(1296, 13)$	1	1	.	.	.
48	$(2100, 16)$	.	1	1	.	.
98	$(2800, 25)$	.	.	1	1	.
55	$(2268, 30)$	.	.	.	1	1
19	$(300, 44)$	.	.	.	.	1

		Λ_1	Λ_2	Λ_3	Λ_4	Λ_5
4	$(28, 68)$	1	.	.	.	.
90	$(1296, 33)$	1	1	.	.	.
49	$(2100, 28)$	.	1	1	.	.
97	$(2800, 13)$	.	.	1	1	.
54	$(2268, 10)$	.	.	.	1	1
18	$(300, 8)$	.	.	.	.	1

7.2.3. Blöcke 4 **und** 5. Durch Induzieren der folgenden projektiv-unzerlegbaren Charaktere

$$\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4, \Psi_5$$

von $H(E_7)$ erhält man direkt die Zerlegungsmatrix für Block 4. Dualisieren liefert das Ergebnis für Block 5.

		Λ_1	Λ_2	Λ_3	Λ_4	Λ_5
10	$(84, 4)$	1	.	.	.	.
77	$(400, 7)$	1	1	.	.	.
27	$(700, 16)$	.	1	1	.	.
36	$(972, 32)$	.	.	1	1	.
30	$(700, 42)$	.	.	.	1	1
73	$(112, 63)$	.	.	.	.	1

		Λ_1	Λ_2	Λ_3	Λ_4	Λ_5
11	$(84, 64)$	1	.	.	.	.
78	$(400, 43)$	1	1	.	.	.
28	$(700, 28)$	.	1	1	.	.
35	$(972, 12)$	.	.	1	1	.
29	$(700, 6)$	.	.	.	1	1
72	$(112, 3)$	.	.	.	.	1

7.2.4. Blöcke 6 **und** 7. Analog erhält man aus den projektiv-unzerlegbaren Charakteren

$$\Psi_{11}, \Psi_1, \Psi_{18}, \Psi_5, \Psi_6$$

von $H(E_7)$ die folgenden Zerlegungsmatrizen.

		Λ_1	Λ_2	Λ_3	Λ_4	Λ_5
40	$(1344, 8)$	1	.	.	.	.
100	$(3240, 9)$	1	1	.	.	.
107	$(4200, 15)$	.	1	1	.	.
110	$(4536, 23)$	.	.	1	1	.
52	$(2240, 28)$	.	.	.	1	1
69	$(8, 91)$	.	.	.	.	1

		Λ_1	Λ_2	Λ_3	Λ_4	Λ_5
41	$(1344, 38)$	1	.	.	.	.
101	$(3240, 31)$	1	1	.	.	.
108	$(4200, 21)$	.	1	1	.	.
109	$(4536, 13)$	.	.	1	1	.
51	$(2240, 10)$	.	.	.	1	1
68	$(8, 1)$	.	.	.	.	1

7.2.5. Block 1**.** Mittels der nun schon mehrfach benutzten Methode findet man nach Induzieren aller projektiv-unzerlegbaren Charaktere von $H(E_7)$ aus den Induzierten von

$$\Psi_1, \Psi_6, \Psi_{11}, \Psi_{15}, \chi_{20}, \chi_{19}, \Psi_{13}, \Psi_{10}, \Psi_5,$$

$$\chi_7, \chi_8, \chi_{50}, \chi_{49}, \chi_{33}, \chi_{34}, \chi_{41}, \chi_{51}$$

die nachfolgende Basis:

	$\{\Lambda_i^1\}_{i=1}^{17}$																	
1	$(1, 0)$	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2	$(1, 120)$	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
5	$(35, 2)$	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
6	$(35, 74)$	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
13	$(175, 12)$	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
14	$(175, 36)$	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
22	$(525, 12)$	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
23	$(525, 36)$	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.
24	$(567, 6)$	.	.	2	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.
25	$(567, 46)$	.	.	.	2	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.
43	$(1400, 8)$	1	.	1	.	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.
44	$(1400, 32)$	.	1	.	1	.	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.
45	$(1575, 10)$	.	.	1	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.	1	.	.	.
46	$(1575, 34)$	.	.	.	1	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.	1	.	.
57	$(2835, 14)$	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	1	.
58	$(2835, 22)$	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	1	.	.	1	.
66	$(6075, 14)$	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.	1	.	1	.	.	1
67	$(6075, 22)$	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.	1	.	1	.	1
74	$(160, 7)$	.	.	1	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.
75	$(160, 55)$	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.
88	$(2016, 19)$	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.
99	$(5600, 19)$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	1
104	$(7168, 17)$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	1	1

Mit Ausnahme der projektiven Charaktere Λ_3^1 und Λ_4^1 sind diese sogar unzerlegbar. Es bleiben zwei mögliche Fälle: Entweder Λ_3^1 ist projektiv-unzerlegbar oder $\Lambda_3^1 - \Lambda_{10}^1$ ist projektiv und dann auch unzerlegbar. Unter Benutzung der Dualität folgt die analoge Aussage für Λ_4^1 und Λ_{11}^1.

Zur Klärung dieser Frage sei zunächst an die Bemerkungen in 3.8.6. erinnert. Es ist $W(E_8) \cong 2 \cdot O_8^+(2) : 2$. Die 2-modulare Zerlegungsmatrix dieser Gruppe kann leicht aus den Ergebnissen in [13] und [44] bestimmt werden. Man findet, daß $\chi_{(160,7)}$ irreduzibel modulo 2 bleibt. Also hat man mit

$$\Lambda_3^2 := \Lambda_3^1 - \Lambda_{10}^1 \text{ und } \Lambda_4^2 := \Lambda_4^1 - \Lambda_{11}^1$$

alle projektiv-unzerlegbaren Charaktere gefunden.

	$\{\Lambda_i^2\}_{i=1}^{17}$																	
1	$(1,0)$	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2	$(1,120)$	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
5	$(35,2)$	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
6	$(35,74)$	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
13	$(175,12)$	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
14	$(175,36)$	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
22	$(525,12)$	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
23	$(525,36)$	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.
24	$(567,6)$	.	.	1	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.
25	$(567,46)$	.	.	.	1	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.
43	$(1400,8)$	1	.	1	.	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.
44	$(1400,32)$	.	1	.	1	.	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.
45	$(1575,10)$	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.	1	.	.	.
46	$(1575,34)$	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.	1	.	.
57	$(2835,14)$	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	1	.
58	$(2835,22)$	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	1	.	.	1	.
66	$(6075,14)$	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.	1	.	1	.	.	1
67	$(6075,22)$	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.	1	.	1	.	1
74	$(160,7)$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.
75	$(160,55)$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.
88	$(2016,19)$	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.
99	$(5600,19)$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	1
104	$(7168,17)$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	1	1

8. Φ_6-modulare Zerlegungszahlen

8.1. Die Φ_6-modularen Zerlegungszahlen für $H(E_7)$

Die Zerlegungsmatrizen für $H(E_7)$ wurden in [30] bestimmt. Die projektiv-unzerlegbaren Charaktere werden für die Blöcke 2, 3, 4 und 1 in fortlaufender Reihenfolge wie dort angegeben durchnumeriert.

8.2. Die Φ_6-modularen Zerlegungszahlen für $H(A_1) \times H(E_6)$

Die Zerlegungsmatrix für $H(E_6)$ wurde ebenfalls in [30] bestimmt. Die projektiv-unzerlegbaren Charaktere werden forlaufend in der Reihenfolge wie dort angegeben durchnumeriert. Die projektiv-unzerlegbaren Charaktere für $H(A_1) \times H(E_6)$ erhält man also aus denen von $H(E_6)$ durch Tensorieren mit den gewöhnlichen Charakteren $\chi_{[1,1]}$ und $\chi_{[2]}$ von $H(A_1)$.

8.3. Die Φ_6-modularen Zerlegungszahlen für $H(D_5)$

Da das Poincaré-Polynom von $H(D_5)$ von Φ_6 nur zur ersten Potenz geteilt wird, sind alle nichttrivialen Blöcke vom Defekt 1.
Nun induziert man den Charakter $\chi_{[1^4]}$ von $H(A_4)$ nach $H(D_5)$ und erhält einen projektiven Charakter, der zusammen mit der Dualitätsoperation die Zerlegungsmatrizen wie folgt festlegt:

		Ψ_1	Ψ_2	Ψ_3	Ψ_4
3	$([],[1,1,1,1,1])$	1	.	.	.
1	$([1,1],[1,1,1])$	1	1	.	.
5	$([1,1],[2,1])$	.	1	1	.
12	$([1],[3,1])$	.	.	1	1
17	$([],[4,1])$	.	.	.	1

		Ψ_5	Ψ_6	Ψ_7	Ψ_8
18	$([],[5])$	1	.	.	.
14	$([2],[3])$	1	1	.	.
9	$([2],[2,1])$	.	1	1	.
6	$([1],[2,1,1])$	.	.	1	1
7	$([],[2,1,1,1])$	.	.	.	1

8.4. Die Φ_6-modularen Zerlegungszahlen für $H(D_7)$

8.4.1. Blöcke. Man findet:

Nr.	d	dl	Charaktere
1	2		$1, 3, 4, 8, 9, 12, 16, 17, 24, 29, 31,$
			$33, 40, 41, 44, 45, 46, 49, 52, 53, 55$
2	1	3	$5, 6, 11, 35, 47$
3	1	2	$18, 20, 32, 42, 48$
4	1	5	$7, 10, 13, 30, 50$
5	1	4	$23, 25, 28, 36, 54$

8.4.2. Blöcke 4 **und** 5. Man benutzt 4.4.5. und den von $H(A_3) \times H(A_3)$ induzierten projektiven Charakter $\chi_{[1^2],[1^2]}$. Daraus folgt sofort die Zerlegungsmatrix für Block 4 und dual für Block 5. Zum Zwecke späteren Gebrauchs werden hier und im nächsten Abschnitt die Grade der irreduziblen Charaktere zusätzlich angegeben.

			Ψ_{23}	Ψ_{24}	Ψ_{25}	Ψ_{26}
10	$([], [2, 1, 1, 1, 1, 1])$	6	1	.	.	.
7	$([1, 1, 1], [2, 1, 1])$	105	1	1	.	.
13	$([2, 1], [2, 1, 1])$	210	.	1	1	.
30	$([2], [3, 1, 1])$	126	.	.	1	1
50	$([], [5, 1, 1])$	15	.	.	.	1

			Ψ_{27}	Ψ_{28}	Ψ_{29}	Ψ_{30}
25	$([], [3, 1, 1, 1, 1])$	15	1	.	.	.
23	$([1, 1], [3, 1, 1])$	126	1	1	.	.
28	$([2, 1], [3, 1])$	210	.	1	1	.
36	$([3], [3, 1])$	105	.	.	1	1
54	$([], [6, 1])$	6	.	.	.	1

8.4.3. Blöcke 2 **und** 3. Induziert man die folgenden Charaktere

$$\chi_{[1^4],[1^4]}, \chi_{[3,1],[2^2]}, \chi_{[2^2],[4]}, \chi_{[2,1^2],[4]}, \chi_{[1^4],[3,1]}, \chi_{[1^4],[2^2]}, \chi_{[2,1^2],[2^2]}, \chi_{[4],[4]}$$

von $H(A_3) \times H(A_3)$ nach $H(D_7)$, so findet man direkt die nachfolgend genannten projektiven Charaktere.

			Ψ_{15}	Ψ_{16}	Ψ_{17}	Ψ_{18}
20	([], [2, 2, 2, 1])	14	1	.	.	.
18	([1], [2, 2, 2])	35	1	1	.	.
32	([2, 2], [3])	70	.	1	1	.
42	([2, 1], [4])	70	.	.	1	1
48	([1, 1], [5])	21	.	.	.	1

			Ψ_{19}	Ψ_{20}	Ψ_{21}	Ψ_{22}
5	([1, 1, 1, 1, 1], [2])	21	1	.	.	.
6	([1, 1, 1, 1], [2, 1])	70	1	1	.	.
11	([1, 1, 1], [2, 2])	70	.	1	1	.
35	([1], [3, 3])	35	.	.	1	1
47	([], [4, 3])	14	.	.	.	1

8.4.4. Block 1. Man induziert alle projektiv-unzerlegbaren Charaktere der parabolischen Teilalgebren $H(D_5)$ und $H(A_3) \times H(A_3)$. Die von

$$\big(\chi_{[1^4],[1^4]}\big)_{H(A_3)\times H(A_3)},$$

$$\big(\chi_2\big)_{H(D_5)},$$

$$\big(\chi_{[21^2],[2^2]}\big)_{H(A_3)\times H(A_3)},$$

$$\big(\chi_{[31],[1^4]}\big)_{H(A_3)\times H(A_3)},$$

$$\big(\chi_{[21^2],[31]}\big)_{H(A_3)\times H(A_3)},$$

$$\big(\chi_{10}\big)_{H(D_5)},$$

$$\big(\chi_{[2^2],[31]}\big)_{H(A_3)\times H(A_3)},$$

$$\big(\chi_{[31],[4]}\big)_{H(A_3)\times H(A_3)},$$

$$\big(\chi_{[1^4],[4]}\big)_{H(A_3)\times H(A_3)},$$

$$\big(\chi_{15}\big)_{H(D_5)},$$

$$\big(\chi_{[2^2],[4]}\big)_{H(A_3)\times H(A_3)},$$

$$\big(\chi_{[4],[4]}\big)_{H(A_3)\times H(A_3)},$$

$$\big(\chi_{16}\big)_{H(D_5)},$$

$$\big(\chi_{[21^2],[4]}\big)_{H(A_3)\times H(A_3)}$$

induzierten Charaktere bilden die nachfolgend angegebene Basis.

	$\{\Lambda_i^1\}_{i=1}^{14}$														
1	([1,1,1],[1,1,1,1])	2	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
3	([1],[1,1,1,1,1,1])	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
4	([],[1,1,1,1,1,1,1])	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
8	([1,1],[2,1,1,1])	1	2	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
9	([1],[2,1,1,1,1])	1	2	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
12	([1,1],[2,2,1])	1	.	2	.	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.
16	([],[2,2,1,1,1])	1	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.
17	([2,1],[2,2])	.	.	2	.	2	.	1	1	.	.	.	.	.	.
24	([1],[3,1,1,1])	.	1	.	1	1	.	1	.	1	.	.	.	.	.
29	([1],[3,2,1])	.	.	1	.	1	2	3	.	.	2	1	.	.	.
31	([],[3,2,1,1])	.	.	.	.	.	2	1	.	.	1	.	.	.	.
33	([2],[3,2])	.	.	1	.	1	.	2	1	.	1	1	1	.	.
40	([1],[4,1,1])	.	.	.	.	1	.	2	.	1	.	1	.	1	1
41	([],[4,1,1,1])	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.
44	([2],[4,1])	.	.	.	.	1	.	1	2	.	.	1	1	2	1
45	([],[4,2,1])	.	.	.	.	.	1	2	.	.	2	1	.	.	.
46	([3],[4])	.	.	.	.	.	.	.	2	.	.	.	2	1	.
49	([1],[5,1])	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	1	1	2	1
52	([],[5,2])	.	.	.	.	.	.	1	.	.	1	1	1	.	.
53	([1],[6])	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	1	1	.
55	([],[7])	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.
Θ_1		1	1	.	−1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
Θ_2		.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	−1
Θ_3		.	.	.	1	1	.	1	.	−1	−1	.	.	.	−1
Θ_4		.	1	.	.	.	1	.	.	.	−1	1	.	.	−1

Mit der generischen Charaktertafel für $H(D_7)$ bestimmt man den Rang der Zerlegungsmatrix für Block 1 zu 14. Außerdem findet man nach einer offensichtlichen Zeilenpermutation, daß die Zerlegungsmatrix Dreiecksgestalt besitzt. Damit kann man allgemeine Prinzipien über Dreiecksmatrizen benutzen, um die Unzerlegbarkeit von projektiven Charakteren zu beweisen. Es stellen sich Λ_4^1, Λ_9^1, Λ_{14}^1 als unzerlegbar heraus. Die projektiv-unzerlegbaren Charaktere

$$\Theta_1 := (\Psi_1)_{H(D_5)}, \Theta_2 := (\Psi_5)_{H(D_5)},$$

$$\Theta_3 := (\Psi_7)_{H(D_5)}, \Theta_4 := (\chi_{[1^4],[21^2]})_{H(A_3)\times H(A_3)}$$

zerlegen sich nach Induktion und Einschränken auf Block 1 in die gefundene Basis wie oben angegeben. Daraus folgt, daß

$$\Lambda_2^2 := \Lambda_2^1 - \Lambda_4^1, \Lambda_{11}^2 := \Lambda_{11}^1 - \Lambda_{14}^1,$$

$$\Lambda_{13}^2 := \Lambda_{13}^1 - \Lambda_{14}^1, \Lambda_7^2 := \Lambda_7^1 - \Lambda_9^1 - \Lambda_{14}^1$$

projektive Charaktere sind. Also hat man als neue Basis:

	$\{\Lambda_i^2\}_{i=1}^{14}$														
1	$([1,1,1],[1,1,1,1])$	2	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
3	$([1],[1,1,1,1,1,1])$	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
4	$([],[1,1,1,1,1,1,1])$	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
8	$([1,1],[2,1,1,1])$	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
9	$([1],[2,1,1,1,1])$	1	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
12	$([1,1],[2,2,1])$	1	.	2	.	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.
16	$([],[2,2,1,1,1])$	1	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.
17	$([2,1],[2,2])$	.	.	2	.	2	.	1	1	.	.	.	.	.	.
24	$([1],[3,1,1,1])$	.	.	.	1	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.
29	$([1],[3,2,1])$	.	.	1	.	1	2	3	.	.	2	1	.	.	.
31	$([],[3,2,1,1])$	.	.	.	.	.	2	1	.	.	1	.	.	.	.
33	$([2],[3,2])$	.	.	1	.	1	.	2	1	.	1	1	1	.	.
40	$([1],[4,1,1])$	.	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	1
41	$([],[4,1,1,1])$	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.
44	$([2],[4,1])$	.	.	.	.	1	.	.	2	.	.	.	1	1	1
45	$([],[4,2,1])$	.	.	.	.	.	1	2	.	.	2	1	.	.	.
46	$([3],[4])$	.	.	.	.	.	.	.	2	.	.	.	2	1	.
49	$([1],[5,1])$	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	1	1	1
52	$([],[5,2])$	.	.	.	.	.	.	1	.	.	1	1	1	.	.
53	$([1],[6])$	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	1	1	.
55	$([],[7])$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.
Θ_5		.	.	.	.	.	.	1	1	.	-1	.	.	-1	.
Θ_6		.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	-1	.	.	1

Es stellen sich nun Λ_2^2, Λ_{11}^2, Λ_{13}^2 als unzerlegbar heraus. Oben ist außerdem die Zerlegung der durch Induzieren aus

$$\Theta_5 := (\chi_{[31],[2^2]})_{H(A_3)\times H(A_3)}, \Theta_6 := (\chi_{[4],[21^2]})_{H(A_3)\times H(A_3)}$$

erhaltenen projektiven Charaktere in die neue Basis angegeben. Also sind auch

$$\Lambda_8^3 := \Lambda_8^2 - \Lambda_{13}^2 \text{ und } \Lambda_{10}^3 := \Lambda_{10}^2 - \Lambda_{11}^2$$

projektiv und man hat:

	$\{\Lambda_i^3\}_{i=1}^{14}$														
1	([1,1,1],[1,1,1,1])	2	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
3	([1],[1,1,1,1,1,1])	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
4	([],[1,1,1,1,1,1,1])	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
8	([1,1],[2,1,1,1])	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
9	([1],[2,1,1,1,1])	1	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
12	([1,1],[2,2,1])	1	.	2	.	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.
16	([],[2,2,1,1,1])	1	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.
17	([2,1],[2,2])	.	.	2	.	2	.	1	1	.	.	.	.	.	.
24	([1],[3,1,1,1])	.	.	.	1	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.
29	([1],[3,2,1])	.	.	1	.	1	2	3	.	.	1	1	.	.	.
31	([],[3,2,1,1])	.	.	.	.	.	2	1	.	.	1	.	.	.	.
33	([2],[3,2])	.	.	1	.	1	.	2	1	.	.	1	1	.	.
40	([1],[4,1,1])	.	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	1
41	([],[4,1,1,1])	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.
44	([2],[4,1])	.	.	.	.	1	.	.	1	.	.	.	1	1	1
45	([],[4,2,1])	.	.	.	.	.	1	2	.	.	1	1	.	.	.
46	([3],[4])	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	2	1	.
49	([1],[5,1])	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1
52	([],[5,2])	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	1	1	.	.
53	([1],[6])	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.
55	([],[7])	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.
Θ_7		.	.	.	1	.	1	.	.	.	−1	.	.	.	.
Θ_8		.	1	1	.	.	.	−1	.	.	1	1	.	.	.
Θ_9		.	.	.	.	1	.	1	.	.	−1	−1	.	.	1

Nun sind Λ_8^3, Λ_{10}^3 unzerlegbar. Aus der Zerlegung der Induzierten von

$\Theta_7 := (\chi_{[2^2],[1^4]})_{H(A_3)\times H(A_3)}, \Theta_8 := (\chi_{[21^2],[1^4]})_{H(A_3)\times H(A_3)}, \Theta_9 := (\Phi_3)_{H(D_5)}$

findet man noch die projektiven Charaktere

$$\Lambda_6^4 := \Lambda_6^3 - \Lambda_{10}^3, \Lambda_7^4 := \Lambda_7^3 - \Lambda_{10}^3 - \Lambda_{11}^3, \Lambda_3^4 := \Lambda_3^3 - \Lambda_7^4.$$

Dies ergibt:

	$\{\Lambda_i^4\}_{i=1}^{14}$															
1	([1, 1, 1], [1, 1, 1, 1])	35	2	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
3	([1], [1, 1, 1, 1, 1, 1])	7	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
4	([], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1])	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
8	([1, 1], [2, 1, 1, 1])	84	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
9	([1], [2, 1, 1, 1, 1])	35	1	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
12	([1, 1], [2, 2, 1])	105	1	.	1	.	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.
16	([], [2, 2, 1, 1, 1])	14	1	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.
17	([2, 1], [2, 2])	140	.	.	1	.	2	.	1	1	.	.	.	.	.	.
24	([1], [3, 1, 1, 1])	70	.	.	.	1	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.
29	([1], [3, 2, 1])	112	.	.	.	.	1	1	1	.	.	1	1	.	.	.
31	([], [3, 2, 1, 1])	35	.	.	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.
33	([2], [3, 2])	105	.	.	.	.	1	.	1	1	.	.	1	1	.	.
40	([1], [4, 1, 1])	70	.	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	1
41	([], [4, 1, 1, 1])	20	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.
44	([2], [4, 1])	84	.	.	.	.	1	.	.	1	.	.	.	1	1	1
45	([], [4, 2, 1])	35	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.
46	([3], [4])	35	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	2	1	.
49	([1], [5, 1])	35	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1
52	([], [5, 2])	14	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.
53	([1], [6])	7	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.
55	([], [7])	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.

Jetzt sind Λ_3^4, Λ_6^4, Λ_7^4 projektiv-unzerlegbar.
Mittels der MeatAxe stellt man fest, daß die Spiegelungsdarstellung von $H(D_7)$ nach Reduktion in den Körper $GF(7)$, wobei die Unbestimmte u zu einer primitiven 6-ten Einheitswurzel über $GF(7)$ spezialisiert wird, irreduzibel bleibt. Daraus folgt unter Beachtung der Dualität, daß

$$\Lambda_1^5 := \Lambda_1^4 - \Lambda_2^4 \text{ und } \Lambda_{12}^5 := \Lambda_{12}^4 - \Lambda_{13}^4$$

projektiv sind.
Nun konstruiert man die Zelldarstellung der Dimension 14 von $H(A_6)$, die zur Partition $[2^2 1^3]$ gehört, siehe 4.9.2. Der nach $H(D_7)$ induzierte Modul hat den gewöhnlichen Charakter

$$(\chi_1 + \chi_8 + \chi_9 + \chi_{12} + \chi_{16}) + (\chi_6 + \chi_7 + \chi_{11} + \chi_{13}) + (\chi_2 + \chi_{14} + \chi_{15}).$$

Der erste Term besteht aus Charakteren aus Block 1, der zweite aus Charakteren vom Defekt 1 und der dritte aus Defekt-0-Charakteren. Die Grade der Defekt-0-Charaktere sind

$$\chi_2(1) = 21, \chi_{14}(1) = 63, \chi_{15}(1) = 84.$$

Die Grade der anderen in obigem Charakter vorkommenden irreduziblen Konstituenten sind oben bei der vierten Basis respektive in den Abschnitten 8.4.3. und 8.4.2. angegeben.
Mit der MeatAxe bestimmt man die Konstituenten des nach $GF(7)$ reduzierten Moduls und findet:

$$111a, 99a^2, 84a, 64a^2 \text{ und weitere kleinerer Dimension.}$$

Aus den schon bekannten Zerlegungszahlen für die hier vorkommenden Charaktere folgt, daß $64a$ Konstituent der Reduktion des Charakters χ_{12} in den endlichen Körper ist. Damit ist

$$\Lambda_5^5 := \Lambda_5^4 - \Lambda_7^4$$

projektiv. Nun sind alle projektiv-unzerlegbaren Charaktere gefunden und die Zerlegungsmatrix lautet:

	$\{\Psi_i\}_{i=1}^{14} = \{\Lambda_i^5\}_{i=1}^{14}$														
1	$([1,1,1],[1,1,1,1])$	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
3	$([1],[1,1,1,1,1,1])$	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
4	$([],[1,1,1,1,1,1,1])$	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
8	$([1,1],[2,1,1,1])$	.	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
9	$([1],[2,1,1,1,1])$	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
12	$([1,1],[2,2,1])$	1	.	1	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.
16	$([],[2,2,1,1,1])$	1	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.
17	$([2,1],[2,2])$	.	.	1	.	1	.	1	1	.	.	.	.	.	.
24	$([1],[3,1,1,1])$	.	.	.	1	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.
29	$([1],[3,2,1])$	.	.	.	.	.	1	1	.	.	1	1	.	.	.
31	$([],[3,2,1,1])$	.	.	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.
33	$([2],[3,2])$	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	1	1	.	.
40	$([1],[4,1,1])$	.	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	1
41	$([],[4,1,1,1])$	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.
44	$([2],[4,1])$	.	.	.	.	1	.	.	1	.	.	.	.	1	1
45	$([],[4,2,1])$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.
46	$([3],[4])$	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	1	1	.
49	$([1],[5,1])$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1
52	$([],[5,2])$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.
53	$([1],[6])$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.
55	$([],[7])$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.

8.5. Φ_6-modulare Zerlegungszahlen für $H(E_8)$

8.5.1. Blöcke. Man findet:

Nr.	d	dl	Charaktere
1	4		$1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19,$ $20, 21, 22, 23, 27, 28, 29, 30, 32, 33, 34, 37, 38, 39, 43,$ $44, 48, 49, 50, 53, 56, 59, 64, 65, 68, 69, 70, 71, 79, 80,$ $81, 82, 84, 85, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 107, 108, 111, 112$
2	1	3	$24, 36, 58, 100, 109$
3	1	2	$25, 35, 57, 101, 110$
4	1		$26, 45, 46, 86, 87$
5	2		$40, 41, 51, 52, 60, 61, 72, 73, 74, 75, 77, 78, 83, 102, 103, 104$

8.5.2. Blöcke 2 **und** 3. Durch Induzieren der projektiv-unzerlegbaren Charaktere $\{\Psi_{12}, \Psi_7, \chi_{59}, \Psi_4\}$ von $H(E_7)$ erhält man direkt die folgenden projektiven Charaktere für Block 2. Dualität ergibt das Resultat für Block 3.

		Λ_1	Λ_2	Λ_3	Λ_4
24	$(567, 6)$	1	.	.	.
100	$(3240, 9)$	1	1	.	.
109	$(4536, 13)$	.	1	1	.
58	$(2835, 22)$	.	.	1	1
36	$(972, 32)$	.	.	.	1

		Λ_1	Λ_2	Λ_3	Λ_4
25	$(567, 46)$	1	.	.	.
101	$(3240, 31)$	1	1	.	.
110	$(4536, 23)$	.	1	1	.
57	$(2835, 14)$	.	.	1	1
35	$(972, 12)$	.	.	.	1

8.5.3. Block 4. Aus den projektiven Charakteren $\{\Psi_4, \Psi_3, \Psi_2, \Psi_1\}$ von $H(E_7)$ erhält man analog:

		Λ_1	Λ_2	Λ_3	Λ_4
87	$(1008, 39)$	1	.	.	.
46	$(1575, 34)$	1	1	.	.
26	$(1134, 20)$	.	1	1	.
45	$(1575, 10)$	.	.	1	1
86	$(1008, 9)$	.	.	.	1

8.5.4. Block 5. Man induziert alle projektiv-unzerlegbaren Charaktere von $H(E_7)$, schränkt auf Block 5 ein und findet aus den Induzierten von

$$\frac{1}{2} \cdot \Psi_{17}, \Psi_8, \chi_{13}, \frac{1}{2} \cdot \Psi_{32},$$

$$\Psi_4, \Psi_9, \frac{1}{2} \cdot (\Psi_{19} + \chi_{44}),$$

$$\Psi_7, \frac{1}{2} \cdot (\Psi_{27} + \chi_{43}), \chi_{43}, \chi_{44}$$

die folgende Basis. Die obigen Schreibweisen sind dabei etwas mißbräuchlich, da $\frac{1}{2} \cdot \Psi_{17}$ natürlich kein projektiver Charakter von $H(E_7)$ ist. Der in 4.5. beschriebene Algorithmus wählt als ersten Basisvektor den durch 2 dividierten von Ψ_{17} induzierten projektiven Charakter von $H(E_8)$. Läßt man auch rationale Linearkombinationen von irreduziblen Charakteren als verallgemeinerte Charaktere zu, so ist das ein Charakter, der aus $\frac{1}{2} \cdot \Psi_{17}$ durch Induzieren entsteht.

		Λ_1^1	Λ_2^1	Λ_3^1	Λ_4^1	Λ_5^1	Λ_6^1	Λ_7^1	Λ_8^1	Λ_9^1	Λ_{10}^1	Λ_{11}^1
40	$(1344, 8)$	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.
41	$(1344, 38)$	.	.	.	1	1	1	.	.	.	.	.
51	$(2240, 10)$	.	1	1	.	.	.	1	1	.	.	.
52	$(2240, 28)$	.	.	.	.	1	1	.	1	1	.	.
60	$(3200, 16)$	.	1	.	.	.	.	.	.	1	1	.
61	$(3200, 22)$	.	.	.	.	1	.	1	1	.	.	1
72	$(112, 3)$	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.
73	$(112, 63)$	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.
74	$(160, 7)$	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
75	$(160, 55)$	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.
77	$(400, 7)$	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.
78	$(400, 43)$	.	.	.	.	.	1	.	.	1	.	.
83	$(1344, 19)$	.	.	.	.	.	.	1	1	1	.	.
102	$(3360, 13)$	1	1	.	.	.	.	1	1	.	.	1
103	$(3360, 25)$	.	.	.	1	1	.	.	.	1	1	.
104	$(7168, 17)$	.	1	.	.	1	.	1	2	1	1	1
Ψ_2		.	1	.	.	.	.	1	.	.	.	-1
Ψ_3		.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	-1
Ψ_6		.	.	.	.	1	.	.	.	1	-1	.

Man stellt fest, daß diese mit Ausnahme von Λ_7^1, Λ_8^1, Λ_9^1 unzerlegbar sind. Außerdem ist oben die Zerlegung der Induzierten von Ψ_2, Ψ_3, Ψ_6 von $H(E_7)$ in die Basis wiedergegeben. Daraus folgt, daß

$$\Lambda_7^2 := \Lambda_7^1 - \Lambda_{11}^1, \Lambda_8^2 := \Lambda_8^1 - \Lambda_{11}^1, \Lambda_9^2 := \Lambda_9^1 - \Lambda_{10}^1$$

projektiv sind. Damit sind alle projektiv-unzerlegbaren Charaktere gefunden.

		Λ_1^2	Λ_2^2	Λ_3^2	Λ_4^2	Λ_5^2	Λ_6^2	Λ_7^2	Λ_8^2	Λ_9^2	Λ_{10}^2	Λ_{11}^2
40	$(1344, 8)$	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.
41	$(1344, 38)$	.	.	.	1	1	1	.	.	.	.	.
51	$(2240, 10)$	.	1	1	.	.	.	1	1	.	.	.
52	$(2240, 28)$	.	.	.	.	1	1	.	1	1	.	.
60	$(3200, 16)$	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1	.
61	$(3200, 22)$	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	1
72	$(112, 3)$	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.
73	$(112, 63)$	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.
74	$(160, 7)$	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
75	$(160, 55)$	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.
77	$(400, 7)$	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.
78	$(400, 43)$	.	.	.	.	.	1	.	.	1	.	.
83	$(1344, 19)$	.	.	.	.	.	.	1	1	1	.	.
102	$(3360, 13)$	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1
103	$(3360, 25)$	.	.	.	1	1	.	.	.	.	1	.
104	$(7168, 17)$	.	1	.	.	1	.	.	1	.	1	1

8.5.5. Block 1. Man induziert alle projektiv-unzerlegbaren Charaktere von $H(E_7)$ und findet analog zu oben aus

$$\Psi_{14}, \Psi_{30}, \Psi_{15}, \Psi_{17}, \Psi_{33}, \Psi_{32}, \Psi_1, \Psi_5, \Psi_{19}, \Psi_{27}, \Psi_{16}, \Psi_{26},$$
$$\frac{1}{2}(\Psi_{21}+\Psi_{22}+\Psi_{24}+\Psi_{20}+\Psi_{31}+\chi_{44}+\chi_{43}+\Psi_3+\Psi_7)+\frac{3}{2}(\chi_{33}+\chi_{34}+\Psi_8+\Psi_4+\Psi_2+\Psi_6),$$
$$\Psi_{22}, \Psi_{24}, \Psi_{12}, \Psi_{10}, \frac{1}{2}(\Psi_{20} + \chi_{33} + \Psi_8 + \Psi_2), \frac{1}{2}(\Psi_{31} + \chi_{34} + \Psi_4 + \Psi_6),$$
$$\chi_{33}, \chi_{14}, \chi_{34}, \chi_{13}, \Psi_8, \Psi_4, \chi_{44}, \chi_{43}, \Psi_2, \Psi_6, \Psi_3, \Psi_7, \frac{1}{2}\Psi_{11}, \chi_{59}$$

die erste Basis. Diese und die im folgenden sukzessive bestimmten Basen werden am Ende dieses Abschnitts in 8.5.7. angegeben.

Die projektiven Charaktere

$$\Lambda_{20}^1, \Lambda_{21}^1, \Lambda_{22}^1, \Lambda_{23}^1, \Lambda_{24}^1, \Lambda_{25}^1, \Lambda_{26}^1, \Lambda_{27}^1, \Lambda_{28}^1, \Lambda_{29}^1, \Lambda_{32}^1, \Lambda_{33}^1$$

sind bereits unzerlegbar. Die Induzierten von $\Psi_9, \Psi_{18}, \Psi_{20}$ zerlegen sich in der ersten Basis wie dort angegeben. Damit und mittels Dualität erhält man die folgenden neuen projektiven Charaktere:

$$\Lambda_9^2 := \Lambda_9^1 - 2 \cdot \Lambda_{26}^1, \Lambda_{10}^2 := \Lambda_{10}^1 - 2 \cdot \Lambda_{27}^1, \Lambda_{11}^2 := \Lambda_{11}^1 - 2 \cdot \Lambda_{24}^1 - \Lambda_{25}^1,$$

$$\Lambda^2_{12} := \Lambda^1_{12} - \Lambda^1_{24} - 2\cdot\Lambda^1_{25}, \Lambda^2_{16} := \Lambda^1_{16} - \Lambda^1_{32}, \Lambda^2_{17} := \Lambda^1_{17} - \Lambda^1_{32},$$
$$\Lambda^2_{18} := \Lambda^1_{18} - \Lambda^1_{20} - \Lambda^1_{24} - \Lambda^1_{28}, \Lambda^2_{19} := \Lambda^1_{19} - \Lambda^1_{22} - \Lambda^1_{25} - \Lambda^1_{29}.$$

Von diesen sind $\Lambda^2_9, \Lambda^2_{10}, \Lambda^2_{16}, \Lambda^2_{17}, \Lambda^2_{18}, \Lambda^2_{19}$ bereits unzerlegbar. Benutzt man diese neue projektiven Charaktere, so findet man, daß der Induzierte von Ψ_{21} von $H(E_7)$ sich wie folgt zerlegt:

$$2\cdot\Lambda^1_{13} - \Lambda^1_{14} - \Lambda^1_{15} - \Lambda^2_{18} - \Lambda^2_{19} - 2\cdot\Lambda^1_{20} - 2\cdot\Lambda^1_{22} - 2\cdot\Lambda^1_{24}$$
$$-2\cdot\Lambda^1_{25} - \Lambda^1_{26} - \Lambda^1_{27} - 2\cdot\Lambda^1_{28} - 2\cdot\Lambda^1_{29} - \Lambda^1_{30} - \Lambda^1_{31}.$$

Somit ist

$$\Lambda^2_{13} := \Lambda^1_{13} - \Lambda^2_{18} - \Lambda^2_{19} - \Lambda^1_{20} - \Lambda^1_{22} - \Lambda^1_{24} - \Lambda^1_{25} - \Lambda^1_{26} - \Lambda^1_{27} - \Lambda^1_{28} - \Lambda^1_{29}$$

projektiv und insgesamt erhält man die zweite Basis.

Nun zerlegt sich der Induzierte von Ψ_{21} in die zweite Basis wie dort angegeben. Weiter stellt man fest, daß Λ^2_{15} entweder unzerlegbar ist oder als Summe zweier zueinander dualer projektiv-unzerlegbarer Charaktere zerfällt. Da Λ^2_{13} invariant unter Dualisierung ist, folgt, daß $\Lambda^2_{13} - \Lambda^2_{15}$ projektiv ist.
Jetzt betrachtet man die Zerlegung von Ψ_{21} in die abgewandelte Basis, in der Λ^2_{13} durch $\Lambda^2_{13} - \Lambda^2_{15}$ ersetzt ist, und den Summanden von Λ^2_{14}, der den Eintrag 1 an der Stelle $\chi_{(168,24)}$ hat. Dieser Summand ist notwendig Summand von $\Lambda^2_{13} - \Lambda^2_{15}$. Daraus folgt aber, daß er den Eintrag 0 an der Stelle $\chi_{(175,36)}$ hat. Also existiert ein weiterer Summand von Λ^2_{14}, dieser ist dann notwendig Summand von Λ^2_{15}. Also zerfällt Λ^2_{15}. Damit erhält man eine neue Basis, indem man $\Lambda'_{13} := \Lambda^2_{14}$ setzt und für Λ^3_{14} und Λ^3_{15} die beiden unzerlegbaren Summanden von Λ^2_{15} einsetzt.
Jetzt zerlegt sich Ψ_{21} wie folgt:

$$\Lambda'_{13} + \Lambda^3_{14} - \Lambda^3_{15} - \Lambda^2_{18} + \Lambda^2_{19} + \Lambda^2_{26} - \Lambda^2_{27} - \Lambda^2_{30} + \Lambda^2_{31}.$$

Man findet außerdem, daß entweder Λ^2_{30} unzerlegbar ist oder als Summanden nur noch Λ^2_{33} enthält. Somit ist

$$\Lambda^3_{13} := \Lambda'_{13} - \Lambda^3_{15} - \Lambda^2_{18} - \Lambda^2_{27} - \Lambda^2_{30} + \Lambda^2_{33}$$

projektiv und man erhält die dritte Basis.

Nun betrachtet man die projektiv-unzerlegbaren Charaktere

$$\Theta_1 := \chi_{[1,1]} \otimes \Psi_1, \Theta_2 := \chi_{[1,1]} \otimes \Psi_8,$$

$$\Theta_3 := \chi_{[1,1]} \otimes \Psi_{22}, \Theta_4 := \chi_{[2]} \otimes \Psi_2$$

von $H(A_1) \times H(E_6)$ und Ψ_{16}, Ψ_{21} von $H(D_7)$ und findet projektive Charaktere, die sich in die dritte Basis wie dort angegeben zerlegen. Damit erhält man:

$$\Lambda_3^4 := \Lambda_3^3 - \Lambda_{18}^3, \Lambda_4^4 := \Lambda_4^3 - \Lambda_{18}^3, \Lambda_5^4 := \Lambda_5^3 - \Lambda_{19}^3, \Lambda_6^4 := \Lambda_6^3 - \Lambda_{19}^3,$$

$$\Lambda_{30}^4 := \Lambda_{30}^3 - \Lambda_{33}^3, \Lambda_{31}^4 := \Lambda_{31}^3 - \Lambda_{33}^3.$$

Dies ergibt die vierte Basis.

Man findet, daß Λ_{30}^4 und Λ_{31}^4 projektiv-unzerlegbar sind und daß alle möglichen Summanden der noch nicht als unzerlegbar erkannten projektiven Charaktere

$$\Lambda_1^4, \Lambda_2^4, \Lambda_3^4, \Lambda_4^4, \Lambda_5^4, \Lambda_6^4, \Lambda_7^4, \Lambda_8^4, \Lambda_{11}^4, \Lambda_{12}^4, \Lambda_{13}^4$$

bereits in dem von der vierten Basis aufgespannten Gitter liegen. Außerdem sieht man, daß die Zerlegungsmatrix nach einer offensichtlichen Zeilenpermutation Dreiecksgestalt hat.

Jetzt betrachtet man die Reduktion der Spiegelungsdarstellung von $H(E_7)$ in den endlichen Körper $GF(7)$, wobei die Unbestimmte u zu einer primitiven 6-ten Einheitswurzel über $GF(7)$ spezialisiert wird, und induziert diese nach $H(E_8)$. Als Charakter dieser Darstellung hat man:

$$\chi_{(28,68)} + \chi_{(35,74)} + \chi_{(210,52)} + \chi_{(567,46)} + \chi_{(8,91)} + \chi_{(112,63)} + \chi_{(160,55)} + \chi_{(560,47)}.$$

Mittels MeatAxe findet man die folgenden Konstituenten:

$$8a^2, 28a^2, 35a^2, 112a, 160a^2, 210a^2, 279a, 567a.$$

Anhand der Dimensionen und Vielfachheiten der gefundenen Konstituenten kann man diese den irreduziblen Charakteren als ihre Reduktionen in den endlichen Körper zuordnen. Man findet nacheinander, daß $567a$ zu $\chi_{(567,46)}$, $112a$ zu $\chi_{(112,63)}$, $160a$ zu $\chi_{(160,55)}$ und $210a$ zu $\chi_{(210,52)}$ korrespondiert. Weiter korrespondiert $35a$ zu $\chi_{(35,74)}$, $28a$ zu $\chi_{(28,68)}$ und $8a$ zu $\chi_{(8,91)}$.
Also ist $\chi_{(210,52)}$ auch bei Φ_6-modularer Reduktion irreduzibel. Daraus folgt unter Beachtung der Dualität, daß

$$\Lambda_7^5 := \Lambda_7^4 - \Lambda_{16}^4, \Lambda_8^5 := \Lambda_8^4 - \Lambda_{17}^4,$$

$$\Lambda_3' := \Lambda_3^4 - \Lambda_{16}^4, \Lambda_5' := \Lambda_5^4 - \Lambda_{17}^4$$

projektiv sind. Weiter ist $\chi_{(35,74)}$ irreduzibel, also sind sogar

$$\Lambda_3'' := \Lambda_3' - \Lambda_7^5 = \Lambda_3^4 - \Lambda_7^4, \Lambda_5'' := \Lambda_5^4 - \Lambda_8^4,$$

$$\Lambda_1' := \Lambda_1^4 - \Lambda_7^5, \Lambda_2' := \Lambda_2^4 - \Lambda_8^5$$

projektiv. Nun ist auch $\chi_{(28,68)}$ bei Φ_6-modularer Reduktion irreduzibel. Daraus folgt, daß ein gemeinsamer projektiv-unzerlegbarer Summand von Λ_3'' und Λ_4^4 existiert. Damit ist Λ_4^4 zerlegbar und die Analyse möglicher Summanden zeigt, daß

$$\Lambda_4^5 := \Lambda_4^4 - \Lambda_{21}^4, \Lambda_3^5 := \Lambda_3'' - \Lambda_4^5,$$

$$\Lambda_6^5 := \Lambda_6^4 - \Lambda_{23}^4, \Lambda_5^5 := \Lambda_5'' - \Lambda_6^5$$

ebenfalls projektiv sind. Schließlich ist $\chi_{(8,91)}$ bei Φ_6-modularer Reduktion irreduzibel. Daraus folgt, daß

$$\Lambda_1^5 := \Lambda_1^4 - \Lambda_7^5 - \Lambda_3^5, \Lambda_2^5 := \Lambda_2^4 - \Lambda_8^5 - \Lambda_5^5$$

projektiv sind, so daß man die unten angegebene fünfte Basis hat.

Damit sind auch $\Lambda_3^5, \Lambda_4^5, \Lambda_5^5, \Lambda_6^5, \Lambda_7^5, \Lambda_8^5$ projektiv-unzerlegbar.

Zur Untersuchung der verbleibenden Fragen induziert man zunächst die Darstellung $\chi_{[1^6]}$ von $H(A_6)$ über $GF(7)$ wie oben nach $H(E_7)$. Diese hat Konstituenten

$$1a, 7a, 13a, 14a \text{ und weitere größerer Dimension,}$$

wie man sich mit Hilfe der MeatAxe überzeugt. Da der zu dieser Darstellung gehörende Charakter von $H(E_7)$ die Konstituenten

$$\chi_{(1,63)}, \chi_{(7,46)}, \chi_{(15,28)}, \chi_{(21,36)} \text{ und weitere größerer Dimension}$$

enthält, folgt aus den in [30] angegegebenen Ergebnissen über die Φ_6-modularen Zerlegungszahlen für $H(E_7)$, daß die oben aufgeführten Konstituenten über dem endlichen Körper die Reduktionen Φ_6-modular irreduzibler Darstellungen von $H(E_7)$ sind. Insbesondere ist $14a$ die Reduktion der Φ_6-modular irreduziblen Darstellung, deren Charakter als Reduktion von $\chi_{(15,28)} - \chi_{(1,63)}$ geschrieben werden kann.

Nun kann man die so gewonnene Darstellung $14a$ von $H(E_7)$ nach $H(E_8)$ induzieren. Den zu dieser induzierten Darstellung gehörenden Charakter erhält man als Φ_6-modulare Reduktion von

$$\chi_{(50,56)} + \chi_{(700,28)} + \chi_{(1050,34)} + \chi_{(1400,29)} + \chi_{(400,43)}$$

$$-\chi_{(1,120)} - \chi_{(35,74)} - \chi_{(84,64)} - \chi_{(8,91)} - \chi_{(112,63)}.$$

Nun enthält $\chi_{(700,28)}$ den bisher unbekannten Konstituenten φ_{27}. Dabei bezeichnet φ_{27} die zu Λ^5_{27} gehörenden Φ_6-modular irreduzible Darstellung. Diese hat, wie aus den bekannten projektiven Charakteren zu ersehen ist, entweder die Dimension 660 oder 659 und alle anderen Φ_6-modularen Konstituenten dieser induzierten Darstellung haben eine Dimension kleiner als 659. Die MeatAxe zeigt, daß der induzierte Modul über $GF(7)$ einen Konstituenten der Dimension 660 hat.
Analog enthält $\chi_{(1050,34)}$ den bisher unbekannten Konstituenten φ_{29}, der die Dimension 279 oder 239 hat. Die MeatAxe zeigt weiter die Existenz eines Konstituenten $288a$ und eines Konstituenten $279a$, neben weiteren kleinerer Dimension. Also ist $288a$ Reduktion des Φ_6-modular irreduziblen Konstituenten der Dimension 288, der im gewöhnlichen Charakter $\chi_{(400,43)}$ vorkommt. Somit korrespondiert $279a$ zu φ_{29}.
Damit hat man

$$\Lambda^6_1 := \Lambda^5_1 - \Lambda^5_{26}, \Lambda^6_2 := \Lambda^5_2 - \Lambda^5_{27},$$

$$\Lambda^6_{11} := \Lambda^5_{11} - \Lambda^5_{28}, \Lambda^6_{12} := \Lambda^5_{12} - \Lambda^5_{29}$$

als neue projektive Charaktere und damit die sechste Basis.

Man erkennt nun $\Lambda^6_1, \Lambda^6_2, \Lambda^6_{11}, \Lambda^6_{12}$ als unzerlegbar.
Angenommen, $\Lambda^6_{13} - 2 \cdot \Lambda^6_{33}$ sei projektiv. Schränkt man diesen Charakter auf Block 1 von $H(E_7)$ ein, so findet man folgende Zerlegung in die projektiven Charaktere dort:

$$\Psi_{16} + \Psi_{18} + \Psi_{19} + \Psi_{20} - \Psi_{25} + \Psi_{26} + \Psi_{27} + \Psi_{28} + \Psi_{31},$$

Widerspruch. Man beachte, daß in der gewählten Numerierung, siehe 8.1., gerade $\Psi_{14}, \ldots, \Psi_{33}$ die projektiv-unzerlegbaren Charaktere von Block 1 für $H(E_7)$ sind.

8.5.6. Offene Fragen. Damit bleibt als einzige Frage offen, ob Λ^6_{13} projektiv-unzerlegbar oder $\Lambda^6_{13} - \Lambda^6_{33}$ projektiv und dann unzerlegbar ist.

8.5.7. Auf den nachfolgenden Seiten werden die oben sukzessive bestimmten Basen für Block 1 wiedergegeben.

	$\{\Lambda_i^1\}_{i=1}^{33}$																																	
1	(1, 0)	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2	(1, 120)	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
3	(28, 8)	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
4	(28, 68)	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
5	(35, 2)	1	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
6	(35, 74)	.	1	.	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
8	(50, 8)	2	.	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
9	(50, 56)	.	2	.	.	1	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
10	(84, 4)	3	.	2	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
11	(84, 64)	.	3	.	.	2	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
12	(168, 24)	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
13	(175, 12)	2	.	1	.	.	.	.	.	1	.	1	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
14	(175, 36)	.	2	.	.	1	.	.	.	.	1	.	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
15	(210, 4)	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
16	(210, 52)	.	.	.	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
17	(420, 20)	1	1	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	3	2	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
18	(300, 8)	1	.	2	1	.	.	1	.	.	.	1	.	1	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
19	(300, 44)	.	1	.	.	2	1	.	1	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
20	(350, 14)	.	.	1	2	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	1	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
21	(350, 38)	.	.	.	.	1	2	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	1	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
22	(525, 12)	1	.	2	1	.	.	.	.	.	.	2	1	1	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
23	(525, 36)	.	1	.	.	2	1	.	.	.	.	1	2	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.
27	(700, 16)	1	.	.	.	.	.	.	.	2	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.
28	(700, 28)	.	1	.	.	.	.	.	.	.	2	1	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.
29	(700, 6)	3	.	3	.	.	.	2	.	1	.	2	.	2	1	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.
30	(700, 42)	.	3	.	.	3	.	.	2	.	1	.	2	2	1	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.
32	(840, 14)	2	.	1	.	.	.	.	.	1	1	2	.	4	3	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.
33	(840, 26)	.	2	.	.	1	.	.	.	1	1	.	2	4	1	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	.
34	(1680, 22)	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	2	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.
37	(1050, 10)	3	.	3	1	.	.	1	.	2	.	2	.	2	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.
38	(1050, 34)	.	3	.	.	3	1	.	1	.	2	.	2	2	1	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.
39	(2100, 20)	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	3	3	3	1	.	1	1	1	1	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	1	.
43	(1400, 8)	1	.	3	1	.	.	1	.	1	.	3	1	4	1	.	1	.	2	.	.	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	1	.	.
44	(1400, 32)	.	1	.	.	3	1	.	1	.	1	1	3	4	2	.	.	1	.	2	.	.	.	.	.	1	.	.	.	1	1	.	.	.
48	(2100, 16)	.	.	2	3	.	.	.	.	.	.	2	1	3	1	.	1	1	3	.	1	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1	.
49	(2100, 28)	.	.	.	.	2	3	.	.	.	.	1	2	3	.	.	1	1	.	3	.	.	1	1	.	1	.	.	.	.	.	.	1	.
50	(4200, 18)	1	1	.	.	.	.	.	.	2	2	3	3	9	4	2	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	.	1
53	(4480, 16)	1	1	1	.	1	.	.	.	1	1	5	5	12	5	2	.	.	2	2	.	.	.	.	1	1	.	.	1	1	2	2	.	1
56	(4536, 18)	.	.	1	1	1	1	.	.	.	.	4	4	7	3	.	1	1	2	2	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	1	1	1	1
59	(5670, 18)	.	.	1	1	1	1	.	.	.	.	4	4	11	3	.	1	1	3	3	1	.	1	.	1	1	.	.	1	1	2	2	1	1
64	(4200, 12)	3	.	4	2	.	.	1	.	2	.	6	2	9	4	1	.	.	4	.	.	.	.	.	1	.	1	.	2	.	1	1	.	1
65	(4200, 24)	.	3	.	.	4	2	.	1	.	2	2	6	9	3	1	.	.	.	4	.	.	.	.	.	1	.	1	.	2	1	1	.	1
68	(8, 1)	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
69	(8, 91)	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
70	(56, 19)	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
71	(56, 49)	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
79	(448, 9)	3	.	2	.	.	.	1	.	.	.	2	.	2	1	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.
80	(448, 39)	.	3	.	.	2	.	.	1	.	.	.	2	2	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.
81	(560, 5)	2	.	4	1	.	.	2	.	.	.	1	.	1	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.
82	(560, 47)	.	2	.	.	4	1	.	2	.	.	.	1	1	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.
84	(840, 13)	1	.	2	1	.	.	.	.	.	.	1	.	3	1	.	.	.	2	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.
85	(840, 31)	.	1	.	.	2	1	.	.	.	.	.	1	3	.	.	.	.	.	2	.	.	1	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	.
91	(1400, 11)	4	.	2	.	.	.	1	.	3	.	3	1	5	2	2	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.
92	(1400, 29)	.	4	.	.	2	.	.	1	.	3	1	3	5	3	2	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.
93	(1400, 7)	2	.	5	2	.	.	2	.	.	.	4	1	4	2	.	1	.	3	.	.	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.
94	(1400, 37)	.	2	.	.	5	2	.	2	.	.	1	4	4	1	.	.	1	.	3	.	.	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.
95	(2400, 17)	.	.	1	2	.	.	.	.	.	.	2	1	4	.	.	1	1	2	1	1	1	1	.	1	.	.	.	.	.	.	1	1	.
96	(2400, 23)	.	.	.	.	1	2	.	.	.	.	1	2	4	1	.	1	1	1	2	1	.	1	1	.	1	.	.	.	.	1	.	1	.
107	(4200, 15)	2	.	2	1	.	.	.	.	3	.	4	3	9	2	1	.	.	2	1	.	.	.	.	1	.	1	.	1	1	1	2	.	1
108	(4200, 21)	.	2	.	.	2	1	.	.	.	3	3	4	9	5	1	.	.	1	2	.	.	.	.	.	1	.	1	1	1	2	1	.	1
111	(5600, 15)	1	.	3	2	.	.	.	.	.	.	7	4	10	4	.	1	1	5	1	1	.	.	.	2	1	.	.	1	.	2	1	1	1
112	(5600, 21)	.	1	.	.	3	2	.	.	.	.	4	7	10	2	.	1	1	1	5	.	.	1	.	1	2	.	.	.	1	1	2	1	1
Ψ_9		.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	−2	.
Ψ_{18}		.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	−2	−1	−2	.	.	.	.	.	.	.
Ψ_{20}		.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	.	−1	.	.	.	−1	.	.	.	−1	.	.	.	.	.

	$\{\Lambda_i^2\}_{i=1}^{33}$																																	
1	(1, 0)	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2	(1, 120)	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
3	(28, 8)	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
4	(28, 68)	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
5	(35, 2)	1	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
6	(35, 74)	.	1	.	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
8	(50, 8)	2	.	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
9	(50, 56)	.	2	.	.	1	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
10	(84, 4)	3	.	2	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
11	(84, 64)	.	3	.	.	2	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
12	(168, 24)	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
13	(175, 12)	2	.	1	.	.	.	.	.	1	.	1	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
14	(175, 36)	.	2	.	.	1	.	.	.	.	1	.	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
15	(210, 4)	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
16	(210, 52)	.	.	.	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
17	(420, 20)	1	1	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	3	2	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
18	(300, 8)	1	.	2	1	.	.	1	.	.	.	1	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
19	(300, 44)	.	1	.	.	2	1	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
20	(350, 14)	.	.	1	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
21	(350, 38)	.	.	.	.	1	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
22	(525, 12)	1	.	2	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
23	(525, 36)	.	1	.	.	2	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.
27	(700, 16)	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.
28	(700, 28)	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.
29	(700, 6)	3	.	3	.	.	.	2	.	1	.	2	.	1	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.
30	(700, 42)	.	3	.	.	3	.	.	2	.	1	.	2	1	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.
32	(840, 14)	2	.	1	.	.	.	.	.	1	1	2	.	3	3	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.
33	(840, 26)	.	2	.	.	1	.	.	.	1	1	.	2	3	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	.
34	(1680, 22)	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.
37	(1050, 10)	3	.	3	1	.	.	1	.	.	.	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.
38	(1050, 34)	.	3	.	.	3	1	.	1	.	.	.	2	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.
39	(2100, 20)	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	1	.
43	(1400, 8)	1	.	3	1	.	.	1	.	1	.	1	.	2	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	1	.	.
44	(1400, 32)	.	1	.	.	3	1	.	1	.	1	.	1	2	2	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	1	1	.	.	.
48	(2100, 16)	.	.	2	3	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	1	.	1	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1	.
49	(2100, 28)	.	.	.	.	2	3	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	1	1	.	1	.	.	.	.	.	.	1	.
50	(4200, 18)	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	3	3	5	4	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	.	1
53	(4480, 16)	1	1	1	.	1	.	.	.	1	1	2	2	8	5	2	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	1	1	2	2	.	1
56	(4536, 18)	.	.	1	1	1	1	.	.	.	.	1	1	3	3	.	.	.	1	1	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	1	1	1	1
59	(5670, 18)	.	.	1	1	1	1	.	.	.	.	1	1	5	3	.	.	.	.	.	1	.	1	.	1	1	.	.	1	1	2	2	1	1
64	(4200, 12)	3	.	4	2	.	.	1	.	.	.	4	1	4	4	1	.	.	1	.	.	.	.	.	1	.	1	.	2	.	1	1	.	1
65	(4200, 24)	.	3	.	.	4	2	.	1	.	.	1	4	4	3	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	1	.	1	.	2	1	1	.	1
68	(8, 1)	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
69	(8, 91)	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
70	(56, 19)	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
71	(56, 49)	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
79	(448, 9)	3	.	2	.	.	.	1	.	.	.	2	.	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.
80	(448, 39)	.	3	.	.	2	.	.	1	.	.	.	2	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.
81	(560, 5)	2	.	4	1	.	.	2	.	.	.	1	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.
82	(560, 47)	.	2	.	.	4	1	.	2	.	.	.	1	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.
84	(840, 13)	1	.	2	1	.	.	.	.	.	.	1	.	1	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.
85	(840, 31)	.	1	.	.	2	1	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	.
91	(1400, 11)	4	.	2	.	.	.	1	.	1	.	3	1	3	2	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.
92	(1400, 29)	.	4	.	.	2	.	.	1	.	1	1	3	3	3	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.
93	(1400, 7)	2	.	5	2	.	.	2	.	.	.	2	.	1	2	.	1	.	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.
94	(1400, 37)	.	2	.	.	5	2	.	2	.	.	.	2	1	1	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.
95	(2400, 17)	.	.	1	2	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	1	1	1	.	1	.	.	.	.	.	.	1	1	.
96	(2400, 23)	.	.	.	.	1	2	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	1	.	1	1	.	1	.	.	.	.	1	.	1	.
107	(4200, 15)	2	.	2	1	.	.	.	.	1	.	2	2	5	2	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	1	1	1	2	.	1
108	(4200, 21)	.	2	.	.	2	1	.	.	.	1	2	2	5	5	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	1	1	2	1	.	1
111	(5600, 15)	1	.	3	2	.	.	.	.	.	.	2	.	4	4	.	.	.	1	.	1	.	.	.	2	1	.	.	1	.	2	1	1	1
112	(5600, 21)	.	1	.	.	3	2	.	.	.	.	.	2	4	2	.	.	.	.	1	.	.	1	.	1	2	.	.	.	1	1	2	1	1
Ψ_{21}		.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	−1	−1	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	−1	−1	.	.

	$\{\Lambda_i^3\}_{i=1}^{33}$																																	
1	(1, 0)	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2	(1, 120)	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
3	(28, 8)	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
4	(28, 68)	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
5	(35, 2)	1	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
6	(35, 74)	.	1	.	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
8	(50, 8)	2	.	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
9	(50, 56)	.	2	.	.	1	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
10	(84, 4)	3	.	2	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
11	(84, 64)	.	3	.	.	2	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
12	(168, 24)	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
13	(175, 12)	2	.	1	.	.	.	.	.	1	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
14	(175, 36)	.	2	.	.	1	.	.	.	.	1	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
15	(210, 4)	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
16	(210, 52)	.	.	.	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
17	(420, 20)	1	1	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
18	(300, 8)	1	.	2	1	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
19	(300, 44)	.	1	.	.	2	1	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
20	(350, 14)	.	.	1	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
21	(350, 38)	.	.	.	.	1	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
22	(525, 12)	1	.	2	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
23	(525, 36)	.	1	.	.	2	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.
27	(700, 16)	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.
28	(700, 28)	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.
29	(700, 6)	3	.	3	.	.	.	2	.	1	.	2	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.
30	(700, 42)	.	3	.	.	3	.	.	2	.	1	.	2	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.
32	(840, 14)	2	.	1	.	.	.	.	.	1	1	2	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.
33	(840, 26)	.	2	.	.	1	.	.	.	1	1	.	2	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	.
34	(1680, 22)	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.
37	(1050, 10)	3	.	3	1	.	.	1	.	.	.	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.
38	(1050, 34)	.	3	.	.	3	1	.	1	.	.	.	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.
39	(2100, 20)	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	1	.
43	(1400, 8)	1	.	3	1	.	.	1	.	1	.	1	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	1	.	.
44	(1400, 32)	.	1	.	.	3	1	.	1	.	1	.	1	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	1	1	.	.	.
48	(2100, 16)	.	.	2	3	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1	.
49	(2100, 28)	.	.	.	.	2	3	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	1	1	.	1	.	.	.	.	.	.	1	.
50	(4200, 18)	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	3	3	2	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	.	1
53	(4480, 16)	1	1	1	.	1	.	.	.	1	1	2	2	3	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	1	1	2	2	.	1
56	(4536, 18)	.	.	1	1	1	1	.	.	.	.	1	1	2	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	1	1	1	1
59	(5670, 18)	.	.	1	1	1	1	.	.	.	.	1	1	2	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	1	1	.	.	1	1	2	2	1	1
64	(4200, 12)	3	.	4	2	.	.	1	.	.	.	4	1	2	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	1	.	1	.	2	.	1	1	.	1
65	(4200, 24)	.	3	.	.	4	2	.	1	.	.	1	4	2	1	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	1	.	1	.	2	1	1	.	1
68	(8, 1)	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
69	(8, 91)	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
70	(56, 19)	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
71	(56, 49)	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
79	(448, 9)	3	.	2	.	.	.	1	.	.	.	2	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.
80	(448, 39)	.	3	.	.	2	.	.	1	.	.	.	2	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.
81	(560, 5)	2	.	4	1	.	.	2	.	.	.	1	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.
82	(560, 47)	.	2	.	.	4	1	.	2	.	.	.	1	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.
84	(840, 13)	1	.	2	1	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.
85	(840, 31)	.	1	.	.	2	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	.
91	(1400, 11)	4	.	2	.	.	.	1	.	1	.	3	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.
92	(1400, 29)	.	4	.	.	2	.	.	1	.	1	1	3	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.
93	(1400, 7)	2	.	5	2	.	.	2	.	.	.	2	.	1	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.
94	(1400, 37)	.	2	.	.	5	2	.	2	.	.	.	2	1	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.
95	(2400, 17)	.	.	1	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	.	1	.	.	.	.	.	.	1	1	.
96	(2400, 23)	.	.	.	.	1	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	1	.	1	.	.	.	.	1	.	1	.
107	(4200, 15)	2	.	2	1	.	.	.	.	1	.	2	2	2	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	1	1	1	2	.	1
108	(4200, 21)	.	2	.	.	2	1	.	.	.	1	2	2	2	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	1	1	2	1	.	1
111	(5600, 15)	1	.	3	2	.	.	.	.	.	.	2	.	2	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.	2	1	.	.	1	.	2	1	1	1
112	(5600, 21)	.	1	.	.	3	2	.	.	.	.	.	2	2	.	.	.	.	.	1	.	.	1	.	1	2	.	.	.	1	1	2	1	1
Θ_1		.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	-1	.	.	.	.	.	1	.	3	.	.	.	.	.	.	1
Θ_2		.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	-1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
Θ_3		.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	-1	.	.	.	.	.	1	.	3	.	.	.	.	.	1
Θ_4		.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	-1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
Ψ_{16}		.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	1	.	.	-1
Ψ_{21}		.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	1	.	-1

	$\{\Lambda_i^4\}_{i=1}^{33}$																																	
1	(1, 0)	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2	(1, 120)	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
3	(28, 8)	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
4	(28, 68)	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
5	(35, 2)	1	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
6	(35, 74)	.	1	.	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
8	(50, 8)	2	.	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
9	(50, 56)	.	2	.	.	1	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
10	(84, 4)	3	.	2	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
11	(84, 64)	.	3	.	.	2	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
12	(168, 24)	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
13	(175, 12)	2	.	1	.	.	.	.	.	1	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
14	(175, 36)	.	2	.	.	1	.	.	.	.	1	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
15	(210, 4)	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
16	(210, 52)	.	.	.	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
17	(420, 20)	1	1	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
18	(300, 8)	1	.	1	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
19	(300, 44)	.	1	.	.	1	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
20	(350, 14)	.	.	1	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
21	(350, 38)	.	.	.	.	1	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
22	(525, 12)	1	.	2	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
23	(525, 36)	.	1	.	.	2	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.
27	(700, 16)	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.
28	(700, 28)	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.
29	(700, 6)	3	.	3	.	.	.	2	.	1	.	2	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.
30	(700, 42)	.	3	.	.	3	.	.	2	.	1	.	2	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.
32	(840, 14)	2	.	1	.	.	.	.	.	1	1	2	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.
33	(840, 26)	.	2	.	.	1	.	.	.	1	1	.	2	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	.
34	(1680, 22)	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.
37	(1050, 10)	3	.	3	1	.	.	1	.	.	.	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.
38	(1050, 34)	.	3	.	.	3	1	.	1	.	.	.	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.
39	(2100, 20)	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	1	.
43	(1400, 8)	1	.	3	1	.	.	1	.	1	.	1	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	1	.	.
44	(1400, 32)	.	1	.	.	3	1	.	1	.	1	.	1	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	1	1	.	.	.
48	(2100, 16)	.	.	1	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1	.
49	(2100, 28)	.	.	.	.	1	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	1	1	.	1	.	.	.	.	.	.	1	.
50	(4200, 18)	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	3	3	2	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	.	.	.	1
53	(4480, 16)	1	1	1	.	1	.	.	.	1	1	2	2	3	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	1	1	1	1	.	1
56	(4536, 18)	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	2	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	1	1
59	(5670, 18)	.	.	1	1	1	1	.	.	.	.	1	1	2	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	1	1	.	.	1	1	1	1	1	1
64	(4200, 12)	3	.	3	1	.	.	1	.	.	.	4	1	2	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	1	.	1	.	2	.	.	.	.	1
65	(4200, 24)	.	3	.	.	3	1	.	1	.	.	1	4	2	1	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	1	.	1	.	2	.	.	.	1
68	(8, 1)	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
69	(8, 91)	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
70	(56, 19)	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
71	(56, 49)	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
79	(448, 9)	3	.	2	.	.	.	1	.	.	.	2	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.
80	(448, 39)	.	3	.	.	2	.	.	1	.	.	.	2	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.
81	(560, 5)	2	.	4	1	.	.	2	.	.	.	1	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.
82	(560, 47)	.	2	.	.	4	1	.	2	.	.	.	1	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.
84	(840, 13)	1	.	2	1	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.
85	(840, 31)	.	1	.	.	2	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	.
91	(1400, 11)	4	.	2	.	.	.	1	.	1	.	3	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.
92	(1400, 29)	.	4	.	.	2	.	.	1	.	1	1	3	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.
93	(1400, 7)	2	.	4	1	.	.	2	.	.	.	2	.	1	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.
94	(1400, 37)	.	2	.	.	4	1	.	2	.	.	.	2	1	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.
95	(2400, 17)	.	.	1	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	.	1	.	.	.	.	.	.	1	1	.
96	(2400, 23)	.	.	.	.	1	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	1	.	1	.	.	.	.	1	.	1	.
107	(4200, 15)	2	.	2	1	.	.	.	.	1	.	2	2	2	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	1	1	.	1	.	1
108	(4200, 21)	.	2	.	.	2	1	.	.	.	1	2	2	2	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	1	1	1	.	.	1
111	(5600, 15)	1	.	2	1	.	.	.	.	.	.	2	.	2	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.	2	1	.	.	1	.	1	.	1	1
112	(5600, 21)	.	1	.	.	2	1	.	.	.	.	.	2	2	.	.	.	.	.	1	.	.	1	.	1	2	.	.	.	1	.	1	1	1

	$\{\Lambda_i^5\}_{i=1}^{33}$																																	
1	$(1,0)$	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2	$(1,120)$	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
3	$(28,8)$	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
4	$(28,68)$	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
5	$(35,2)$	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
6	$(35,74)$	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
8	$(50,8)$	1	.	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
9	$(50,56)$	.	1	.	.	1	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
10	$(84,4)$	1	.	1	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
11	$(84,64)$	.	1	.	.	1	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
12	$(168,24)$	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
13	$(175,12)$	1	.	1	.	.	.	.	.	1	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
14	$(175,36)$	.	1	.	.	1	.	.	.	.	1	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
15	$(210,4)$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
16	$(210,52)$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
17	$(420,20)$	1	1	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
18	$(300,8)$	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
19	$(300,44)$	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
20	$(350,14)$	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
21	$(350,38)$	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
22	$(525,12)$	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
23	$(525,36)$	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.
27	$(700,16)$	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.
28	$(700,28)$	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.
29	$(700,6)$	1	.	1	.	.	.	1	.	1	.	2	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.
30	$(700,42)$	.	1	.	.	1	.	.	1	.	1	.	2	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.
32	$(840,14)$	1	.	1	.	.	.	.	.	1	1	2	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.
33	$(840,26)$	.	1	.	.	1	.	.	.	1	1	.	2	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	.
34	$(1680,22)$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.
37	$(1050,10)$	1	.	1	1	.	.	1	.	.	.	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.
38	$(1050,34)$	.	1	.	.	1	1	.	1	.	.	.	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.
39	$(2100,20)$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	1	.
43	$(1400,8)$	.	.	1	1	.	.	.	.	1	.	1	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	1	.	.
44	$(1400,32)$	.	.	.	.	1	1	.	.	.	1	.	1	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	1	1	.	.	.
48	$(2100,16)$	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1	.
49	$(2100,28)$	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	1	1	.	1	.	.	.	.	.	.	1	.
50	$(4200,18)$	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	3	3	2	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	.	.	.	1
53	$(4480,16)$	.	.	1	.	1	.	.	.	1	1	2	2	3	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	1	1	1	1	.	1
56	$(4536,18)$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	2	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	1	1
59	$(5670,18)$	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	1	1	2	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	1	1	.	.	1	1	1	1	1	1
64	$(4200,12)$	1	.	1	1	.	.	1	.	.	.	4	1	2	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	1	.	1	.	2	.	.	.	.	1
65	$(4200,24)$	.	1	.	.	1	1	.	1	.	.	1	4	2	1	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	1	.	1	.	2	.	.	.	1
68	$(8,1)$	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
69	$(8,91)$	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
70	$(56,19)$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
71	$(56,49)$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
79	$(448,9)$	1	.	1	.	.	.	1	.	.	.	2	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.
80	$(448,39)$	.	1	.	.	1	.	.	1	.	.	.	2	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.
81	$(560,5)$	.	.	1	1	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.
82	$(560,47)$	.	.	.	.	1	1	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.
84	$(840,13)$	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.
85	$(840,31)$	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	.
91	$(1400,11)$	2	.	1	.	.	.	1	.	1	.	3	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.
92	$(1400,29)$	.	2	.	.	1	.	.	1	.	1	1	3	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.
93	$(1400,7)$	.	.	1	1	.	.	1	.	.	.	2	.	1	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.
94	$(1400,37)$	.	.	.	.	1	1	.	1	.	.	.	2	1	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.
95	$(2400,17)$	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	.	1	.	.	.	.	.	.	1	1	.
96	$(2400,23)$	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	1	.	1	.	.	.	.	1	.	1	.
107	$(4200,15)$	1	.	1	1	.	.	.	.	1	.	2	2	2	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	1	1	.	1	.	1
108	$(4200,21)$	.	1	.	.	1	1	.	.	.	1	2	2	2	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	1	1	1	.	.	1
111	$(5600,15)$	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	2	.	2	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.	2	1	.	.	1	.	1	.	1	1
112	$(5600,21)$	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	2	2	.	.	.	.	.	1	.	.	1	.	1	2	.	.	.	1	.	1	1	1

	$\{\Lambda_i^6\}_{i=1}^{33}$																																	
1	(1, 0)	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2	(1, 120)	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
3	(28, 8)	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
4	(28, 68)	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
5	(35, 2)	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
6	(35, 74)	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
8	(50, 8)	1	.	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
9	(50, 56)	.	1	.	.	1	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
10	(84, 4)	1	.	1	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
11	(84, 64)	.	1	.	.	1	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
12	(168, 24)	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
13	(175, 12)	1	.	1	.	.	.	.	.	1	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
14	(175, 36)	.	1	.	.	1	.	.	.	.	1	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
15	(210, 4)	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
16	(210, 52)	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
17	(420, 20)	1	1	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
18	(300, 8)	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
19	(300, 44)	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
20	(350, 14)	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
21	(350, 38)	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
22	(525, 12)	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
23	(525, 36)	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.
27	(700, 16)	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.
28	(700, 28)	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.
29	(700, 6)	1	.	1	.	.	.	1	.	1	.	1	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.
30	(700, 42)	.	1	.	.	1	.	.	1	.	1	.	1	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.
32	(840, 14)	1	.	1	.	.	.	.	.	1	1	1	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.
33	(840, 26)	.	1	.	.	1	.	.	.	1	1	.	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	.
34	(1680, 22)	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.
37	(1050, 10)	.	.	1	1	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.
38	(1050, 34)	.	.	.	.	1	1	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.
39	(2100, 20)	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	1	.
43	(1400, 8)	.	.	1	1	.	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	1	.	.
44	(1400, 32)	.	.	.	.	1	1	.	.	.	1	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	1	1	.	.	.
48	(2100, 16)	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1	.
49	(2100, 28)	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	1	1	.	1	.	.	.	.	.	.	1	.
50	(4200, 18)	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	2	2	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	.	.	.	1
53	(4480, 16)	.	.	1	.	1	.	.	.	1	1	1	1	3	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	1	1	1	1	.	1
56	(4536, 18)	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	2	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	1	1
59	(5670, 18)	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	2	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	1	1	.	.	1	1	1	1	1	1
64	(4200, 12)	.	.	1	1	.	.	1	.	.	.	2	1	2	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	1	.	1	.	2	.	.	.	.	1
65	(4200, 24)	.	.	.	.	1	1	.	1	.	.	1	2	2	1	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	1	.	1	.	2	.	.	.	1
68	(8, 1)	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
69	(8, 91)	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
70	(56, 19)	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
71	(56, 49)	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
79	(448, 9)	1	.	1	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.
80	(448, 39)	.	1	.	.	1	.	.	1	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.
81	(560, 5)	.	.	1	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.
82	(560, 47)	.	.	.	.	1	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.
84	(840, 13)	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.
85	(840, 31)	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	.
91	(1400, 11)	1	.	1	.	.	.	1	.	1	.	2	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.
92	(1400, 29)	.	1	.	.	1	.	.	1	.	1	1	2	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.
93	(1400, 7)	.	.	1	1	.	.	1	.	.	.	1	.	1	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.
94	(1400, 37)	.	.	.	.	1	1	.	1	.	.	.	1	1	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.
95	(2400, 17)	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	.	1	.	.	.	.	.	.	1	1	.
96	(2400, 23)	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	1	.	1	.	.	.	.	1	.	1	.
107	(4200, 15)	.	.	1	1	.	.	.	.	1	.	1	1	2	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	1	1	.	1	.	1
108	(4200, 21)	.	.	.	.	1	1	.	.	.	1	1	1	2	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	1	1	1	.	.	1
111	(5600, 15)	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	1	.	2	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.	2	1	.	.	1	.	1	.	1	1
112	(5600, 21)	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	1	2	.	.	.	.	.	1	.	.	1	.	1	2	.	.	.	1	.	1	1	1

9. Φ_5-modulare Zerlegungszahlen

9.1. Die Φ_5-modularen Zerlegungszahlen für $H(E_7)$

Da Φ_5 das Poincaré-Polynom von $H(E_7)$ nur zur ersten Potenz teilt, sind alle nichttrivialen Blöcke vom Defekt 1. Die Zerlegungsmatrizen wurden in [27] bestimmt. Die nachfolgenden Blöcke 1 und 2, 3 und 4 sowie 5 und 6 sind zueinander dual.

		Ψ_1	Ψ_2	Ψ_3	Ψ_4
1	$(1,0)$	1	.	.	.
21	$(84,12)$	1	1	.	.
43	$(216,16)$	.	1	1	.
35	$(189,22)$	.	.	1	1
17	$(56,30)$	.	.	.	1

		Ψ_5	Ψ_6	Ψ_7	Ψ_8
2	$(1,63)$	1	.	.	.
22	$(84,15)$	1	1	.	.
44	$(216,9)$	.	1	1	.
36	$(189,5)$	.	.	1	1
18	$(56,3)$	.	.	.	1

		Ψ_9	Ψ_{10}	Ψ_{11}	Ψ_{12}
4	$(7,1)$	1	.	.	.
54	$(378,9)$	1	1	.	.
60	$(512,11)$	.	1	1	.
32	$(168,21)$	.	.	1	1
12	$(27,37)$	.	.	.	1

		Ψ_{13}	Ψ_{14}	Ψ_{15}	Ψ_{16}
3	$(7,46)$	1	.	.	.
53	$(378,14)$	1	1	.	.
59	$(512,12)$	.	1	1	.
31	$(168,6)$	.	.	1	1
11	$(27,2)$	.	.	.	1

		Ψ_{17}	Ψ_{18}	Ψ_{19}	Ψ_{20}
10	$(21, 3)$	1	.	.	.
38	$(189, 7)$	1	1	.	.
52	$(336, 11)$	.	1	1	.
34	$(189, 17)$	.	.	1	1
8	$(21, 33)$	.	.	.	1

		Ψ_{21}	Ψ_{22}	Ψ_{23}	Ψ_{24}
9	$(21, 36)$	1	.	.	.
37	$(189, 20)$	1	1	.	.
51	$(336, 14)$	.	1	1	.
33	$(189, 10)$	.	.	1	1
7	$(21, 6)$	.	.	.	1

9.2. Die Φ_5-modularen Zerlegungszahlen für $H(E_8)$

9.2.1. Blöcke. Man findet:

Nr.	d	dl	Charaktere
1	2		$1, 2, 3, 4, 10, 11, 12, 24, 25, 26, 35,$ $36, 40, 41, 42, 54, 55, 56, 62, 63$
2	1	3	$5, 16, 32, 52, 58$
3	1	2	$6, 15, 33, 51, 57$
4	2		$68, 69, 70, 71, 72, 73, 76, 79, 80, 83, 86,$ $87, 88, 89, 90, 104, 105, 106, 109, 110$
5	1	6	$74, 82, 84, 101, 103$
6	1	5	$75, 81, 85, 100, 102$

9.2.2. Blöcke 2 und 3. Durch Induzieren der folgenden projektiv-unzerlegbaren Charaktere $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4$ von $H(E_7)$ erhält man direkt die nachfolgende Zerlegungsmatrix für Block 2. Dualisieren ergibt das Ergebnis für Block 3.

		Λ_1	Λ_2	Λ_3	Λ_4
5	$(35, 2)$	1	.	.	.
32	$(840, 14)$	1	1	.	.
58	$(2835, 22)$	.	1	1	.
52	$(2240, 28)$	.	.	1	1
16	$(210, 52)$	.	.	.	1

		Λ_1	Λ_2	Λ_3	Λ_4
6	$(35, 74)$	1	.	.	.
33	$(840, 26)$	1	1	.	.
57	$(2835, 14)$	.	1	1	.
51	$(2240, 10)$	.	.	1	1
15	$(210, 4)$	.	.	.	1

9.2.3. Blöcke 5 **und** 6**.** Analog erhält man aus $\Psi_9, \Psi_{10}, \Psi_{11}, \Psi_{12}$ sofort die Ergebnisse für die Blöcke 5 und 6.

		Λ_1	Λ_2	Λ_3	Λ_4
74	$(160, 7)$	1	.	.	.
84	$(840, 13)$	1	1	.	.
103	$(3360, 25)$	.	1	1	.
101	$(3240, 31)$	.	.	1	1
82	$(560, 47)$	.	.	.	1

		Λ_1	Λ_2	Λ_3	Λ_4
75	$(160, 55)$	1	.	.	.
85	$(840, 31)$	1	1	.	.
102	$(3360, 13)$	.	1	1	.
100	$(3240, 9)$	.	.	1	1
81	$(560, 5)$	.	.	.	1

9.2.4. Block 1. Man induziert alle projektiv-unzerlegbaren Charaktere von $H(E_7)$, schränkt auf Block 1 ein und findet eine Basis, die aus den von den folgenden Charakteren Induzierten besteht.

$$\Psi_1, \Psi_5, \Psi_9, \Psi_{13}, \chi_{15}, \chi_{16}, \Psi_2, \Psi_8, \Psi_4, \Psi_{10}, \Psi_7, \Psi_3, \chi_{46}, \chi_{45}.$$

Man stellt sofort fest, daß alle diese bereits unzerlegbar sind. Damit ist die Zerlegungsmatrix bestimmt.

	$\{\Lambda_i\}_{i=1}^{14}$														
1	$(1,0)$	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2	$(1,120)$	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
3	$(28,8)$	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
4	$(28,68)$	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
10	$(84,4)$	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
11	$(84,64)$	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.
12	$(168,24)$	1	1	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.
24	$(567,6)$	.	.	1	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.
25	$(567,46)$	.	.	.	1	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.
26	$(1134,20)$	.	.	1	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.
35	$(972,12)$	1	.	.	.	1	.	1	.	.	.	1	.	.	.
36	$(972,32)$	.	1	.	.	.	1	1	.	.	.	.	1	.	.
40	$(1344,8)$	.	.	.	.	1	.	.	1	.	.	1	.	.	.
41	$(1344,38)$	.	.	.	.	.	1	.	.	1	.	.	1	.	.
42	$(2688,20)$	.	.	.	.	.	.	1	.	.	1	1	1	.	.
54	$(2268,10)$	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	1	.
55	$(2268,30)$	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	1
56	$(4536,18)$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	1	1
62	$(4096,12)$	.	.	1	.	.	.	.	1	.	1	1	.	1	.
63	$(4096,26)$	.	.	.	1	.	.	.	.	1	1	.	1	.	1

9.2.5. Block 4. Völlig analog zu Block 1 erhält man hier aus den projektiv-unzerlegbaren Charakteren

$$\Psi_1, \Psi_5, \chi_{14}, \chi_{13}, \Psi_8, \Psi_4, \Psi_{19}, \chi_{20}, \chi_{19}, \Psi_2, \chi_{24}, \chi_{23}, \chi_{47}, \chi_{48}$$

von $H(E_7)$ die vollständige Zerlegungsmatrix.

	$\{\Lambda_i\}_{i=1}^{14}$														
68	$(8,1)$	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
69	$(8,91)$	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
70	$(56,19)$	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
71	$(56,49)$	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
72	$(112,3)$	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
73	$(112,63)$	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.
76	$(448,25)$	.	.	1	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.
79	$(448,9)$	.	.	.	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.
80	$(448,39)$	.	.	.	.	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.
83	$(1344,19)$	1	1	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.
86	$(1008,9)$	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.
87	$(1008,39)$	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	1	.	.
88	$(2016,19)$	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	.	.	.	.
89	$(1296,13)$	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.
90	$(1296,33)$	.	.	.	1	.	.	1	.	.	.	.	1	.	.
104	$(7168,17)$	.	.	.	.	.	.	1	.	.	1	.	.	1	1
105	$(4096,11)$	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.	1	.	1	.
106	$(4096,27)$	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	1	.	1
109	$(4536,13)$	1	.	.	.	1	.	.	1	.	1	.	.	1	.
110	$(4536,23)$	.	1	.	.	.	1	.	.	1	1	.	.	.	1

10. Φ_4-modulare Zerlegungszahlen

10.1. Die Φ_4-modularen Zerlegungszahlen für $H(E_7)$

Diese Zerlegungsmatrizen wurden in [30] bestimmt. Die projektiv-unzerlegbaren Charaktere werden für die Blöcke 1, 2, 3 und 4 in fortlaufender Reihenfolge wie dort angegeben durchnumeriert.

10.2. Die Φ_4-modularen Zerlegungszahlen für $H(A_3)$

Hier findet man genau einen nichttrivialen Block, dieser ist vom Defekt 1. Die Zerlegungszahlen für Blöcke vom Defekt 1 von generischen Iwahori-Hecke-Algebren vom Typ $H(A_n)$ können aus den von P. Fong und B. Srinivasan in [24] erzielten Ergebnissen gewonnen werden. Dabei wendet man den Satz von Dipper, siehe 3.7.3., an und beachtet noch, daß mit Korollar 3.8.4. für genügend große Primzahlen l die Zerlegungsabbildungen D_e und D_l übereinstimmen.

		Ψ_1	Ψ_2	Ψ_3
1	$(1,1,1,1)$	1	.	.
2	$(2,1,1)$	1	1	.
4	$(3,1)$	.	1	1
5	(4)	.	.	1

10.3. Die Φ_4-modularen Zerlegungszahlen für $H(A_5)$

Hier findet man zwei zueinander duale Blöcke, ebenfalls vom Defekt 1. Mit den in 10.2. gemachten Bemerkungen findet man:

		Ψ_1	Ψ_2	Ψ_3
1	$(1,1,1,1,1,1)$	1	.	.
4	$(2,2,2)$	1	1	.
9	$(4,2)$	.	1	1
10	$(5,1)$	.	.	1

		Ψ_4	Ψ_5	Ψ_6
2	$(2,1,1,1,1)$	1	.	.
3	$(2,2,1,1)$	1	1	.
7	$(3,3)$	.	1	1
11	(6)	.	.	1

10.4. Die Φ_4-modularen Zerlegungszahlen für $H(D_4)$

Man findet, daß die Charaktere von nichtverschwindendem Defekt einen Block vom Defekt 2 bilden. Aus der generischen Charaktertafel findet man, daß in diesem Block fünf Φ_4-modular irreduzible Darstellungen liegen.
Nun induziert man die folgenden projektiven Charaktere von $H(A_3)$ nach $H(D_4)$:

$$\Psi_1^{(1)}, \chi_3^{(3)}, \chi_3^{(2)}, \chi_3^{(1)}, \Psi_3^{(1)}.$$

Dabei verwendet man drei verschiedene jeweils zu $H(A_3)$ isomorphe parabolische Teilalgebren von $H(D_4)$, indem jeweils ein anderer Endpunkt des Coxeter-Graphen vom Typ D_4 weggelassen wird, siehe die Tabelle nach Satz 2.1.2. Die oberen Indizes beziehen sich auf die verschiedenen Teilalgebren.
Man stellt fest, daß die so erhaltenen projektiven Charaktere bereits unzerlegbar sind.

		Ψ_1	Ψ_2	Ψ_3	Ψ_4	Ψ_5
1	$([1,1],+)$	1	1	.	.	.
2	$([1,1],-)$	1	.	1	.	.
4	$([],[1,1,1,1])$	1	.	.	.	.
6	$([1],[2,1])$	1	1	1	1	1
7	$([],[2,1,1])$	1	.	.	1	.
8	$([2],+)$	.	1	.	.	1
9	$([2],-)$	.	.	1	.	1
12	$([],[3,1])$	.	.	.	1	1
13	$([],[4])$	.	.	.	.	1

10.5. Die Φ_4-modularen Zerlegungszahlen für $H(A_1) \times H(D_4)$

Hier erhält man die projektiv-unzerlegbaren Charaktere als Tensorprodukte der projektiv-unzerlegbaren Charaktere von $H(D_4)$ mit den gewöhnlichen Charakteren $\chi_{[2]}$ und $\chi_{[1^2]}$ von $H(A_1)$.

10.6. Die Φ_4-modularen Zerlegungszahlen für $H(D_5)$

10.6.1. Blöcke.
Man findet

Nr.	d	dl	Charaktere
1	1		$5, 7, 9, 17$
2	2		$1, 2, 3, 6, 8, 10, 12, 13, 14, 15, 16, 18$

10.6.2. Block 1. Man betrachtet die Grade der in diesem Block vorkommenden Darstellungen und beachtet die Bemerkung 4.4.5. Dies legt die Zerlegungszahlen fest.

		Ψ_1	Ψ_2	Ψ_3
7	([], [2, 1, 1, 1])	1	.	.
5	([1, 1], [2, 1])	1	1	.
9	([2], [2, 1])	.	1	1
17	([], [4, 1])	.	.	1

10.6.3. Block 2. Nach Induzieren aller projektiv-unzerlegbaren Charaktere von $H(D_4)$ erhält man die folgende Basis aus den Induzierten von

$$\Psi_1, \chi_3, \Psi_2, 1/2 \cdot (\Psi_4 + \chi_{10}), \Psi_5, \chi_{10}, \chi_{11}.$$

		Λ_1^1	Λ_2^1	Λ_3^1	Λ_4^1	Λ_5^1	Λ_6^1	Λ_7^1
1	([1, 1], [1, 1, 1])	2	1	1	.	.	.	.
2	([1], [1, 1, 1, 1])	1	1	.	.	.	.	.
3	([], [1, 1, 1, 1, 1])	1	.	.	.	.	.	.
6	([1], [2, 1, 1])	2	1	1	1	1	.	.
8	([1], [2, 2])	1	.	1	1	1	1	.
10	([], [2, 2, 1])	1	.	.	1	.	1	.
12	([1], [3, 1])	1	.	1	1	2	.	1
13	([], [3, 1, 1])	1	.	.	1	1	.	.
14	([2], [3])	.	.	1	.	2	.	1
15	([], [3, 2])	.	.	.	1	1	1	.
16	([1], [4])	.	.	.	.	1	.	1
18	([], [5])	.	.	.	.	1	.	.
		.	.	.	2	.	-1	.

Mittels der generischen Charaktertafel stellt man fest, daß der Rang der Zerlegungsmatrix in der Tat 7 ist. Daraus folgt, daß $\Lambda_2^1, \Lambda_3^1, \Lambda_6^1, \Lambda_7^1$ unzerlegbar sind.

Für den von Ψ_4 von $H(D_4)$ induzierten projektiven Charakter findet man die oben angegebene Zerlegung in die Basis, also ist auch

$$\Lambda_4^2 := \Lambda_4^1 - \Lambda_6^1$$

projektiv.

Weiter ist die Reduktion von χ_2, der Spiegelungsdarstellung, in den endlichen Körper $GF(5)$ irreduzibel. Dabei wird die Unbestimmte u zu einer primitiven 4-ten Einheitswurzel über $GF(5)$ spezialisiert. Also sind unter Beachtung der Dualität auch

$$\Lambda_1^2 := \Lambda_1^1 - \Lambda_2^1 \text{ und } \Lambda_5^2 := \Lambda_5^1 - \Lambda_7^1$$

projektiv und man hat:

		Λ_1^2	Λ_2^2	Λ_3^2	Λ_4^2	Λ_5^2	Λ_6^2	Λ_7^2
1	([1, 1], [1, 1, 1])	1	1	1	.	.	.	.
2	([1], [1, 1, 1, 1])	.	1	.	.	.	.	.
3	([], [1, 1, 1, 1, 1])	1	.	.	.	.	.	.
6	([1], [2, 1, 1])	1	1	1	1	1	.	.
8	([1], [2, 2])	1	.	1	.	1	1	.
10	([], [2, 2, 1])	1	.	.	.	.	1	.
12	([1], [3, 1])	1	.	1	1	1	.	1
13	([], [3, 1, 1])	1	.	.	1	1	.	.
14	([2], [3])	.	.	1	.	1	.	1
15	([], [3, 2])	.	.	.	.	1	1	.
16	([1], [4])	.	.	.	.	.	.	1
18	([], [5])	.	.	.	.	1	.	.

Man stellt fest, daß Λ_4^2 unzerlegbar ist.
Nun beobachtet man noch, daß χ_{13} auf einen Defekt-0-Charakter von $H(A_4)$ einschränkt. Also ist χ_{13} irreduzibel, und damit sind

$$\Lambda_1^3 := \Lambda_1^2 - \Lambda_4^2 \text{ und } \Lambda_5^3 := \Lambda_5^2 - \Lambda_4^2$$

projektiv. Jetzt sind alle projektiv-unzerlegbaren Charaktere gefunden. Die Zerlegungsmatrix lautet also wie folgt.

	$\{\Psi_i\}_{i=4}^{10}$	Λ_1^3	Λ_2^3	Λ_3^3	Λ_4^3	Λ_5^3	Λ_6^3	Λ_7^3
1	([1, 1], [1, 1, 1])	1	1	1	.	.	.	.
2	([1], [1, 1, 1, 1])	.	1	.	.	.	.	.
3	([], [1, 1, 1, 1, 1])	1	.	.	.	.	.	.
6	([1], [2, 1, 1])	.	1	1	1	.	.	.
8	([1], [2, 2])	1	.	1	.	1	1	.
10	([], [2, 2, 1])	1	.	.	.	.	1	.
12	([1], [3, 1])	.	.	1	1	.	.	1
13	([], [3, 1, 1])	.	.	.	1	.	.	.
14	([2], [3])	.	.	1	.	1	.	1
15	([], [3, 2])	.	.	.	.	1	1	.
16	([1], [4])	.	.	.	.	.	.	1
18	([], [5])	.	.	.	.	1	.	.

10.7. Die Φ_4-modularen Zerlegungszahlen für $H(D_6)$

Von den 37 irreduziblen Charakteren von $H(D_6)$ liegen mit Ausnahme von $\chi_{12}, \chi_{13}, \chi_{19}, \chi_{21}$ alle in einem Block vom Defekt 2. Die generische Charaktertafel ergibt, daß in diesem Block 19 Φ_4-modular irreduzible Darstellungen liegen.

Nach dem Induzieren projektiver Charaktere von den maximalen parabolischen Teilalgebren $H(A_5)$, $H(D_5)$ und $H(A_1) \times H(D_4)$ findet man aus

$$(\Psi_2^{(1)})_{H(A_5)},$$

$$(\Psi_2^{(2)})_{H(A_5)},$$

$$(\chi_6^{(1)})_{H(A_5)},$$

$$(\chi_{[2]} \otimes \chi_{11})_{H(A_1)\times H(D_4)},$$

$$(\chi_{[1^2]} \otimes \chi_3)_{H(A_1)\times H(D_4)},$$

$$(\Psi_1^{(1)})_{H(A_5)},$$

$$(\Psi_4^{(1)})_{H(A_5)},$$

$$(\Psi_1)_{H(D_5)},$$

$$(\Psi_3)_{H(D_5)},$$

$$(\chi_5^{(1)})_{H(A_5)},$$

$$(\chi_{[1^2]} \otimes \chi_5)_{H(A_1)\times H(D_4)},$$

$$(\chi_{[2]} \otimes \chi_5)_{H(A_1)\times H(D_4)},$$

$$(\chi_8^{(1)})_{H(A_5)},$$

$$(\chi_{[2]} \otimes \chi_3)_{H(A_1)\times H(D_4)},$$

$$(\chi_{[2]} \otimes \chi_{10})_{H(A_1)\times H(D_4)},$$

$$(\chi_{[1^2]} \otimes \chi_{10})_{H(A_1)\times H(D_4)},$$

$$(\chi_{[1^2]} \otimes \chi_{11})_{H(A_1)\times H(D_4)},$$

$$(\chi_{11})_{H(D_5)},$$

$$(\chi_4)_{H(D_5)}$$

die nachfolgende Basis. Die oberen Indizes beziehen sich auf die zwei verschiedenen parabolischen Teilalgebren vom Typ $H(A_5)$, die sich in der weggelassenen Ecke des Coxeter-Graphen unterscheiden.

	$\{\Lambda_i^1\}_{i=1}^{19}$																			
1	$([1,1,1],+)$	1	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2	$([1,1,1],-)$	.	1	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
3	$([1,1],[1,1,1,1])$	1	1	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.
4	$([1],[1,1,1,1,1])$	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
5	$([],[1,1,1,1,1,1])$	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
6	$([1,1,1,1],[2])$	.	.	.	.	1	.	.	.	.	1	1	.	.	1	.	.	.	1	.
7	$([1,1,1],[2,1])$	1	1	1	.	1	.	.	1	.	1	1	1	.	1	.	.	.	1	.
8	$([1,1],[2,1,1])$	1	1	1	.	1	.	1	1	.	1	1	.	.	1	.	.	.	.	.
9	$([1],[2,1,1,1])$	1	1	.	.	1	.	.	1	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.
10	$([],[2,1,1,1,1])$	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
11	$([1,1],[2,2])$	2	2	1	.	.	1	.	1	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.
14	$([1],[2,2,1])$	1	1	1	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.
15	$([2],[2,1,1])$	1	1	1	.	1	.	.	.	1	1	1	1	1	1	.	.	.	1	.
16	$([],[2,2,1,1])$	1	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.
17	$([2],[2,2])$	.	.	1	.	.	.	1	.	1	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.
18	$([],[2,2,2])$	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.
20	$([1,1],[3,1])$	.	.	1	1	.	.	.	1	.	1	1	1	1	.	.	.	1	.	1
22	$([],[3,1,1,1])$	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
23	$([2,1],[3])$	.	.	1	1	.	.	.	.	1	.	1	1	1	.	.	.	1	.	1
24	$([1],[3,2])$	1	1	1	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.
25	$([2],[3,1])$	1	1	1	1	.	1	.	.	1	.	.	1	1	.	.	.	1	.	.
26	$([],[3,2,1])$	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.
27	$([3],+)$	1	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
28	$([3],-)$	.	1	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
29	$([],[3,3])$	1	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.
30	$([1,1],[4])$	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.	1	.	1
31	$([1],[4,1])$	.	.	.	1	.	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.
32	$([],[4,1,1])$	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.
33	$([2],[4])$	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.
34	$([],[4,2])$	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.
35	$([1],[5])$	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
36	$([],[5,1])$	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
37	$([],[6])$	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
Θ_1		.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	−1	−1

Ein geeignetes GAP-Programm findet für die oben angegebene Matrix eine Zeilenpermutation und eine Spaltenpermutation, so daß die entstehende Matrix Dreiecksgestalt hat. Diese Form wird etwa erreicht, wenn man die irreduziblen Charaktere in der Reihenfolge

$$5, 4, 1, 2, 3, 10, 16, 18, 14, 9, 8, 6, 7, 11, 17, 15,$$

$$24, 25, 20, 22, 23, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37$$

und die Λ_i in der Reihenfolge

$$1, 2, 3, 4, 5, 9, 12, 14, 11, 6, 7, 8, 10, 13, 15, 16, 17, 18, 19$$

anordnet. Damit stellt man dann sofort fest, daß Λ_{18}^1 und Λ_{19}^1 unzerlegbar sind.
Weiter zerlegt sich der vom projektiven Charakter

$$\Theta_1 := (\Psi_2)_{H(D_5)}$$

Induzierte in die Basis wie oben angegeben. Damit sind

$$\Lambda_{11}^2 := \Lambda_{11}^1 - \Lambda_{18}^1 \text{ und } \Lambda_{12}^2 := \Lambda_{12}^1 - \Lambda_{19}^1$$

projektiv. Man erhält als neue Basis:

	$\{\Lambda_i^2\}_{i=1}^{19}$																			
1	([1, 1, 1], +)	1	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2	([1, 1, 1], −)	.	1	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
3	([1, 1], [1, 1, 1, 1])	1	1	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.
4	([1], [1, 1, 1, 1, 1])	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
5	([], [1, 1, 1, 1, 1, 1])	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
6	([1, 1, 1, 1], [2])	.	.	.	.	1	.	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	1	.
7	([1, 1, 1], [2, 1])	1	1	1	.	1	.	.	1	.	1	.	1	.	1	.	.	.	1	.
8	([1, 1], [2, 1, 1])	1	1	1	.	1	.	1	1	.	1	1	.	.	1	.	.	.	.	.
9	([1], [2, 1, 1, 1])	1	1	.	.	1	.	.	1	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.
10	([], [2, 1, 1, 1, 1])	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
11	([1, 1], [2, 2])	2	2	1	.	.	1	.	1	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.
14	([1], [2, 2, 1])	1	1	1	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.
15	([2], [2, 1, 1])	1	1	1	.	1	.	.	.	1	1	.	1	1	1	.	.	.	1	.
16	([], [2, 2, 1, 1])	1	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.
17	([2], [2, 2])	.	.	1	.	.	.	1	.	1	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.
18	([], [2, 2, 2])	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.
20	([1, 1], [3, 1])	.	.	1	1	.	.	.	1	.	1	1	.	1	.	.	.	1	.	1
22	([], [3, 1, 1, 1])	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
23	([2, 1], [3])	.	.	1	1	.	.	.	.	1	.	1	.	1	.	.	.	1	.	1
24	([1], [3, 2])	1	1	1	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.
25	([2], [3, 1])	1	1	1	1	.	1	.	.	1	.	.	1	1	.	.	.	1	.	.
26	([], [3, 2, 1])	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.
27	([3], +)	1	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
28	([3], −)	.	1	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
29	([], [3, 3])	1	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.
30	([1, 1], [4])	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	1	.	1
31	([1], [4, 1])	.	.	.	1	.	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.
32	([], [4, 1, 1])	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.
33	([2], [4])	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.
34	([], [4, 2])	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.
35	([1], [5])	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
36	([], [5, 1])	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
37	([], [6])	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
Θ_2		.	.	1	.	.	.	.	.	.	1	−1	−1	1	.	.	.	.	−1	−1
Θ_3		.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1	−1	.	−1	1	−1	1	1	−1
Θ_4		1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	−1	.	−1	1	−1	1	1	−1

Nun sind Λ_{11}^2 und Λ_{12}^2 unzerlegbar. Die projektiven Charaktere

$$\Theta_2 := (\Psi_8)_{H(D_5)}, \Theta_3 := (\Psi_5^{(1)})_{H(A_5)}, \Theta_4 := (\Psi_5^{(2)})_{H(A_5)}$$

ergeben nach dem Induzieren Charaktere, die sich in die Basis wie oben angegeben zerlegen. Also sind

$$\Lambda_3^3 := \Lambda_3^2 - \Lambda_{11}^2 - \Lambda_{12}^2, \Lambda_{10}^3 := \Lambda_{10}^2 - \Lambda_{18}^2, \Lambda_{13}^3 := \Lambda_{13}^2 - \Lambda_{19}^2,$$

$$\Lambda_{17}^3 := \Lambda_{17}^2 - \Lambda_{19}^2, \Lambda_2^3 := \Lambda_2^2 - \Lambda_{12}^2, \Lambda_1^2 := \Lambda_1^2 - \Lambda_{12}^2$$

projektiv und man erhält als neue Basis:

	$\{\Lambda_i^3\}_{i=1}^{19}$																			
1	$([1,1,1],+)$	1	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2	$([1,1,1],-)$	.	1	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
3	$([1,1],[1,1,1,1])$	1	1	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.
4	$([1],[1,1,1,1,1])$	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
5	$([],[1,1,1,1,1,1])$	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
6	$([1,1,1,1],[2])$	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	1	.
7	$([1,1,1],[2,1])$	.	.	.	.	1	.	.	1	.	.	.	1	.	1	.	.	.	1	.
8	$([1,1],[2,1,1])$	1	1	.	.	1	.	1	1	.	1	1	.	.	1	.	.	.	.	.
9	$([1],[2,1,1,1])$	1	1	.	.	1	.	.	1	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.
10	$([],[2,1,1,1,1])$	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
11	$([1,1],[2,2])$	1	1	.	.	.	1	.	1	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.
14	$([1],[2,2,1])$	1	1	1	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.
15	$([2],[2,1,1])$	.	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	1	1	1	.	.	.	1	.
16	$([],[2,2,1,1])$	1	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.
17	$([2],[2,2])$	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.
18	$([],[2,2,2])$	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.
20	$([1,1],[3,1])$	.	.	.	1	.	.	.	1	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	1
22	$([],[3,1,1,1])$	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
23	$([2,1],[3])$	.	.	.	1	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1
24	$([1],[3,2])$	1	1	1	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.
25	$([2],[3,1])$	.	.	.	1	.	1	.	.	1	.	.	1	1	.	.	.	1	.	.
26	$([],[3,2,1])$	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.
27	$([3],+)$	1	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
28	$([3],-)$	.	1	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
29	$([],[3,3])$	1	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.
30	$([1,1],[4])$	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
31	$([1],[4,1])$	.	.	.	1	.	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.
32	$([],[4,1,1])$	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.
33	$([2],[4])$	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.
34	$([],[4,2])$	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.
35	$([1],[5])$	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
36	$([],[5,1])$	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
37	$([],[6])$	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
Θ_5		.	.	.	1	.	.	.	.	1	.	.	.	-1	.	.	.	1	.	.
Θ_6		.	.	1	.	.	.	1	1	.	-1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
Θ_7		.	.	1	.	.	.	1	2	.	-1	.	1	.	2	.	.	.	-2	.

Jetzt stellen sich $\Lambda_3^3, \Lambda_{10}^3, \Lambda_{13}^3, \Lambda_{17}^3$ als unzerlegbar heraus. Und die projektiven Charaktere

$$\Theta_5 := (\Psi_6^{(1)})_{H(A_5)}, \Theta_6 := (\Psi_5)_{H(D_5)}, \Theta_7 := (\chi_{[1^2]} \otimes \Psi_5)_{H(A_1)\times H(D_4)}$$

ergeben Charaktere mit Zerlegung in die Basis wie oben angegeben. Somit sind

$$\Lambda_8^4 := \Lambda_8^3 - \Lambda_{10}^3, \Lambda_9^4 := \Lambda_9^3 - \Lambda_{13}^3, \Lambda_{14}^4 := \Lambda_{14}^3 - \Lambda_{18}^3$$

projektiv und man erhält als neue Basis:

	$\{\Lambda_i^4\}_{i=1}^{19}$																			
1	$([1,1,1],+)$	1	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2	$([1,1,1],-)$	.	1	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
3	$([1,1],[1,1,1,1])$	1	1	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.
4	$([1],[1,1,1,1,1])$	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
5	$([],[1,1,1,1,1,1])$	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
6	$([1,1,1,1],[2])$	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.
7	$([1,1,1],[2,1])$	.	.	.	.	1	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	1	.
8	$([1,1],[2,1,1])$	1	1	.	.	1	.	1	.	.	1	1	.	.	1	.	.	.	.	.
9	$([1],[2,1,1,1])$	1	1	.	.	1	.	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.
10	$([],[2,1,1,1,1])$	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
11	$([1,1],[2,2])$	1	1	.	.	.	1	.	1	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.
14	$([1],[2,2,1])$	1	1	1	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.
15	$([2],[2,1,1])$	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	1	.
16	$([],[2,2,1,1])$	1	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.
17	$([2],[2,2])$	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.
18	$([],[2,2,2])$	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.
20	$([1,1],[3,1])$	.	.	.	1	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	1
22	$([],[3,1,1,1])$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
23	$([2,1],[3])$	.	.	.	1	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1
24	$([1],[3,2])$	1	1	1	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.
25	$([2],[3,1])$	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.	1	.	.
26	$([],[3,2,1])$	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.
27	$([3],+)$	1	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
28	$([3],-)$	.	1	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
29	$([],[3,3])$	1	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.
30	$([1,1],[4])$	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
31	$([1],[4,1])$	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.
32	$([],[4,1,1])$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.
33	$([2],[4])$	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.
34	$([],[4,2])$	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.
35	$([1],[5])$	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
36	$([],[5,1])$	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
37	$([],[6])$	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
Θ_8		.	.	1	.	1	.	.	1	.	2	1	.	1	-1	.	.	.	.	.
Θ_9		.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	-1	1	-1	1	.	.
Θ_{10}		1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	-1	1	-1	1	.	.
Θ_{11}		.	.	1	1	.	.	.	.	1	1	.	1	2	.	.	.	-1	.	.

Die neuen projektiven Charaktere $\Lambda_8^4, \Lambda_9^4, \Lambda_{14}^4$ sind unzerlegbar. Man betrachtet nun die Zerlegung der Induzierten von

$$\Theta_8 := (\chi_{[2]} \otimes \Psi_5)_{H(A_1)\times H(D_4)}, \Theta_9 := (\Psi_5^{(1)})_{H(A_5)},$$

$$\Theta_{10} := (\Psi_5^{(2)})_{H(A_5)}, \Theta_{11} := (\chi_{[1^2]} \otimes \Psi_3)_{H(A_1)\times H(D_4)}$$

in die Basis und folgert, daß

$$\Lambda_5^5 := \Lambda_5^4 - \Lambda_{14}^4, \Lambda_2^5 := \Lambda_2^4 - \Lambda_{14}^4, \Lambda_1^5 := \Lambda_1^4 - \Lambda_{14}^4, \Lambda_4^5 := \Lambda_4^4 - \Lambda_{17}^4$$

projektiv sind. Dies ergibt die nächste Basis:

	$\{\Lambda_i^5\}_{i=1}^{19}$																			
1	([1, 1, 1], +)	1	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2	([1, 1, 1], −)	.	1	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
3	([1, 1], [1, 1, 1, 1])	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.
4	([1], [1, 1, 1, 1, 1])	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
5	([], [1, 1, 1, 1, 1, 1])	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
6	([1, 1, 1, 1], [2])	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.
7	([1, 1, 1], [2, 1])	.	.	.	.	1	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	1	.
8	([1, 1], [2, 1, 1])	.	.	.	.	.	.	1	.	.	1	1	.	.	1	.	.	.	.	.
9	([1], [2, 1, 1, 1])	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.
10	([], [2, 1, 1, 1, 1])	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
11	([1, 1], [2, 2])	1	1	.	.	.	1	.	1	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.
14	([1], [2, 2, 1])	1	1	1	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.
15	([2], [2, 1, 1])	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	1	.
16	([], [2, 2, 1, 1])	1	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.
17	([2], [2, 2])	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.
18	([], [2, 2, 2])	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.
20	([1, 1], [3, 1])	.	.	.	1	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	1
22	([], [3, 1, 1, 1])	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
23	([2, 1], [3])	.	.	.	1	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1
24	([1], [3, 2])	1	1	1	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.
25	([2], [3, 1])	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.	1	.	.
26	([], [3, 2, 1])	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.
27	([3], +)	1	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
28	([3], −)	.	1	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
29	([], [3, 3])	1	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.
30	([1, 1], [4])	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
31	([1], [4, 1])	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.
32	([], [4, 1, 1])	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.
33	([2], [4])	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.
34	([], [4, 2])	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.
35	([1], [5])	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
36	([], [5, 1])	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
37	([], [6])	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
Θ_{12}		.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	1	−1	1	.	.
Θ_{13}		1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	1	−1	1	.	.

Nun zerlegen sich die Induzierten von

$$\Theta_{12} := (\Psi_5^{(1)})_{H(A_5)}, \Theta_{13} := (\Psi_5^{(2)})_{H(A_5)}$$

in die Basis wie oben angegeben. Damit führt die Annahme, Λ_{16}^5 sei unzerlegbar, sofort zum Widerspruch. Daraus folgt, das

$$\Lambda_{16}^6 := \Lambda_{16}^5 - \Lambda_3^5$$

projektiv und sogar unzerlegbar ist. Damit schließt man weiter, daß

$$\Lambda_{15}^6 := \Lambda_{15}^5 - \Lambda_3^5$$

ebenfalls projektiv und damit unzerlegbar ist. Schließlich folgt noch, daß

$$\Lambda_2^6 := \Lambda_2^5 - \Lambda_{16}^6 \text{ und } \Lambda_1^6 := \Lambda_1^5 - \Lambda_{16}^6$$

projektiv und unzerlegbar sind. Man hat nun folgende Basis:

	$\{\Lambda_i^6\}_{i=1}^{19}$																			
1	([1, 1, 1], +)	1	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2	([1, 1, 1], −)	.	1	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
3	([1, 1], [1, 1, 1, 1])	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.
4	([1], [1, 1, 1, 1, 1])	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
5	([], [1, 1, 1, 1, 1, 1])	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
6	([1, 1, 1, 1], [2])	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.
7	([1, 1, 1], [2, 1])	.	.	.	.	1	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	1	.
8	([1, 1], [2, 1, 1])	.	.	.	.	.	.	1	.	.	1	1	.	.	1	.	.	.	.	.
9	([1], [2, 1, 1, 1])	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.
10	([], [2, 1, 1, 1, 1])	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
11	([1, 1], [2, 2])	.	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.
14	([1], [2, 2, 1])	1	1	1	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
15	([2], [2, 1, 1])	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	1	.
16	([], [2, 2, 1, 1])	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.
17	([2], [2, 2])	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.
18	([], [2, 2, 2])	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.
20	([1, 1], [3, 1])	.	.	.	1	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	1
22	([], [3, 1, 1, 1])	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
23	([2, 1], [3])	.	.	.	1	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1
24	([1], [3, 2])	1	1	1	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
25	([2], [3, 1])	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.	1	.	.
26	([], [3, 2, 1])	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
27	([3], +)	1	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
28	([3], −)	.	1	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
29	([], [3, 3])	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.
30	([1, 1], [4])	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
31	([1], [4, 1])	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.
32	([], [4, 1, 1])	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.
33	([2], [4])	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.
34	([], [4, 2])	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.
35	([1], [5])	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
36	([], [5, 1])	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
37	([], [6])	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Jetzt betrachtet man noch $\chi_4 = \chi_{[1],[1,1,1,1,1]}$, die zur Spiegelungsdarstellung duale Darstellung von $H(D_6)$. Man stellt fest, daß deren Reduktion in den endlichen Körper $GF(5)$ irreduzibel ist. Also haben Λ_5^6 und Λ_7^6 einen gemeinsamen projektiven Summanden. Damit hat man unter Beachtung der Dualität

$$\Lambda_5^7 := \Lambda_5^6 - \Lambda_{18}^6, \Lambda_7^7 := \Lambda_7^6 - \Lambda_5^7, \Lambda_4^7 := \Lambda_4^6 - \Lambda_{19}^6, \Lambda_6^7 := \Lambda_6^6 - \Lambda_4^7$$

als neue projektive Charaktere. Damit sind alle projektiv-unzerlegbaren Charaktere gefunden und die vollständige Zerlegungsmatrix lautet:

	$\{\Psi_i\}_{i=1}^{19} = \{\Lambda_i^7\}_{i=1}^{19}$																			
1	$([1,1,1],+)$	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2	$([1,1,1],-)$	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
3	$([1,1],[1,1,1,1])$	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.
4	$([1],[1,1,1,1,1])$	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
5	$([],[1,1,1,1,1,1])$	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
6	$([1,1,1,1],[2])$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.
7	$([1,1,1],[2,1])$	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	1	.
8	$([1,1],[2,1,1])$	.	.	.	.	.	.	1	.	.	1	1	.	.	1	.	.	.	.	.
9	$([1],[2,1,1,1])$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.
10	$([],[2,1,1,1,1])$	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
11	$([1,1],[2,2])$	.	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.
14	$([1],[2,2,1])$	1	1	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
15	$([2],[2,1,1])$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	1	.
16	$([],[2,2,1,1])$	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.
17	$([2],[2,2])$	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.
18	$([],[2,2,2])$	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.
20	$([1,1],[3,1])$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	1
22	$([],[3,1,1,1])$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
23	$([2,1],[3])$	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1
24	$([1],[3,2])$	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
25	$([2],[3,1])$	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.	1	.	.
26	$([],[3,2,1])$	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
27	$([3],+)$	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
28	$([3],-)$	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
29	$([],[3,3])$	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.
30	$([1,1],[4])$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
31	$([1],[4,1])$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.
32	$([],[4,1,1])$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.
33	$([2],[4])$	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.
34	$([],[4,2])$	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.
35	$([1],[5])$	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
36	$([],[5,1])$	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
37	$([],[6])$	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

10.8. Die Φ_4-modularen Zerlegungszahlen für $H(D_7)$

10.8.1. Blöcke.

Man findet

Nr.	d	dl	Charaktere
1	1	2	$11, 16, 30, 40$
2	1	1	$23, 24, 32, 52$
3	2		$6, 10, 13, 15, 17, 20, 28, 39, 41, 42, 47, 54$
4	3		$1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 14, 18, 19, 21, 22, 25, 26, 27, 31,$
			$33, 34, 35, 36, 37, 38, 43, 45, 46, 48, 49, 50, 51, 53, 55$

10.8.2. Blöcke 1 und 2.

Man induziert die projektiven Charaktere

$$\Psi_{16}, \Psi_{18}, \Psi_{17}, \Psi_{14}, \Psi_7, \Psi_{15}$$

von $H(D_6)$ und findet direkt die Zerlegungsmatrizen.

		Ψ_1	Ψ_2	Ψ_3
16	$([],[2,2,1,1,1])$	1	.	.
11	$([1,1,1],[2,2])$	1	1	.
30	$([2],[3,1,1])$	.	1	1
40	$([1],[4,1,1])$	.	.	1

		Ψ_4	Ψ_5	Ψ_6
24	([1], [3, 1, 1, 1])	1	.	.
23	([1, 1], [3, 1, 1])	1	1	.
32	([2, 2], [3])	.	1	1
52	([], [5, 2])	.	.	1

10.8.3. Block 3. Mit der generischen Charaktertafel stellt man fest, daß in diesem Block 7 Φ_4-modular irreduzible Darstellungen existieren. Durch Induzieren der Charaktere

$$\Psi_{17}, \Psi_6, \Psi_{16}, \Psi_{12}, \Psi_{10}, \Psi_{14}, \Psi_7$$

von $H(D_6)$ findet man die folgende Basis, von der man feststellt, daß sie bereits aus unzerlegbaren Charakteren besteht.

		Ψ_7	Ψ_8	Ψ_9	Ψ_{10}	Ψ_{11}	Ψ_{12}	Ψ_{13}
6	([1, 1, 1, 1], [2, 1])	1	1	.	.	.	.	.
10	([], [2, 1, 1, 1, 1, 1])	1	.	.	.	.	.	.
13	([2, 1], [2, 1, 1])	1	1	1	1	.	.	.
15	([2], [2, 1, 1, 1])	.	1	1	.	.	.	.
17	([2, 1], [2, 2])	1	.	.	1	1	1	.
20	([], [2, 2, 2, 1])	1	.	.	.	1	.	.
28	([2, 1], [3, 1])	.	.	1	1	.	1	1
39	([1, 1], [4, 1])	.	.	1	.	.	.	1
41	([], [4, 1, 1, 1])	.	.	1	.	.	.	.
42	([2, 1], [4])	.	.	.	.	.	1	1
47	([], [4, 3])	.	.	.	.	1	1	.
54	([], [6, 1])	.	.	.	.	.	1	.

10.8.4. Block 4. Man induziert alle projektiv-unzerlegbaren Charaktere von $H(D_6)$ und erhält aus

$$\chi_{12}, \Psi_7, \Psi_{14}, \Psi_1, \Psi_{18}, \Psi_8, \Psi_{11}, \Psi_{16}, \Psi_6, \Psi_{15}, \Psi_9, \chi_{19}, \Psi_{19}, \Psi_4, \Psi_{17}$$

die folgende Basis.

	$\{\Lambda_i^1\}_{i=1}^{15}$															
1	$([1,1,1],[1,1,1,1])$	2	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2	$([1,1],[1,1,1,1,1])$	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
3	$([1],[1,1,1,1,1,1])$	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
4	$([],[1,1,1,1,1,1,1])$	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
5	$([1,1,1,1,1],[2])$	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
7	$([1,1,1],[2,1,1])$	2	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.
9	$([1],[2,1,1,1,1])$	1	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
12	$([1,1],[2,2,1])$	1	1	1	1	.	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.
14	$([1],[2,2,1,1])$	1	.	1	1	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.
18	$([1],[2,2,2])$	1	1	.	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.
19	$([2],[2,2,1])$	1	1	.	1	1	.	1	.	.	1	1	.	.	.	.
21	$([1,1,1,1],[3])$	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.
22	$([1,1,1],[3,1])$	.	.	.	.	1	1	1	.	.	.	.	1	1	.	.
25	$([],[3,1,1,1,1])$	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
26	$([2,1,1],[3])$	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.	1	1	1	.	.
27	$([1,1],[3,2])$	.	.	.	1	.	1	1	1	1	.	.	.	1	1	.
31	$([],[3,2,1,1])$	.	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.
33	$([2],[3,2])$	.	1	.	1	.	.	1	.	1	1	1	.	.	1	1
34	$([],[3,2,2])$	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.
35	$([1],[3,3])$	.	.	.	1	.	.	.	1	1	.	.	.	.	1	.
36	$([3],[3,1])$	.	.	.	1	.	.	1	.	1	.	1	.	1	2	1
37	$([],[3,3,1])$	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.
38	$([1,1,1],[4])$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.
43	$([1],[4,2])$	.	.	.	1	.	.	.	.	.	1	1	.	.	1	1
45	$([],[4,2,1])$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.
46	$([3],[4])$	.	.	.	1	.	.	.	.	1	.	.	.	.	2	1
48	$([1,1],[5])$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.
49	$([1],[5,1])$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	1	1
50	$([],[5,1,1])$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.
51	$([2],[5])$	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	1	1
53	$([1],[6])$	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	1	.
55	$([],[7])$	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.

Von diesen erkennt man bis auf Λ_1^1 und Λ_{14}^1 alle als unzerlegbar.
Nun induziert man die zur Spiegelungsdarstellung duale Darstellung von $H(D_6)$ nach $H(D_7)$. Der Charakter dieser Darstellung ist gleich

$$\chi_2 + \chi_3 + \chi_5 + \chi_9.$$

Diese irreduziblen Charaktere haben die Grade 21, 7, 21 respektive 35. Außerdem ist χ_4 gerade die Signumsdarstellung, also vom Grade 1.
Mit der MeatAxe stellt man fest, daß die Reduktion der induzierten Darstellung in den endlichen Körper $GF(5)$ einen Konstituenten der Dimension 20 hat.
Die Untersuchung der möglichen echten Summanden von Λ_1^1 ergibt unter Benutzung der oben gennanten Charaktergrade und Beachtung der Dualität

$$\Lambda_1^2 := \Lambda_1^1 - \Lambda_3^1 \text{ und } \Lambda_{14}^2 := \Lambda_{14}^1 - \Lambda_{15}^1$$

als neue projektive Charaktere. Die vollständige Zerlegungsmatrix lautet also:

	$\{\Psi_i\}_{i=14}^{28} = \{\Lambda_i^2\}_{i=1}^{15}$															
1	$([1,1,1],[1,1,1,1])$	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2	$([1,1],[1,1,1,1,1])$	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
3	$([1],[1,1,1,1,1,1])$	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
4	$([],[1,1,1,1,1,1,1])$	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
5	$([1,1,1,1,1],[2])$	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
7	$([1,1,1],[2,1,1])$	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.
9	$([1],[2,1,1,1,1])$	.	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
12	$([1,1],[2,2,1])$	.	1	1	1	.	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.
14	$([1],[2,2,1,1])$	.	.	1	1	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.
18	$([1],[2,2,2])$	1	1	.	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.
19	$([2],[2,2,1])$	1	1	.	1	1	.	1	.	.	1	1	.	.	.	.
21	$([1,1,1,1],[3])$	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.
22	$([1,1,1],[3,1])$	.	.	.	.	1	1	1	.	.	.	.	1	1	.	.
25	$([],[3,1,1,1,1])$	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
26	$([2,1,1],[3])$	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.	1	1	1	.	.
27	$([1,1],[3,2])$	.	.	.	1	.	1	1	1	1	.	.	.	1	1	.
31	$([],[3,2,1,1])$	.	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.
33	$([2],[3,2])$	.	1	.	1	.	.	1	.	1	1	1	.	.	.	1
34	$([],[3,2,2])$	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.
35	$([1],[3,3])$	.	.	.	1	.	.	.	1	1	.	.	.	.	1	.
36	$([3],[3,1])$	.	.	.	1	.	.	1	.	1	.	1	.	1	1	1
37	$([],[3,3,1])$	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.
38	$([1,1,1],[4])$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.
43	$([1],[4,2])$	.	.	.	1	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.	1
45	$([],[4,2,1])$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.
46	$([3],[4])$	.	.	.	1	.	.	.	.	1	.	.	.	.	1	1
48	$([1,1],[5])$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.
49	$([1],[5,1])$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	1
50	$([],[5,1,1])$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.
51	$([2],[5])$	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	1
53	$([1],[6])$	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	1	.
55	$([],[7])$	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.

10.9. Φ_4-modulare Zerlegungszahlen für $H(E_8)$

10.9.1. Blöcke. Mit dem in 4.3. beschriebenen 'Algorithmus' findet man die Einteilung der irreduziblen Charaktere in die unten spezifizierten Mengen 1, $\{2a, 2b\}$, 3 und 4. Diese sind jeweils Vereinigungen von Blöcken. Wie die unten berechneten Ergebnisse zeigen, bestehen die Mengen 1, 3 und 4 aus jeweils genau einem Block, aber $\{2a, 2b\}$ ist Vereinigung zweier Blöcke $2a$ und $2b$.

Nr.	d	dl	Charaktere
1	4		1, 2, 5, 6, 7, 8, 9, 13, 14, 15, 16, 17, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 37, 38, 39, 42, 45, 46, 47, 53, 57, 58, 59, 66, 67, 72, 73, 77, 78, 89, 90, 97, 98, 102, 103
$2a$	2		3, 4, 18, 19, 27, 28, 32, 33, 35, 36, 74, 75, 83
$2b$	2		10, 11, 29, 30, 48, 49, 54, 55, 64, 65, 76, 88, 99
3	2	4	40, 52, 60, 68, 71, 81, 84, 87, 91, 94, 101, 108, 109
4	2	3	41, 51, 61, 69, 70, 82, 85, 86, 92, 93, 100, 107, 110

10.9.2. Blöcke 3 und 4. Nach Induzieren aller projektiv-unzerlegbaren Charaktere von $H(E_7)$ findet man aus

$$\chi_{31}, \Psi_{18}, \Psi_1, \Psi_{19}, \chi_{32}, \Psi_3, \chi_{21}, \chi_{45}$$

eine Basis für Block 3. Die so gefundenen projektiven Charaktere sind bereits unzerlegbar. Damit hat man die Zerlegungsmatrizen für Block 3 und seinen dualen Partner bestimmt.

		Λ_1	Λ_2	Λ_3	Λ_4	Λ_5	Λ_6	Λ_7	Λ_8
40	(1344, 8)	1	1	.	.	.	.	.	.
52	(2240, 28)	.	.	1	1	1	.	.	.
60	(3200, 16)	1	.	.	.	.	1	1	.
68	(8, 1)	.	.	1	.	.	.	.	.
71	(56, 49)	.	.	.	.	.	1	.	.
81	(560, 5)	.	1	.	.	.	.	.	.
84	(840, 13)	1	.	.	.	.	1	.	.
87	(1008, 39)	.	.	.	.	.	.	.	1
91	(1400, 11)	.	1	1	1	.	.	.	.
94	(1400, 37)	.	.	.	.	1	.	.	.
101	(3240, 31)	.	.	.	1	1	.	.	1
108	(4200, 21)	.	.	.	1	.	.	1	1
109	(4536, 13)	1	1	.	1	.	.	1	.

		Λ_1	Λ_2	Λ_3	Λ_4	Λ_5	Λ_6	Λ_7	Λ_8
41	$(1344, 38)$	1	1	.	.	.	.	.	.
51	$(2240, 10)$	.	.	1	1	1	.	.	.
61	$(3200, 22)$	1	.	.	.	.	1	1	.
69	$(8, 91)$	.	.	1	.	.	.	.	.
70	$(56, 19)$	.	.	.	.	.	1	.	.
82	$(560, 47)$	.	1	.	.	.	.	.	.
85	$(840, 31)$	1	.	.	.	.	1	.	.
86	$(1008, 9)$	.	.	.	.	.	.	.	1
92	$(1400, 29)$	.	1	1	1	.	.	.	.
93	$(1400, 7)$	.	.	.	.	1	.	.	.
100	$(3240, 9)$	.	.	.	1	1	.	.	1
107	$(4200, 15)$	.	.	.	1	.	.	1	1
110	$(4536, 23)$	1	1	.	1	.	.	1	.

10.9.3. Block 2. Nach Induzieren aller projektiv-unzerlegbaren Charaktere von $H(E_7)$ rekrutiert sich die erste Basis aus

$$\Psi_{24}, \Psi_{26}, \Psi_1, \Psi_9,$$

$$\Psi_{28}, \chi_{31}, \Psi_{21}, \chi_{32},$$

$$\chi_{22}, \chi_{21}, \Psi_{13}, 1/2 \cdot \Psi_6,$$

$$\Psi_{15}, \chi_{46}, \chi_{58}, \chi_{59}.$$

	$\{\Lambda_i^1\}_{i=1}^{16}$																
3	(28, 8)	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
4	(28, 68)	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
10	(84, 4)	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
11	(84, 64)	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
18	(300, 8)	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
19	(300, 44)	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.
27	(700, 16)	2	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.
28	(700, 28)	.	2	.	.	.	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.
29	(700, 6)	.	.	1	.	.	1	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.
30	(700, 42)	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	1	1	.	.	.	.
32	(840, 14)	.	1	.	.	1	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.
33	(840, 26)	1	.	.	.	.	.	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.
35	(972, 12)	1	.	.	.	2	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.
36	(972, 32)	.	1	.	.	.	.	2	1	1	.	.	.	.	.	.	.
48	(2100, 16)	.	.	.	.	2	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.
49	(2100, 28)	.	.	.	.	.	.	2	.	.	.	.	.	3	.	1	.
54	(2268, 10)	.	.	.	.	2	1	.	.	.	.	1	.	.	1	.	.
55	(2268, 30)	.	.	.	.	.	.	2	1	.	.	1	1	2	.	1	.
64	(4200, 12)	1	1	1	.	2	1	.	.	.	.	2	.	.	1	.	1
65	(4200, 24)	1	1	.	1	.	.	2	1	.	.	2	1	2	.	1	1
74	(160, 7)	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
75	(160, 55)	.	1	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
76	(448, 25)	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.
83	(1344, 19)	1	1	.	.	1	.	1	.	1	1	.	.	.	.	.	.
88	(2016, 19)	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	1
99	(5600, 19)	1	1	.	.	2	.	2	.	.	.	1	.	3	1	1	1
Ψ_{20}		.	.	2	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	−2	.	.
Ψ_{27}		.	.	.	2	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	−2	.
Ψ_{14}		.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	−2	.	.	.	−2
Ψ_{11}		.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	.	−4	.

Wie man feststellt, sind $\Lambda_3^1, \Lambda_4^1, \Lambda_9^1, \Lambda_{10}^1, \Lambda_{12}^1, \Lambda_{14}^1, \Lambda_{15}^1, \Lambda_{16}^1$ bereits unzerlegbar. Weiter findet man für die Induzierten von den projektiven Charakteren $\Psi_{20}, \Psi_{27}, \Psi_{14}, \Psi_{11}$ von $H(E_7)$ die oben angegebene Zerlegung in die Basis. Damit hat man

$$\Lambda_{13}^2 := \Lambda_{13} - 2\cdot\Lambda_{15}, \Lambda_{11}^2 := \Lambda_{11} - \Lambda_{12} - \Lambda_{16}, \Lambda_7^2 := \Lambda_7 - 2\cdot\Lambda_{15}, \Lambda_5^2 := \Lambda_5 - 2\cdot\Lambda_{14}.$$

als neue projektive Charaktere und damit:

	$\{\Lambda_i^2\}_{i=1}^{16}$																
3	(28, 8)	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
4	(28, 68)	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
10	(84, 4)	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
11	(84, 64)	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
18	(300, 8)	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
19	(300, 44)	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.
27	(700, 16)	2	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.
28	(700, 28)	.	2	.	.	.	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.
29	(700, 6)	.	.	1	.	.	1	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.
30	(700, 42)	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.
32	(840, 14)	.	1	.	.	1	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.
33	(840, 26)	1	.	.	.	.	.	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.
35	(972, 12)	1	.	.	.	2	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.
36	(972, 32)	.	1	.	.	.	.	2	1	1	.	.	.	.	.	.	.
48	(2100, 16)	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.
49	(2100, 28)	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.
54	(2268, 10)	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	1	.	.	1	.	.
55	(2268, 30)	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	1	.
64	(4200, 12)	1	1	1	.	.	1	.	.	.	.	1	.	.	1	.	1
65	(4200, 24)	1	1	.	1	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	1	1
74	(160, 7)	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
75	(160, 55)	.	1	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
76	(448, 25)	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.
83	(1344, 19)	1	1	.	.	1	.	1	.	1	1	.	.	.	.	.	.
88	(2016, 19)	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
99	(5600, 19)	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1

Man stellt fest, daß Λ_{13}^2 und Λ_{11}^2 schon unzerlegbar sind.
Nun untersucht man die noch nicht als unzerlegbar erkannten projektiven Charaktere wie immer mit der in 4.6.3. beschriebenen Methode auf mögliche Summanden. Man findet unter anderen einen möglichen unzerlegbaren Summanden von Λ_1^2, das heißt, eine Summe von Charakteren, die die in 4.6.3. beschriebenen Bedingungen erfüllt, wie folgt:

$$\Lambda := \chi_3 + \chi_{33} + \chi_{35} + \chi_{64} + \chi_{88}.$$

Angenommen, Λ ist projektiv. Dann folgt, daß $\Lambda_1^2 - \Lambda$ projektiv-unzerlegbar ist.

Die 2-modulare Zerlegungsmatrix der Weyl-Gruppe $W(E_8) \cong 2 \cdot O_8^+(2) : 2$, wie sie aus den Informationen in [13] und [44] gewonnen werden kann, zeigt, daß der Charakter χ_{74} unter 2-modularer Reduktion, also auch unter Φ_4-modularer Reduktion irreduzibel bleibt. Also gibt es genau einen projektiv-unzerlegbaren Charakter, in dem der Summand χ_{74} vorkommt. Dieser projektiv-unzerlegbare Charakter ist somit Summand von Λ_1^2 und Λ_5^2. Damit kann er aber nicht gleich $\Lambda_1^2 - \Lambda$ sein, Widerspruch.
Also ist Λ nicht projektiv. Analog schließt man für den dualen projektiven Charakter Λ_2^2. Dann findet man, daß alle anderen möglichen Summanden bereits in dem von der jetzigen Basis aufgespannten Gitter liegen. Also ist der Rang der Zerlegungsmatrix gleich 16 und die Zerlegungsmatrix hat Dreiecksgestalt.
Da Λ_5^2 zerlegbar ist, sind die folgenden Charaktere unter Benutzung der Dualität projektiv.

$$\begin{aligned}
\Lambda_6^3 &:= \Lambda_6^2 - \Lambda_{11}^2, \\
\Lambda_5^3 &:= \Lambda_5^2 - \Lambda_6^3, \\
\Lambda_1^3 &:= \Lambda_1^2 - \Lambda_5^3, \\
\Lambda_8^3 &:= \Lambda_8^2 - \Lambda_{12}^2, \\
\Lambda_7^3 &:= \Lambda_7^2 - \Lambda_8^3, \\
\Lambda_2^3 &:= \Lambda_2^2 - \Lambda_7^3.
\end{aligned}$$

Damit erhält man die folgende Basis.

	$\{\Lambda_i^3\}_{i=1}^{16}$																
3	$(28,8)$	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
4	$(28,68)$	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
10	$(84,4)$	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
11	$(84,64)$	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
18	$(300,8)$	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
19	$(300,44)$	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.
27	$(700,16)$	1	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.
28	$(700,28)$	.	1	.	.	.	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.
29	$(700,6)$	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.
30	$(700,42)$	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.
32	$(840,14)$	.	1	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.
33	$(840,26)$	1	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.
35	$(972,12)$	.	.	.	.	1	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.
36	$(972,32)$	.	.	.	.	.	.	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.
48	$(2100,16)$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.
49	$(2100,28)$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.
54	$(2268,10)$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	1	.	.
55	$(2268,30)$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	1	.
64	$(4200,12)$	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	1	.	1
65	$(4200,24)$	1	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	1	1
74	$(160,7)$	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
75	$(160,55)$	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
76	$(448,25)$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.
83	$(1344,19)$	.	.	.	.	1	.	1	.	1	1	.	.	.	.	.	.
88	$(2016,19)$	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
99	$(5600,19)$	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1
Ψ_{14}		.	2	.	2	.	.	2	.	.	.	.	2	.	.	2	-1
Ψ_{27}		2	.	2	.	2	.	.	.	.	.	2	.	.	2	.	-1

Nun sind $\Lambda_5^3, \Lambda_6^3, \Lambda_7^3, \Lambda_8^3$ unzerlegbar.
Man induziert die projektiven Charaktere Ψ_{14}, Ψ_{27} von $H(D_7)$ und erhält Zerlegungen in die Basis wie oben angegeben. Daraus folgt, daß

$$\Lambda_1^4 := \Lambda_1^3 - \Lambda_{16}^3 \text{ und } \Lambda_2^4 := \Lambda_2^3 - \Lambda_{16}^3$$

projektiv und unzerlegbar sind.
Jetzt stellt man fest, siehe Satz 3.5.1., daß die hier betrachtete Menge von

irreduziblen Charakteren Vereinigung von zwei Blöcken ist. Man findet die schon oben genannten Teilmengen $2a$ und $2b$ sowie die entsprechenden Zerlegungsmatrizen.

		Λ_1^4	Λ_2^4	Λ_5^4	Λ_6^4	Λ_7^4	Λ_8^4	Λ_9^4	Λ_{10}^4
3	$(28, 8)$	1	.	.	.	.	.	.	.
4	$(28, 68)$	.	1	.	.	.	.	.	.
18	$(300, 8)$	.	.	.	1	.	.	.	.
19	$(300, 44)$	.	.	.	.	.	1	.	.
27	$(700, 16)$	1	.	1	.	.	.	1	.
28	$(700, 28)$	.	1	.	.	1	.	.	1
32	$(840, 14)$	.	1	.	1	.	.	.	1
33	$(840, 26)$	1	.	.	.	.	1	1	.
35	$(972, 12)$	.	.	1	1	.	.	.	1
36	$(972, 32)$	.	.	.	.	1	1	1	.
74	$(160, 7)$	.	.	1	.	.	.	.	.
75	$(160, 55)$	.	.	.	.	1	.	.	.
83	$(1344, 19)$	.	.	1	.	1	.	1	1

		Λ_3^4	Λ_4^4	Λ_{11}^4	Λ_{12}^4	Λ_{13}^4	Λ_{14}^4	Λ_{15}^4	Λ_{16}^4
10	$(84, 4)$	1	.	.	.	.	.	.	.
11	$(84, 64)$	.	1	.	.	.	.	.	.
29	$(700, 6)$	1	.	1	.	.	.	.	.
30	$(700, 42)$	.	1	.	1	.	.	.	.
48	$(2100, 16)$	.	.	.	.	1	1	.	.
49	$(2100, 28)$	.	.	.	.	1	.	1	.
54	$(2268, 10)$	.	.	1	.	.	1	.	.
55	$(2268, 30)$	.	.	.	1	.	.	1	.
64	$(4200, 12)$	1	.	1	.	.	1	.	1
65	$(4200, 24)$	.	1	.	1	.	.	1	1
76	$(448, 25)$	.	.	.	.	1	.	.	.
88	$(2016, 19)$	1	1	.	.	.	.	.	1
99	$(5600, 19)$	.	.	.	.	1	1	1	1

10.9.4. Block 1. Nach Induzieren aller projektiv-unzerlegbaren Charaktere von $H(E_7)$ findet man eine Basis bestehend aus den Induzierten von:

$$\Psi_1, \Psi_{24}, \Psi_{20}, \Psi_{10}, \Psi_{18}, \Psi_4, \Psi_{25}, \Psi_{14}, \Psi_5, \chi_{31},$$

$$\Psi_7, \Psi_{29}, \Psi_9, \Psi_{30}, \Psi_{16}, \Psi_{23}, \Psi_8, \Psi_{26}, \chi_{21}.$$

	$\{\Lambda_i^1\}_{i=1}^{19}$																			
1	$(1,0)$	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2	$(1,120)$	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
5	$(35,2)$	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
6	$(35,74)$	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
7	$(70,32)$	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
8	$(50,8)$	.	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
9	$(50,56)$	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
13	$(175,12)$	1	1	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
14	$(175,36)$	1	1	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
15	$(210,4)$	.	.	1	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
16	$(210,52)$	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.
17	$(420,20)$	.	.	1	1	.	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.
20	$(350,14)$	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.
21	$(350,38)$	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.
22	$(525,12)$	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.
23	$(525,36)$	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.
24	$(567,6)$	.	.	1	.	.	.	.	1	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.
25	$(567,46)$	.	.	.	1	.	.	.	.	1	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.
26	$(1134,20)$	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	.	.	.	.
37	$(1050,10)$	1	.	2	.	.	1	1	1	.	1	.	1	1	.	.	.	.	.	.
38	$(1050,34)$	.	1	.	2	.	1	1	.	1	.	1	1	.	1	.	.	.	.	.
39	$(2100,20)$	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1	1	2	1	.	.	.
42	$(2688,20)$	.	.	1	1	1	.	.	.	.	.	.	2	1	1	.	.	1	.	.
45	$(1575,10)$	.	.	.	.	.	.	1	1	.	2	.	.	1	.	.	.	.	1	.
46	$(1575,34)$	.	.	.	.	1	.	1	.	1	.	2	.	.	1	.	.	.	.	1
47	$(3150,18)$	1	1	1	1	.	1	2	1	1	.	.	2	1	1	1	.	1	.	.
53	$(4480,16)$	.	.	1	1	.	1	2	.	.	1	1	2	1	1	1	1	1	.	.
57	$(2835,14)$	1	1	2	1	.	1	2	1	.	1	.	2	1	.	.	.	1	.	.
58	$(2835,22)$	1	1	1	2	.	1	2	.	1	.	1	2	.	1	.	.	1	.	.
59	$(5670,18)$	.	.	.	.	2	.	2	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
66	$(6075,14)$	.	.	1	.	1	.	2	1	.	2	.	2	3	1	2	1	1	1	.
67	$(6075,22)$	.	.	.	1	2	.	2	.	1	.	2	2	1	3	2	1	1	.	1
72	$(112,3)$	1	.	1	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
73	$(112,63)$	.	1	.	1	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
77	$(400,7)$	1	.	1	.	.	1	1	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
78	$(400,43)$	.	1	.	1	.	1	1	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.
89	$(1296,13)$	.	.	.	.	1	.	.	.	.	1	.	.	1	.	.	.	.	1	.
90	$(1296,33)$	.	.	.	.	2	.	.	.	.	.	1	.	.	1	.	.	.	.	1
97	$(2800,13)$	.	.	.	.	.	.	1	.	.	2	.	.	1	.	1	1	.	1	.
98	$(2800,25)$	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.	2	.	.	1	1	1	.	.	1
102	$(3360,13)$	1	.	1	.	.	.	2	1	.	2	.	1	1	.	.	.	1	1	.
103	$(3360,25)$	.	1	.	1	1	.	2	.	1	.	2	1	.	1	.	.	1	.	1
Ψ_3		.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	-1
Ψ_8		.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	2	-1	.	.
Ψ_7		.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	2	.	-1	-1
Ψ_1		1	1	.	.	2	.	.	3	3	.	.	.	.	.	4	-2	2	4	2

Es sind $\Lambda_1^1, \Lambda_2^1, \Lambda_3^1, \Lambda_4^1, \Lambda_6^1, \Lambda_7^1, \Lambda_8^1, \Lambda_9^1, \Lambda_{16}^1, \Lambda_{17}^1, \Lambda_{18}^1, \Lambda_{19}^1$ schon unzerlegbar. Nun betrachtet man den von $H(E_7)$ induzierten projektiven Charakter Ψ_3 und die 2-modularen projektiven Charaktere Ψ_8, Ψ_7, Ψ_1 der Weyl-Gruppe $W(E_8) \cong 2 \cdot O_8^+(2) : 2$, deren Zerlegung in die Basis oben angegeben ist. Dabei werden die projektiven Charaktere der Weyl-Gruppe so durchnumeriert wie die Reihenfolge der 2-modular irreduziblen Charaktere in [44] angibt. Aus diesen Zerlegungen folgt, daß

$$\Lambda_5^2 := \Lambda_5^1 - \Lambda_{19}^1, \Lambda_{12}^2 := \Lambda_{12}^1 - \Lambda_{17}^1, \Lambda_{10}^2 := \Lambda_{10}^1 - \Lambda_{18}^1,$$

$$\Lambda_{11}^2 := \Lambda_{11}^1 - \Lambda_{19}^1, \Lambda_{15}^2 := \Lambda_{15}^1 - \Lambda_{16}^1$$

projektiv sind. Also hat man nun folgende Basis.

	$\{\Lambda_i^2\}_{i=1}^{19}$																			
1	(1, 0)	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2	(1, 120)	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
5	(35, 2)	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
6	(35, 74)	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
7	(70, 32)	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
8	(50, 8)	.	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
9	(50, 56)	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
13	(175, 12)	1	1	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
14	(175, 36)	1	1	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
15	(210, 4)	.	.	1	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
16	(210, 52)	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.
17	(420, 20)	.	.	1	1	.	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.
20	(350, 14)	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.
21	(350, 38)	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.
22	(525, 12)	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.
23	(525, 36)	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.
24	(567, 6)	.	.	1	.	.	.	.	1	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.
25	(567, 46)	.	.	.	1	.	.	.	.	1	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.
26	(1134, 20)	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	.	.	.	.
37	(1050, 10)	1	.	2	.	.	1	1	1	.	1	.	1	1	.	.	.	.	.	.
38	(1050, 34)	.	1	.	2	.	1	1	.	1	.	1	1	.	1	.	.	.	.	.
39	(2100, 20)	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	.	.	.
42	(2688, 20)	.	.	1	1	1	.	.	.	.	.	.	1	1	1	.	.	1	.	.
45	(1575, 10)	.	.	.	.	.	.	1	1	.	1	.	.	1	.	.	.	.	1	.
46	(1575, 34)	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	1	.	.	1	.	.	.	.	1
47	(3150, 18)	1	1	1	1	.	1	2	1	1	.	.	1	1	1	1	.	1	.	.
53	(4480, 16)	.	.	1	1	.	1	2	.	.	1	1	1	1	1	.	1	1	.	.
57	(2835, 14)	1	1	2	1	.	1	2	1	.	1	.	1	1	.	.	.	1	.	.
58	(2835, 22)	1	1	1	2	.	1	2	.	1	.	1	1	.	1	.	.	1	.	.
59	(5670, 18)	.	.	.	.	1	.	2	.	.	.	.	.	1	1	.	1	1	1	1
66	(6075, 14)	.	.	1	.	1	.	2	1	.	1	.	1	3	1	1	1	1	1	.
67	(6075, 22)	.	.	.	1	1	.	2	.	1	.	1	1	1	3	1	1	1	.	1
72	(112, 3)	1	.	1	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
73	(112, 63)	.	1	.	1	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
77	(400, 7)	1	.	1	.	.	1	1	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
78	(400, 43)	.	1	.	1	.	1	1	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.
89	(1296, 13)	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	1	.
90	(1296, 33)	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	1
97	(2800, 13)	.	.	.	.	.	.	1	.	.	1	.	.	1	.	.	1	.	1	.
98	(2800, 25)	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	1	.	1	.	.	1
102	(3360, 13)	1	.	1	.	.	.	2	1	.	1	.	.	1	.	.	.	1	1	.
103	(3360, 25)	.	1	.	1	.	.	2	.	1	.	1	.	.	1	.	.	1	.	1

Die projektiven Charaktere $\Lambda_5^2, \Lambda_{10}^2, \Lambda_{11}^2, \Lambda_{12}^2, \Lambda_{15}^2$ sind sogar unzerlegbar.

10.9.5. Offene Fragen. Damit bleibt nur noch zu entscheiden, ob $\Lambda_{13}^2 - \Lambda_{18}^2$ und dual dazu $\Lambda_{14}^2 - \Lambda_{19}^2$ projektiv sind.

11. Φ_3-modulare Zerlegungszahlen

11.1. Die Φ_3-modularen Zerlegungszahlen für $H(E_7)$

In [30] werden die Zerlegungszahlen für die Blöcke von $H(E_7)$ von nicht-maximalem Defekt angegeben. Für die beiden zueinander dualen Blöcke von maximalem Defekt ist nur eine Basis für den von den projektiven Charakteren aufgespannten Raum angegeben. Diese soll hier für Block 1 wiedergegeben werden. Die in [30] genannten projektiven Charaktere werden hier in der Reihenfolge der Blöcke fortlaufend durchnumeriert.

		Ψ_1	Ψ_2	Ψ_3	Ψ_4	Ψ_5	Ψ_6	Ψ_7	Ψ_8	Ψ_9	Ψ_{10}
1	$(1,0)$	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
3	$(7,46)$	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.
5	$(15,28)$	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.
7	$(21,6)$	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.
9	$(21,36)$	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.
13	$(35,22)$	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.
15	$(35,4)$	1	.	.	.	.	1	.	.	.	.
17	$(56,30)$	.	1	.	.	.	.	1	.	.	.
19	$(70,18)$	.	.	.	1	.	.	1	.	.	.
21	$(84,12)$	1	.	1	.	1	1	.	.	.	.
23	$(105,26)$	.	1	1	.	1	.	1	.	.	.
25	$(105,6)$	.	1	.	.	.	.	.	1	.	.
27	$(105,12)$	.	.	1	.	.	.	.	.	1	.
29	$(120,4)$	1	.	.	1	.	.	.	1	.	.
31	$(168,6)$	1	.	.	.	1	1	.	1	.	.
39	$(210,6)$	.	.	.	1	.	.	.	1	1	.
41	$(210,10)$	.	1	.	1	1	.	1	1	.	.
45	$(280,18)$	.	.	.	.	1	.	1	.	.	1
47	$(280,8)$	1	1	1	.	1	1	.	1	1	.
51	$(336,14)$	.	.	1	.	1	.	.	.	1	1
57	$(420,10)$	.	.	.	.	1	.	.	1	1	1
59	$(512,12)$	1	1	1	1	1	.	1	1	1	1

Genauer bleiben in [30] für die Blöcke 1 und 2 die folgenden Fragen offen:
Ist $\Psi_1 - \Psi_6$ und damit dual $\Psi_{11} - \Psi_{16}$ projektiv?
Ist $\Psi_5 - \Psi_{10}$ und damit dual $\Psi_{15} - \Psi_{20}$ projektiv?
Mit den Ergebnissen für $H(E_8)$ wird es möglich sein, die Unzerlegbarkeit von $\{\Psi_1, \Psi_5, \Psi_{11}, \Psi_{15}\}$ zu beweisen, siehe 11.2.7. und 11.2.10. Also ist die

in [30] angegebene und hier wiedergegebene Matrix die vollständige Zerlegungsmatrix für Block 1 von $H(E_7)$.

11.2. Φ_3-modulare Zerlegungszahlen für $H(E_8)$

11.2.1. Blöcke. Man findet:

Nr.	d	dl	Charaktere
1	4		$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19,$
			$20, 21, 22, 23, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 37, 38, 39, 40,$
			$41, 42, 43, 44, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 60, 61, 62, 63, 64, 65$
2	1	3	$24, 55, 58$
3	1	2	$25, 54, 57$
4	1		$45, 46, 47$
5	4		$68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80$
			$81, 82, 83, 84, 85, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98,$
			$99, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 111, 112$
6	1		$86, 87, 88$
7	1	8	$89, 101, 110$
8	1	7	$90, 100, 109$

11.2.2. Blöcke 2 und 3. Durch Betrachten der Charaktergrade findet man sofort die Zerlegungsmatrix.

		Λ_1	Λ_2
24	$(567, 6)$	1	.
58	$(2835, 22)$	1	1
55	$(2268, 30)$	.	1

		Λ_1	Λ_2
25	$(567, 46)$	1	.
57	$(2835, 14)$	1	1
54	$(2268, 10)$	.	1

11.2.3. Block 4. Wie oben erhält man sofort:

		Λ_1	Λ_2
45	$(1575, 10)$	1	.
47	$(3150, 18)$	1	1
46	$(1575, 34)$	.	1

11.2.4. Block 6. Ebenso:

		Λ_1	Λ_2
86	$(1008, 9)$	1	.
88	$(2016, 19)$	1	1
87	$(1008, 39)$	.	1

11.2.5. Blöcke 7 und 8. Schließlich:

		Λ_1	Λ_2
89	$(1296, 13)$	1	.
110	$(4536, 23)$	1	1
101	$(3240, 31)$	.	1

		Λ_1	Λ_2
90	$(1296, 33)$	1	.
109	$(4536, 13)$	1	1
100	$(3240, 9)$	.	1

11.2.6. Block 5. Nach Induzieren aller bekannten projektiven Charaktere von $H(E_7)$ erhält man die erste Basis, bestehend aus den Induzierten von

$$\Psi_1, \Psi_{11}, \Psi_4, \Psi_{14}, \Psi_{21}, \Psi_{23}, \Psi_{25}, \Psi_6, \Psi_{16}, \Psi_{24}, \Psi_{22}, \chi_{55}, \chi_{56}.$$

Die hier ermittelten Basen werden am Ende dieses Abschnitts in 11.2.11. angegeben.

Man erkennt $\Lambda_5^1, \Lambda_6^1, \Lambda_7^1, \Lambda_8^1, \Lambda_9^1, \Lambda_{10}^1, \Lambda_{11}^1, \Lambda_{12}^1, \Lambda_{13}^1$ als unzerlegbar. Weiter haben die von $\Psi_5, \Psi_{15}, \Psi_2, \Psi_{12}$ von $H(E_7)$ induzierten projektiven Charakter die angegebene Zerlegung in die erste Basis. Also sind

$$\Lambda_4^2 := \Lambda_4^1 - \Lambda_{11}^1, \Lambda_3^2 := \Lambda_3^1 - \Lambda_{10}^1, \Lambda_2^2 := \Lambda_2^1 - \Lambda_{11}^1, \Lambda_1^2 := \Lambda_1^1 - \Lambda_{10}^1$$

projektiv. Damit hat man die zweite Basis.

Man findet, daß Λ_1^2 und Λ_2^2 projektiv-unzerlegbar sind.
Man zeigt nun noch, daß auch Λ_3^2 und Λ_4^2 projektiv-unzerlegbar sind, womit dann alle projektiv-unzerlegbaren Charaktere gefunden sind. Dazu sei angenommen, $\Lambda_3^2 - \Lambda_{12}^2$ sei projektiv. Die Einschränkung dieses Charakters auf

Block 1 von $H(E_7)$ ergibt aber folgende Zerlegung in die in 11.1. angegebene Basis:

$$\Psi_3 + 2 \cdot \Psi_4 + \Psi_6 - \Psi_9 + 3 \cdot \Psi_{10}.$$

Alle diese projektiven Charaktere sind aber schon als unzerlegbar erkannt, Widerspruch. Somit ist $\Lambda_3^2 - \Lambda_{12}^2$ und wegen der Dualität dann auch $\Lambda_4^2 - \Lambda_{13}^2$ nicht projektiv. Also ist die Zerlegungsmatrix nun vollständig bestimmt.

11.2.7. Zurück zu $H(E_7)$**.** Angenommen, Ψ_1 für $H(E_7)$ ist zerlegbar. Dann ist nach den in 11.1. gemachten Bemerkungen $\Psi_1 - \Psi_6$ projektiv. Induziert man diesen Charakter nach $H(E_8)$, so erhält man die folgende Zerlegung in die zweite Basis:

$$\Lambda_1^2 - \Lambda_8^2 + \Lambda_{10}^2,$$

Widerspruch. Also ist Ψ_1 unzerlegbar und wegen der Dualität auch Ψ_{11}.

11.2.8. Block 1**.** Nach Induzieren aller bekannten projektiven Charaktere von $H(E_7)$ erhält man die folgende Basis bestehend aus den Induzierten von:

$$\Psi_1, \Psi_{11}, \Psi_4, \Psi_{14}, \Psi_{21}, \Psi_{23}, \Psi_5, \Psi_6, \Psi_{16}, \Psi_8,$$

$$\Psi_{18}, \Psi_{25}, \Psi_{27}, \Psi_{24}, \Psi_{22}, \Psi_{28}, \Psi_{26}, 1/2 \cdot \Psi_{20}, \chi_{50}, \chi_{56}.$$

Auch hier werden die nun sukzessive bestimmten Basen am Ende dieses Abschnitts in 11.2.12. wiedergegeben.

Man erkennt bereits $\Lambda_5^1, \Lambda_6^1, \Lambda_{12}^1, \Lambda_{13}^1, \Lambda_{14}^1, \Lambda_{15}^1, \Lambda_{18}^1, \Lambda_{19}^1, \Lambda_{20}^1$ als unzerlegbar. Der projektive Charaktere Ψ_{15} von $H(E_7)$ ergibt nach dem Induzieren einen Charakter, der sich in die erste Basis wie dort angegeben zerlegt. Damit sind

$$\Lambda_{17}^2 := \Lambda_{17}^1 - \Lambda_{20}^1, \Lambda_{16}^2 := \Lambda_{16}^1 - \Lambda_{19}^1$$

projektiv. Man hat also die zweite Basis.

Nun sind $\Lambda_{16}^2, \Lambda_{17}^2$ unzerlegbar. Die Charaktere $\Psi_{12}, \Psi_{15}, \Psi_{13}, \Psi_{17}$ von $H(E_7)$ ergeben Induzierte wie bei der zweiten Basis angegeben. Also erhält man unter zusätzlicher Ausnutzung der Dualität die folgenden neuen projektiven Charaktere:

$$\Lambda_3^3 := \Lambda_3^2 - \Lambda_{16}^2 - \Lambda_{19}^2, \Lambda_4^3 := \Lambda_4^2 - \Lambda_{17}^2 - \Lambda_{20}^2, \Lambda_7^3 := \Lambda_7^2 - 2 \cdot \Lambda_{13}^2 - \Lambda_{16}^2,$$

$$\Lambda_8^3 := \Lambda_8^2 - 2\cdot\Lambda_{16}^2, \Lambda_9^3 := \Lambda_9^2 - 2\cdot\Lambda_{17}^2,$$
$$\Lambda_{10}^3 := \Lambda_{10}^2 - \Lambda_{14}^2 - 2\cdot\Lambda_{16}^2 - 2\cdot\Lambda_{19}^2, \Lambda_{11}^3 := \Lambda_{11}^2 - \Lambda_{15}^2 - 2\cdot\Lambda_{17}^2 - 2\cdot\Lambda_{20}^2.$$

Dies ergibt die dritte Basis.

Nun sind auch $\Lambda_3^3, \Lambda_4^3, \Lambda_8^3, \Lambda_9^3$ unzerlegbar.
Die 3-modulare Zerlegungsmatrix für die Weyl-Gruppe $W(E_8) \cong 2\cdot O_8^+(2):2$ kann aus den in [13] und [44] angegebenen Ergebnissen leicht gewonnen werden. Unter Beibehaltung der dort vorgegebenen Reihenfolge der 3-modular irreduziblen Charaktere findet man für die projektiv-unzerlegbaren Charaktere Ψ_1, Ψ_2, Ψ_7 von $W(E_8)$ die bei der dritten Basis angegebene Zerlegung. Daraus folgt, daß

$$\Lambda_1^4 := \Lambda_1^3 - \Lambda_5^3 - 2\cdot\Lambda_{16}^3 - \Lambda_{19}^3, \Lambda_2^4 := \Lambda_2^3 - \Lambda_6^3 - 2\cdot\Lambda_{17}^3 - \Lambda_{20}^3, \Lambda_7^4 := \Lambda_7^3 - \Lambda_{18}^3$$

projektiv sind. Dies ergibt schließlich die vierte Basis.

Nun sind auch noch $\Lambda_1^4, \Lambda_2^4, \Lambda_7^4$ unzerlegbar.

11.2.9. Offene Fragen. Es bleibt nur noch zu überprüfen, ob $\Lambda_{10}^4 - \Lambda_{19}^4$ und damit wegen Dualität auch $\Lambda_{11}^4 - \Lambda_{20}^4$ projektiv ist.

11.2.10. Zurück zu $H(E_7)$. Angenommen, Ψ_5 für $H(E_7)$ ist zerlegbar. Dann ist nach den in 11.1. gemachten Bemerkungen $\Psi_5 - \Psi_{10}$ projektiv. Induziert man diesen Charakter nach $H(E_8)$, so erhält man die Zerlegung

$$\Lambda_7^4 + 2\cdot\Lambda_{13}^4 + \Lambda_{16}^4 - \Lambda_{18}^4$$

in die vierte Basis. Da $\Lambda_7^4, \Lambda_{13}^4, \Lambda_{16}^4, \Lambda_{18}^4$ aber schon als unzerlegbar erkannt sind, ist das ein Widerspruch. Also ist Ψ_5 unzerlegbar und wegen der Dualität auch Ψ_{15}.

11.2.11. Auf den nachfolgenden Seiten werden die oben sukzessive ermittelten Basen für Block 5 wiedergegeben.

	$\{\Lambda_i^1\}_{i=1}^{13}$													
68	$(8,1)$	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
69	$(8,91)$	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
70	$(56,19)$	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
71	$(56,49)$	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
72	$(112,3)$	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.
73	$(112,63)$	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.
74	$(160,7)$	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.
75	$(160,55)$	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.
76	$(448,25)$	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.
77	$(400,7)$	1	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.
78	$(400,43)$	1	1	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.
79	$(448,9)$	1	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.
80	$(448,39)$	.	1	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.
81	$(560,5)$	2	.	1	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.
82	$(560,47)$	.	2	.	1	.	1	.	.	1	.	.	.	.
83	$(1344,19)$	1	1	1	1	.	.	1	1	1	.	.	.	.
84	$(840,13)$	1	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.
85	$(840,31)$	.	1	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.
91	$(1400,11)$	1	1	1	1	.	1	.	1	.	1	.	.	.
92	$(1400,29)$	1	1	1	1	1	.	.	.	1	.	1	.	.
93	$(1400,7)$	2	.	2	.	1	.	.	1	.	1	.	.	.
94	$(1400,37)$	.	2	.	2	.	1	.	.	1	.	1	.	.
95	$(2400,17)$	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	1	.
96	$(2400,23)$	.	.	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	1
97	$(2800,13)$	1	.	2	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.
98	$(2800,25)$	.	1	.	2	.	.	.	.	.	.	1	.	1
99	$(5600,19)$	2	2	1	1	.	.	2	1	1	.	.	1	1
102	$(3360,13)$	2	1	2	1	.	1	.	1	.	1	.	1	.
103	$(3360,25)$	1	2	1	2	1	.	.	.	1	.	1	.	1
104	$(7168,17)$	3	3	3	3	1	1	1	1	1	1	1	1	1
105	$(4096,11)$	3	1	2	1	.	.	1	2	.	1	.	1	.
106	$(4096,27)$	1	3	1	2	.	.	1	.	2	.	1	.	1
107	$(4200,15)$	2	2	2	1	.	1	1	1	1	1	.	1	.
108	$(4200,21)$	2	2	1	2	1	.	1	1	1	.	1	.	1
111	$(5600,15)$	2	1	2	1	.	.	1	1	.	1	.	1	1
112	$(5600,21)$	1	2	1	2	.	.	1	.	1	.	1	1	1
Ψ_5		.	.	.	1	.	.	1	.	.	1	-1	.	2
Ψ_{15}		.	.	1	.	.	.	1	.	.	-1	1	2	.
Ψ_2		.	1	.	.	.	2	.	.	.	.	-1	.	.
Ψ_{12}		1	.	.	.	2	.	.	.	.	-1	.	.	.

	$\{\Lambda_i^2\}_{i=1}^{13}$													
68	$(8,1)$	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
69	$(8,91)$	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
70	$(56,19)$	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
71	$(56,49)$	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
72	$(112,3)$	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.
73	$(112,63)$	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.
74	$(160,7)$	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.
75	$(160,55)$	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.
76	$(448,25)$	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.
77	$(400,7)$	1	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.
78	$(400,43)$	1	1	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.
79	$(448,9)$	1	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.
80	$(448,39)$	.	1	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.
81	$(560,5)$	2	.	1	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.
82	$(560,47)$	.	2	.	1	.	1	.	.	1	.	.	.	.
83	$(1344,19)$	1	1	1	1	.	.	1	1	1	.	.	.	.
84	$(840,13)$	1	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.
85	$(840,31)$	.	1	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.
91	$(1400,11)$	.	1	.	1	.	1	.	1	.	1	.	.	.
92	$(1400,29)$	1	.	1	.	1	.	.	.	1	.	1	.	.
93	$(1400,7)$	1	.	1	.	1	.	.	1	.	1	.	.	.
94	$(1400,37)$	.	1	.	1	.	1	.	.	1	.	1	.	.
95	$(2400,17)$	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	1	.
96	$(2400,23)$	.	.	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	1
97	$(2800,13)$	.	.	1	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.
98	$(2800,25)$	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	1	.	1
99	$(5600,19)$	2	2	1	1	.	.	2	1	1	.	.	1	1
102	$(3360,13)$	1	1	1	1	.	1	.	1	.	1	.	1	.
103	$(3360,25)$	1	1	1	1	1	.	.	.	1	.	1	.	1
104	$(7168,17)$	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1
105	$(4096,11)$	2	1	1	1	.	.	1	2	.	1	.	1	.
106	$(4096,27)$	1	2	1	1	.	.	1	.	2	.	1	.	1
107	$(4200,15)$	1	2	1	1	.	1	1	1	1	1	.	1	.
108	$(4200,21)$	2	1	1	1	1	.	1	1	1	.	1	.	1
111	$(5600,15)$	1	1	1	1	.	.	1	1	.	1	.	1	1
112	$(5600,21)$	1	1	1	1	.	.	1	.	1	.	1	1	1

11.2.12. Auf den nachfolgenden Seiten werden die oben sukzessive ermittelten Basen für Block 1 wiedergegeben.

	$\{\Lambda_i^1\}_{i=1}^{20}$																				
1	(1, 0)	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2	(1, 120)	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
3	(28, 8)	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
4	(28, 68)	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
5	(35, 2)	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
6	(35, 74)	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
7	(70, 32)	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
8	(50, 8)	1	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
9	(50, 56)	1	1	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
10	(84, 4)	2	.	.	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
11	(84, 64)	.	2	.	.	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
12	(168, 24)	1	1	.	.	.	.	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
13	(175, 12)	.	.	.	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
14	(175, 36)	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
15	(210, 4)	1	.	1	.	1	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
16	(210, 52)	.	1	.	1	.	1	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
17	(420, 20)	.	.	1	1	.	.	1	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
18	(300, 8)	1	.	.	.	1	.	1	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
19	(300, 44)	.	1	.	.	.	1	1	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
20	(350, 14)	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.
21	(350, 38)	.	.	.	1	.	.	2	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.
22	(525, 12)	.	.	1	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.
23	(525, 36)	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.
27	(700, 16)	1	2	.	.	.	1	1	1	1	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.
28	(700, 28)	2	1	.	.	1	.	1	1	1	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.
29	(700, 6)	3	.	1	.	1	.	1	2	.	3	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.
30	(700, 42)	.	3	.	1	.	1	.	.	2	.	3	.	.	.	.	.	1	.	.	.
31	(1400, 20)	.	.	.	.	.	.	2	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	1	.	.
32	(840, 14)	2	.	1	.	.	.	3	2	.	2	.	.	1	.	.	1	.	.	.	.
33	(840, 26)	.	2	.	1	.	.	.	.	2	.	2	1	.	.	.	.	1	.	.	.
34	(1680, 22)	.	.	.	.	.	.	3	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	1	.	.
37	(1050, 10)	2	1	1	.	.	1	1	2	.	3	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.
38	(1050, 34)	1	2	.	1	1	.	.	.	2	.	3	.	.	.	1	.	1	.	.	.
39	(2100, 20)	.	.	.	.	.	.	2	.	.	1	1	.	.	1	1	.	.	1	.	.
40	(1344, 8)	4	.	2	.	1	.	2	3	.	4	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.
41	(1344, 38)	.	4	.	2	.	1	1	.	3	.	4	.	.	.	1	.	1	.	.	.
42	(2688, 20)	2	2	1	1	1	1	3	1	1	2	2	.	.	1	1	.	.	1	.	.
43	(1400, 8)	1	.	2	.	.	.	.	.	.	3	.	.	.	.	.	1	.	.	1	.
44	(1400, 32)	.	1	.	2	.	.	.	.	.	.	3	.	.	.	.	.	1	.	.	1
48	(2100, 16)	.	.	1	.	.	.	2	.	.	2	.	1	.	1	.	.	.	1	.	.
49	(2100, 28)	.	.	.	1	.	.	4	.	.	.	2	.	1	.	1	.	.	1	.	.
50	(4200, 18)	3	3	2	2	1	1	5	2	2	4	4	1	1	1	1	1	1	1	.	.
51	(2240, 10)	3	.	2	1	.	.	3	2	.	5	.	.	1	.	.	2	.	.	1	.
52	(2240, 28)	.	3	1	2	.	.	.	.	2	.	5	1	.	.	.	.	2	.	.	1
53	(4480, 16)	1	1	2	2	.	.	3	.	.	3	3	1	1	.	.	1	1	1	1	1
60	(3200, 16)	4	1	1	1	1	.	5	3	.	4	1	.	1	1	1	1	.	1	.	.
61	(3200, 22)	1	4	1	1	.	1	2	.	3	1	4	1	.	1	1	.	1	1	.	.
62	(4096, 12)	4	.	3	.	.	.	4	2	.	6	.	1	1	1	.	2	.	1	1	.
63	(4096, 26)	.	4	.	3	.	.	3	.	2	.	6	1	1	.	1	.	2	1	.	1
64	(4200, 12)	3	1	3	1	.	1	5	2	.	7	1	.	1	1	.	2	.	1	1	.
65	(4200, 24)	1	3	1	3	1	.	2	.	2	1	7	1	.	.	1	.	2	1	.	1
Ψ_{15}		.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	2	−2	.	.	−1	1	.	1	−1

	$\{\Lambda_i^2\}_{i=1}^{20}$																				
1	$(1,0)$	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2	$(1,120)$	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
3	$(28,8)$	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
4	$(28,68)$	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
5	$(35,2)$	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
6	$(35,74)$	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
7	$(70,32)$	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
8	$(50,8)$	1	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
9	$(50,56)$	1	1	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
10	$(84,4)$	2	.	.	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
11	$(84,64)$	.	2	.	.	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
12	$(168,24)$	1	1	.	.	.	.	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
13	$(175,12)$	.	.	.	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
14	$(175,36)$	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
15	$(210,4)$	1	.	1	.	1	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
16	$(210,52)$	.	1	.	1	.	1	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
17	$(420,20)$	.	.	1	1	.	.	1	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
18	$(300,8)$	1	.	.	.	1	.	1	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
19	$(300,44)$	.	1	.	.	.	1	1	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
20	$(350,14)$	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.
21	$(350,38)$	.	.	.	1	.	.	2	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.
22	$(525,12)$	.	.	1	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.
23	$(525,36)$	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.
27	$(700,16)$	1	2	.	.	.	1	1	1	1	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.
28	$(700,28)$	2	1	.	.	1	.	1	1	1	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.
29	$(700,6)$	3	.	1	.	1	.	1	2	.	3	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.
30	$(700,42)$	.	3	.	1	.	1	.	.	2	.	3	.	.	.	.	.	1	.	.	.
31	$(1400,20)$	.	.	.	.	.	.	2	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	1	.	.
32	$(840,14)$	2	.	1	.	.	.	3	2	.	2	.	.	1	.	.	1	.	.	.	.
33	$(840,26)$	.	2	.	1	.	.	.	.	2	.	2	1	.	.	.	.	1	.	.	.
34	$(1680,22)$	.	.	.	.	.	.	3	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	1	.	.
37	$(1050,10)$	2	1	1	.	.	1	1	2	.	3	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.
38	$(1050,34)$	1	2	.	1	1	.	.	.	2	.	3	.	.	.	1	.	1	.	.	.
39	$(2100,20)$	.	.	.	.	.	.	2	.	.	1	1	.	.	1	1	.	.	1	.	.
40	$(1344,8)$	4	.	2	.	1	.	2	3	.	4	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.
41	$(1344,38)$	.	4	.	2	.	1	1	.	3	.	4	.	.	.	1	.	1	.	.	.
42	$(2688,20)$	2	2	1	1	1	1	3	1	1	2	2	.	.	1	1	.	.	1	.	.
43	$(1400,8)$	1	.	2	.	.	.	.	.	.	3	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.
44	$(1400,32)$	.	1	.	2	.	.	.	.	.	.	3	.	.	.	.	.	.	.	.	1
48	$(2100,16)$	.	.	1	.	.	.	2	.	.	2	.	1	.	1	.	.	.	1	.	.
49	$(2100,28)$	.	.	.	1	.	.	4	.	.	.	2	.	1	.	1	.	.	1	.	.
50	$(4200,18)$	3	3	2	2	1	1	5	2	2	4	4	1	1	1	1	1	1	1	.	.
51	$(2240,10)$	3	.	2	1	.	.	3	2	.	5	.	.	1	.	.	1	.	.	1	.
52	$(2240,28)$	.	3	1	2	.	.	.	.	2	.	5	1	.	.	.	.	1	.	.	1
53	$(4480,16)$	1	1	2	2	.	.	3	.	.	3	3	1	1	.	.	.	.	1	1	1
60	$(3200,16)$	4	1	1	1	1	.	5	3	.	4	1	.	1	1	1	1	.	1	.	.
61	$(3200,22)$	1	4	1	1	.	1	2	.	3	1	4	1	.	1	1	.	1	1	.	.
62	$(4096,12)$	4	.	3	.	.	.	4	2	.	6	.	1	1	1	.	1	.	1	1	.
63	$(4096,26)$	.	4	.	3	.	.	3	.	2	.	6	1	1	.	1	.	1	1	.	1
64	$(4200,12)$	3	1	3	1	.	1	5	2	.	7	1	.	1	1	.	1	.	1	1	.
65	$(4200,24)$	1	3	1	3	1	.	2	.	2	1	7	1	.	.	1	.	1	1	.	1
Ψ_{12}		.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	-1	1	.	-1	1
Ψ_{15}		.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	2	-2	.	.	-1	1	.	.	.
Ψ_{13}		.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	1	.	1	1	-2	.	.	.	.
Ψ_{17}		.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	-1	.	-2	.	.	-2	.

	$\{\Lambda_i^3\}_{i=1}^{20}$																				
1	$(1,0)$	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2	$(1,120)$	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
3	$(28,8)$	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
4	$(28,68)$	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
5	$(35,2)$	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
6	$(35,74)$	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
7	$(70,32)$	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
8	$(50,8)$	1	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
9	$(50,56)$	1	1	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
10	$(84,4)$	2	.	.	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
11	$(84,64)$	.	2	.	.	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
12	$(168,24)$	1	1	.	.	.	.	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
13	$(175,12)$	.	.	.	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
14	$(175,36)$	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
15	$(210,4)$	1	.	1	.	1	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
16	$(210,52)$	.	1	.	1	.	1	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
17	$(420,20)$	.	.	1	1	.	.	1	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
18	$(300,8)$	1	.	.	.	1	.	1	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
19	$(300,44)$	.	1	.	.	.	1	1	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
20	$(350,14)$	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.
21	$(350,38)$	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.
22	$(525,12)$	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.
23	$(525,36)$	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.
27	$(700,16)$	1	2	.	.	.	1	1	1	1	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.
28	$(700,28)$	2	1	.	.	1	.	1	1	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.
29	$(700,6)$	3	.	.	.	1	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.
30	$(700,42)$	.	3	.	.	.	1	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.
31	$(1400,20)$	.	.	.	.	.	.	2	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	1	.	.
32	$(840,14)$	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	1	.	.	.	.
33	$(840,26)$	.	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	1	.	.	.
34	$(1680,22)$	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	1	.	.
37	$(1050,10)$	2	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.
38	$(1050,34)$	1	2	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.
39	$(2100,20)$	.	.	.	.	.	.	2	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	1	.	.
40	$(1344,8)$	4	.	1	.	1	.	1	1	.	1	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.
41	$(1344,38)$	.	4	.	1	.	1	1	.	1	.	1	.	.	.	1	.	1	.	.	.
42	$(2688,20)$	2	2	1	1	1	1	3	1	1	1	1	.	.	1	1	.	.	1	.	.
43	$(1400,8)$	1	.	1	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.
44	$(1400,32)$	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1
48	$(2100,16)$	.	.	1	.	.	.	2	.	.	1	.	1	.	1	.	.	.	1	.	.
49	$(2100,28)$	.	.	.	1	.	.	2	.	.	.	1	.	1	.	1	.	.	1	.	.
50	$(4200,18)$	3	3	1	1	1	1	2	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.	.
51	$(2240,10)$	3	.	.	1	.	.	.	.	.	1	.	.	1	.	.	1	.	.	1	.
52	$(2240,28)$	.	3	1	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	1	.	.	1
53	$(4480,16)$	1	1	1	1	.	.	1	.	.	1	1	1	1	.	.	.	.	1	1	1
60	$(3200,16)$	4	1	.	1	1	.	2	1	.	1	.	.	1	1	1	1	.	1	.	.
61	$(3200,22)$	1	4	1	.	.	1	2	.	1	.	1	1	.	1	1	.	1	1	.	.
62	$(4096,12)$	4	.	1	.	.	.	1	.	.	1	.	1	1	1	.	1	.	1	1	.
63	$(4096,26)$	.	4	.	1	.	.	1	.	.	.	1	1	1	.	1	.	1	1	.	1
64	$(4200,12)$	3	1	1	1	.	1	2	.	.	2	1	.	1	1	.	1	.	1	1	.
65	$(4200,24)$	1	3	1	1	1	.	2	.	.	1	2	1	.	.	1	.	1	1	.	1
Ψ_1		1	.	.	.	-1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	-2	.	.	-1	.
Ψ_2		.	1	.	.	.	-1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	-2	.	.	-1
Ψ_7		.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	-1	.	.

	$\{\Lambda_i^4\}_{i=1}^{20}$																				
1	$(1, 0)$	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2	$(1, 120)$	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
3	$(28, 8)$	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
4	$(28, 68)$	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
5	$(35, 2)$	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
6	$(35, 74)$	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
7	$(70, 32)$	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
8	$(50, 8)$	1	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
9	$(50, 56)$	1	1	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
10	$(84, 4)$	1	.	.	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
11	$(84, 64)$	.	1	.	.	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
12	$(168, 24)$	1	1	.	.	.	.	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
13	$(175, 12)$	.	.	.	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
14	$(175, 36)$	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
15	$(210, 4)$	.	.	1	.	1	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
16	$(210, 52)$	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
17	$(420, 20)$	.	.	1	1	.	.	1	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
18	$(300, 8)$	.	.	.	.	1	.	1	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
19	$(300, 44)$	.	.	.	.	.	1	1	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
20	$(350, 14)$	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.
21	$(350, 38)$	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.
22	$(525, 12)$	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.
23	$(525, 36)$	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.
27	$(700, 16)$	1	1	.	.	.	1	1	1	1	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.
28	$(700, 28)$	1	1	.	.	1	.	1	1	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.
29	$(700, 6)$	.	.	.	.	1	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.
30	$(700, 42)$	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.
31	$(1400, 20)$	.	.	.	.	.	.	1	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	1	.	.
32	$(840, 14)$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	1	.	.	.	.
33	$(840, 26)$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	1	.	.	.
34	$(1680, 22)$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	1	.	.
37	$(1050, 10)$	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.
38	$(1050, 34)$	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.
39	$(2100, 20)$	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	1	.	.
40	$(1344, 8)$	1	.	1	.	1	.	1	1	.	1	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.
41	$(1344, 38)$	.	1	.	1	.	1	1	.	1	.	1	.	.	.	1	.	1	.	.	.
42	$(2688, 20)$	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	.	.	1	1	.	.	1	.	.
43	$(1400, 8)$	.	.	1	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.
44	$(1400, 32)$	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1
48	$(2100, 16)$	.	.	1	.	.	.	1	.	.	1	.	1	.	1	.	.	.	1	.	.
49	$(2100, 28)$	.	.	.	1	.	.	1	.	.	.	1	.	1	.	1	.	.	1	.	.
50	$(4200, 18)$	.	.	1	1	1	1	1	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.	.
51	$(2240, 10)$	.	.	.	1	.	.	.	.	.	1	.	.	1	.	.	1	.	.	1	.
52	$(2240, 28)$	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	1	.	.	1
53	$(4480, 16)$	.	.	1	1	.	.	.	.	.	1	1	1	1	.	.	.	.	1	1	1
60	$(3200, 16)$	1	1	.	1	1	.	1	1	.	1	.	.	1	1	1	1	.	1	.	.
61	$(3200, 22)$	1	1	1	.	.	1	1	.	1	.	1	1	.	1	1	.	1	1	.	.
62	$(4096, 12)$	1	.	1	.	.	.	.	.	.	1	.	1	1	1	.	1	.	1	1	.
63	$(4096, 26)$	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	1	1	1	.	1	.	1	1	.	1
64	$(4200, 12)$	.	.	1	1	.	1	1	.	.	2	1	.	1	1	.	1	.	1	1	.
65	$(4200, 24)$	.	.	1	1	1	.	1	.	.	1	2	1	.	.	1	.	1	1	.	1

12. Φ_2-modulare Zerlegungszahlen

12.1. Die Φ_2-modularen Zerlegungszahlen für $H(E_7)$

Für den Block von nicht-maximalem Defekt sind diese in [30] angegeben. Für den Block von maximalem Defekt wird nur eine Basis aus projektiven Charakteren angegeben. Bekannt ist allerdings, daß der Rang der Zerlegungsmatrix dieses Blocks gleich 7 ist und daß die Zerlegungsmatrix Dreiecksgestalt hat. Damit können allgemeine Schlußweisen über Dreiecksmatrizen angewendet werden.
Die in [30] angegebenen projektiven Charaktere werden in der Reihenfolge der Blöcke wie dort fortlaufend numeriert. Die projektiven Charaktere für den Block von maximalem Defekt werden am Ende dieses Abschnitts wiedergegeben. Im folgenden wird gezeigt werden, daß diese Charaktere in der Tat projektiv-unzerlegbar sind. Also handelt es sich bei den unten abgedruckten bis auf die Unterstreichungen identischen Matrizen um die Zerlegungsmatrix dieses Blocks.
Aus den Betrachtungen in [30] folgt bereits, daß die in der in 12.1.2. mit 'Schritt 1' bezeichneten Zerlegungsmatrix unterstrichenen Werte korrekte Zerlegungszahlen sind.

Im Falle der Φ_2-modularen Reduktion folgt aus der Definition der Dualität, siehe Definition 2.2.5., daß zueinander duale irreduzible Charaktere die gleichen modularen Konstituenten haben. Die Φ_2-modulare Reduktion der beiden 1-dimensionalen irreduziblen Darstellungen von $H(E_7)$ wird in Übernahme der Bezeichnungen aus [30] mit $1a$ bezeichnet.
Jetzt betrachtet man die Φ_2-modulare Reduktion der Spiegelungsdarstellung $\chi_{(7,1)}$ von $H(E_7)$, wobei also die Unbestimmte u zu -1 spezialisiert wird. Nun bestimmt man für die Standarderzeuger den Raum der simultanen Eigenvektoren zum Eigenwert -1. Man stellt fest, daß dieser 1-dimensional ist. Nun setzt man die MeatAxe ein, um den Quotientenmodul $6a$ nach diesem Teilmodul zu bestimmen. Eine entsprechende Implementation für den Fall der Charakteristik 0 ist im VectorEnumerator-Paket enthalten. Für ein Coxeter-Element von $H(E_7)$ stellt man fest, daß dieses auf $6a$ ein irreduzibles charakteristisches Polynom, nämlich das Kreisteilungspolynom Φ_{18} hat. Also ist $6a$ irreduzibel und $\chi(7,1)$ zerfällt unter Φ_2-modularer Reduktion als $1a + 6a$.

Die Darstellung $\chi_{(21,6)}$ erhält man als antisymmetrisches Quadrat von $\chi_{(7,1)}$.

Ihre Φ_2-modulare Reduktion sei mit M_{21} bezeichnet. Für das Basiselement

$$T_x := T_{s_1} \cdot T_{s_2} \cdot T_{s_4} \cdot T_{s_5} \cdot T_{s_6} \cdot T_{s_7}$$

findet man auf M_{21} das folgende charakteristische Polynom:

$$\Phi_1^3 \cdot \Phi_5 \cdot \Phi_6 \cdot \Phi_{10} \cdot \Phi_{15}.$$

Für das gleiche Element findet man für $1a$ und $6a$ die charakteristischen Polynome $\Phi_1 \cdot \Phi_6$ sowie Φ_{10}. Dabei bezeichnen die Φ_n wie immer Kreisteilungspolynome. Jetzt bestimmt man mittels VectorEnumerator den Faktormodul von M_{21}, der durch Hinzufügen der Relation

$$(\Phi_1^3 \cdot \Phi_5 \cdot \Phi_{15})(T_x) = 0$$

definiert wird. Man findet, daß er $\mathbb{Q}$-Dimension 15 hat. Für diesen Faktormodul findet man mit derselben Schlußweise wie oben einen Teilmodul isomorph zu $1a$ mit einem Quotienten $14b$, wobei die Bezeichnung wie in [30] gewählt wird. Also enthält M_{21} einen Konstituenten der Dimension maximal 6, einen der Dimension maximal 14 sowie einen der Dimension 1. Damit sind die oben angegebenen approximierten Zerlegungszahlen für $\chi_{(21,6)}$ schon korrekt, und der oben gefundene Quotient $14b$ ist irreduzibel.

Das längste Element $w_0 \in W(E_7) \cong 2 \times S_6(2)$ ist zentral in der Weyl-Gruppe. Also operiert mit 3.5.2. auch T_{w_0}, das zugehörige Basiselement der Iwahori-Hecke-Algebra, wie ein Skalar auf allen modular irreduziblen Darstellungen. Für den hier vorliegenden Block findet man, daß er gleich -1 ist. Nun induziert man mittels VectorEnumerator die modulo Φ_2 reduzierte Spiegelungsdarstellung von $H(E_6)$ nach $H(E_7)$. Der induzierte Modul hat die $\mathbb{Q}$-Dimension 336. Nun fügt man noch die Relation

$$T_{w_0} = -1$$

zu den definierenden Relationen der Iwahori-Hecke-Algebra hinzu und erhält einen 106-dimensionalen Faktormodul M_{106} des Induzierten. Der Satz von Zassenhaus, siehe 4.11.3., stellt sicher, daß die Φ_2-modulare Reduktion jedes irreduziblen Konstituenten des Induzierten, der in dem hier betrachteten Block liegt, in dem so bestimmten Faktormodul vorkommt.
Also kommen in M_{106} die Reduktionen von

$$\chi_{(7,1)}, \chi_{(21,6)}, \chi_{(27,2)}, \chi_{(105,5)}$$

vor. Aus dem schon bekannten Zerfällungsverhalten von $\chi_{(7,1)}$, $\chi_{(21,6)}$ und $\chi_{(27,2)}$ folgt, daß in der Φ_2-modularen Reduktion von $\chi_{(105,5)}$ der Konstituent $6a$ mindestens zweimal und der Konstituent $14b$ mindenstens einmal vorkommen muß. Damit hat der in $\chi_{(105,5)}$ vorkommende noch nicht identifizierte Konstituent eine Dimension von höchstens 79. Aber Ψ_6 ist unzerlegbar und kann nicht von Ψ_1 abgezogen werden. Also sind auch die angegebenen Zerlegungszahlen von $\chi_{(105,5)}$ korrekt und der neu hinzukommende Konstituent $78a$ hat die Dimension 78.
Damit hat man nun die in der mit 'Schritt 2' bezeichneten Zerlegungsmatrix unterstrichenen Einträge als korrekt erkannt.

Für die weiteren Untersuchungen wird die Φ_2-modulare Reduktion der Darstellung $\chi_{(10,9)}$ von $H(E_6)$ benötigt. Darstellende Matrizen für die Darstellung $\chi_{(10,9)}$ der generischen Algebra sind in [29] explizit angegeben. Hier soll eine andere Konstruktion beschrieben werden.
Die Darstellung $\chi_{(10,9)}$ schränkt irreduzibel auf die Darstellung $\chi_{([1],[2^2])}$ der von

$$\{T_{s_2}, T_{s_4}, T_{s_3}, T_{s_5}, T_{s_6}\}$$

erzeugten parabolische Teilalgebra $H(D_5)$ von $H(E_6)$ ein, wie man anhand der Charaktertafeln der zugehörigen Weyl-Gruppen erkennt.
Nun bestimmt man die Zellen und die zugehörigen Zelldarstellungen von $H(D_5)$, siehe 4.9. Die Betrachtung von Charakteren zeigt dann, welche Zelldarstellungen äquivalent zu $\chi_{([1],[2^2])}$ sind. Man beachte, daß eine so gewonnene Darstellung für die Hecke-Algebra $H(D_5)$ mit einer zu -1 spezialisierten Unbestimmten u über $\mathbb{Q}[i]$ realisiert ist und eine Darstellung für die mit diesem Körper tensorierte Iwahori-Hecke-Algebra ist.
Der VectorEnumerator wird nun benutzt, um diese Darstellung nach $H(E_6)$ zu induzieren. Die Frobenius-Reziprozität, also die Adjunktion von Induktion und Restriktion, ergibt, daß $\chi_{(10,9)}$ als epimorphes Bild der induzierten Darstellung vorkommt. Um dieses epimorphe Bild zu bestimmen, und damit eine Fortsetzung von $\chi_{([1],[2^2])}$ von $H(D_5)$ nach $H(E_6)$, geht man wie folgt vor: Für das zu einem Coxeter-Element $w \in W(D_5)$ gehörende Basiselement T_w von $H(D_5)$ findet man auf $\chi_{([1],[2^2])}$ das Minimalpolynom $\Phi_4 \cdot \Phi_8$. Gibt man nun zu den definierenden Relationen noch die Relation

$$(\Phi_4 \cdot \Phi_8)(T_w) = 0$$

hinzu, so liefert der VectorEnumerator einen Modul der $\mathbb{Q}$-Dimension 20, also der $\mathbb{Q}[i]$-Dimension 10. Damit ist $\chi_{(10,9)}$ konstruiert.

Induziert man $\chi_{(10,9)}$ von $H(E_6)$ nach $H(E_7)$, so erhält man aus dem VectorEnumerator einen Modul der $\mathbb{Q}$-Dimension 1120, also der $\mathbb{Q}[i]$-Dimension 560, dessen Charakter durch

$$\chi_{(70,18)} + \chi_{(70,9)} + \chi_{(210,10)} + \chi_{(210,13)}$$

gegeben ist. Verlangt man für das dem längsten Element $w_0 \in W(E_7)$ der Weyl-Gruppe zugeordnete Basiselement T_{w_0} der Iwahori-Hecke-Algebra $H(E_7)$ noch die Relation $T_{w_0} = -1$, so erhält man einen Faktormodul M_{224} der $\mathbb{Q}[i]$-Dimension 224. Zur späteren Verwendung sei hier schon vermerkt, daß daraus folgt, daß M_{224} einen Teilmodul der Dimension 14 hat.
Eine Dimensionsbetrachtung zeigt weiter, daß $\chi_{(70,9)}$ und $\chi_{(210,10)}$ unter Φ_2-modularer Reduktion gemeinsame Konstituenten der kumulierten Dimension mindestens 56 haben. Daraus folgt durch Kontraposition, daß $\Psi_5 - \Psi_7$ nicht projektiv und damit Ψ_5 projektiv-unzerlegbar ist.

Durch Inspektion der darstellenden Matrizen stellt man fest, daß M_{224}, als Modul über dem Grundkörper $\mathbb{Q}$ aufgefaßt, bereits über $\mathbb{Z}_{(13)}$, der Lokalisierung von $\mathbb{Z}$ am Primideal $(13) \trianglelefteq \mathbb{Z}$, realisiert ist. Also kann man die Reduktion dieses Moduls in den endlichen Körper $GF(13)$ betrachten, wobei $i \in \mathbb{Q}[i]$ auf eine primitive 4-te Einheitswurzel über $GF(13)$ spezialisiert wird. Mit der MeatAxe und den in [55] beschriebenen Methoden kann der Untermodulverband des spezialisierten Moduls bestimmt werden.
Nun sei daran erinnert, wie die Arithmetik über $\mathbb{Q}[i]$ zur Anwendung des VectorEnumerator über $\mathbb{Q}$ simuliert wird, siehe 4.10.: Man führt einen neuen Algebrenerzeuger z ein, der mit den anderen Erzeugern kommutiert und als Relation noch $\Phi_4(z) = 0$ erfüllt. Da das Kreisteilungspolynom Φ_4 über $GF(13)$ in zwei Faktoren zerfällt, ist die Reduktion von M_{224} in den endlichen Körper die direkte Summe zweier Untermoduln $V_{224} \oplus V'_{224}$ von jeweils der Dimension 224 über $GF(13)$, auf denen der Erzeuger z gerade wie je eine der beiden primitiven 4-ten Einheitswurzeln in $GF(13)$ operiert.
Man findet, daß jeder dieser Summanden einen einfachen Sockel hat, der isomorph zur Reduktion der schon früher gefundenen Darstellung $14b$ ist. Mit dem Satz von Zassenhaus folgt, daß der 14-dimensionale Teilmodul von M_{224}, dessen Existenz schon oben beobachtet wurde, isomorph zu $14b$ ist. Also kommt in $\chi_{(70,9)}$ oder $\chi_{(210,10)}$ der Konstituent $14b$ vor, damit ist $\Psi_4 - \Psi_5$ nicht projektiv.
Damit hat man nun die in der mit ‘Schritt 3’ bezeichneten Zerlegungsmatrix unterstrichenen Einträge als korrekt erkannt.

Fügt man die Relation

$$(\Phi_1^2 \cdot \Phi_2 \cdot \Phi_7^2 \cdot \Phi_{14})(T_{s_1} \cdot T_{s_2} \cdot T_{s_3} \cdot T_{s_4} \cdot T_{s_6} \cdot T_{s_7})$$

zum Relationensatz der Iwahori-Hecke-Algebra hinzu, so findet man einen Faktormodul von M_{224} der $\mathbb{Q}[i]$-Dimension 70. Hinzufügen von

$$(\Phi_1^2 \cdot \Phi_2^2 \cdot \Phi_7^2 \cdot \Phi_{14}^2)(T_{s_1} \cdot T_{s_2} \cdot T_{s_3} \cdot T_{s_4} \cdot T_{s_6} \cdot T_{s_7})$$

ergibt einen Faktormodul von M_{224} der $\mathbb{Q}[i]$-Dimension 84.
Nun betrachtet man wieder V_{224}. Man findet, daß dieser Modul einen eindeutigen Faktormodul der Dimension 84 besitzt. Dieser besitzt einen einfachen Sockel der Dimension 14, der nicht isomorph zur Reduktion von $14b$ in den endlichen Körper $GF(13)$ ist. Aus dem Satz von Zassenhaus folgt damit, daß M_{224} einen Konstituenten $14a$ der Dimension 14 enthält, der nicht isomorph zu $14b$ ist. Damit ist $\Psi_3 - \Psi_7$ nicht projektiv, also ist Ψ_3 projektiv-unzerlegbar.

Außerdem folgt daraus wieder mit dem Satz von Zassenhaus, daß der Faktormodul von M_{224} der Dimension 84 einen einfachen Sockel hat, der isomorph zu $14a$ ist, und daß er einen Konstituenten $14b$ enthält. Damit folgt aus allgemeinen Prinzipien über modulare Verbände endlicher Länge, siehe etwa [55], daß dieser Faktormodul epimorphes Bild jedes Faktormoduls von M_{224} ist, der $14a$ als Konstituenten enthält. Nun hat aber $\chi_{(210,10)}$ einen Φ_2-modularen Konstituenten $14a$ und die Reduktion von $\chi_{(210,10)}$ kommt nochmals mit dem Satz von Zassenhaus als Faktormodul von M_{224} vor. Daraus folgt, daß $\chi_{(210,10)}$ einen Konstituenten $14b$ enthält, also ist $\Psi_4 - \Psi_7$ nicht projektiv und damit Ψ_4 projektiv-unzerlegbar.
Somit sind alle oben angegebenen projektiven Charaktere als unzerlegbar erkannt und es ist gezeigt, daß die in den Schritten 1 bis 3 wiedergegebenen Matrizen, die ja ohnehin identische Einträge haben, die Zerlegungsmatrix dieses Blocks darstellen.

12.1.1. Bemerkung. Die Nicht-Projektivität von $\Psi_3 - \Psi_7$ kann auch mit den Ergebnissen für $H(E_8)$ gezeigt werden. Dies wird in 12.2.4. ausgeführt.

12.1.2. Auf den nachfolgenden Seiten werden nun die oben mit ‘Schritt 1’, ‘Schritt 2’ und ‘Schritt 3’ bezeichneten Zerlegungsmatrizen wiedergegeben.

	Schritt 1	Ψ_1	Ψ_2	Ψ_3	Ψ_4	Ψ_5	Ψ_6	Ψ_7
1	$(1,0)$	$\underline{1}$	.	.	.	.	.	.
2	$(1,63)$	$\underline{1}$	.	.	.	.	.	.
3	$(7,46)$	1	$\underline{1}$	.	.	.	.	.
4	$(7,1)$	1	$\underline{1}$	.	.	.	.	.
5	$(15,28)$	$\underline{1}$	.	$\underline{1}$	.	.	.	.
6	$(15,7)$	$\underline{1}$	.	$\underline{1}$	.	.	.	.
7	$(21,6)$	1	1	.	$\underline{1}$	.	.	.
8	$(21,33)$	1	1	.	$\underline{1}$	.	.	.
9	$(21,36)$	1	1	.	$\underline{1}$	.	.	.
10	$(21,3)$	1	1	.	$\underline{1}$	.	.	.
11	$(27,2)$	1	2	.	$\underline{1}$	.	.	.
12	$(27,37)$	1	2	.	$\underline{1}$	.	.	.
13	$(35,22)$	1	1	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.	.	.
14	$(35,13)$	1	1	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.	.	.
15	$(35,4)$	1	1	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.	.	.
16	$(35,31)$	1	1	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.	.	.
19	$(70,18)$	.	.	.	1	$\underline{1}$	.	.
20	$(70,9)$	.	.	.	1	$\underline{1}$	.	.
21	$(84,12)$	.	.	$\underline{1}$	1	$\underline{1}$	.	.
22	$(84,15)$	.	.	$\underline{1}$	1	$\underline{1}$	.	.
23	$(105,26)$	1	2	.	1	.	$\underline{1}$	.
24	$(105,5)$	1	2	.	1	.	$\underline{1}$	.
25	$(105,6)$	1	1	$\underline{1}$	2	$\underline{1}$	.	.
26	$(105,21)$	1	1	$\underline{1}$	2	$\underline{1}$	.	.
27	$(105,12)$	1	1	$\underline{1}$	2	$\underline{1}$	.	.
28	$(105,15)$	1	1	$\underline{1}$	2	$\underline{1}$	.	.
31	$(168,6)$	.	1	.	2	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.
32	$(168,21)$	.	1	.	2	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.
33	$(189,10)$	1	2	$\underline{1}$	2	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.
34	$(189,17)$	1	2	$\underline{1}$	2	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.
35	$(189,22)$	1	2	$\underline{1}$	2	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.
36	$(189,5)$	1	2	$\underline{1}$	2	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.
37	$(189,20)$	1	2	$\underline{1}$	2	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.
38	$(189,7)$	1	2	$\underline{1}$	2	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.
39	$(210,6)$	2	3	$\underline{1}$	3	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.
40	$(210,21)$	2	3	$\underline{1}$	3	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.
41	$(210,10)$	.	.	1	1	1	.	$\underline{1}$
42	$(210,13)$	.	.	1	1	1	.	$\underline{1}$
45	$(280,18)$	2	3	$\underline{1}$	4	$\underline{2}$	$\underline{1}$	.
46	$(280,9)$	2	3	$\underline{1}$	4	$\underline{2}$	$\underline{1}$	.
49	$(315,16)$	1	2	1	2	1	$\underline{1}$	$\underline{1}$
50	$(315,7)$	1	2	1	2	1	$\underline{1}$	$\underline{1}$
53	$(378,14)$	.	1	1	3	2	$\underline{1}$	$\underline{1}$
54	$(378,9)$	.	1	1	3	2	$\underline{1}$	$\underline{1}$
55	$(405,8)$	1	3	1	4	2	$\underline{1}$	$\underline{1}$
56	$(405,15)$	1	3	1	4	2	$\underline{1}$	$\underline{1}$
57	$(420,10)$	2	3	2	4	2	$\underline{1}$	$\underline{1}$
58	$(420,13)$	2	3	2	4	2	$\underline{1}$	$\underline{1}$

	Schritt 2	Ψ_1	Ψ_2	Ψ_3	Ψ_4	Ψ_5	Ψ_6	Ψ_7
1	$(1,0)$	$\underline{1}$	.	.	.	.	.	.
2	$(1,63)$	$\underline{1}$	.	.	.	.	.	.
3	$(7,46)$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.	.	.	.	.
4	$(7,1)$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.	.	.	.	.
5	$(15,28)$	$\underline{1}$	.	$\underline{1}$	.	.	.	.
6	$(15,7)$	$\underline{1}$	.	$\underline{1}$	.	.	.	.
7	$(21,6)$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.	$\underline{1}$	.	.	.
8	$(21,33)$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.	$\underline{1}$	.	.	.
9	$(21,36)$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.	$\underline{1}$	.	.	.
10	$(21,3)$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.	$\underline{1}$	.	.	.
11	$(27,2)$	$\underline{1}$	$\underline{2}$	.	$\underline{1}$	.	.	.
12	$(27,37)$	$\underline{1}$	$\underline{2}$	.	$\underline{1}$	.	.	.
13	$(35,22)$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.	.	.
14	$(35,13)$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.	.	.
15	$(35,4)$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.	.	.
16	$(35,31)$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.	.	.
19	$(70,18)$	.	.	.	1	$\underline{1}$	.	.
20	$(70,9)$	.	.	.	1	$\underline{1}$	.	.
21	$(84,12)$	.	.	$\underline{1}$	1	$\underline{1}$	.	.
22	$(84,15)$	.	.	$\underline{1}$	1	$\underline{1}$	.	.
23	$(105,26)$	$\underline{1}$	$\underline{2}$	.	$\underline{1}$	.	$\underline{1}$	.
24	$(105,5)$	$\underline{1}$	$\underline{2}$	.	$\underline{1}$	.	$\underline{1}$	.
25	$(105,6)$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	2	$\underline{1}$	.	.
26	$(105,21)$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	2	$\underline{1}$	.	.
27	$(105,12)$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	2	$\underline{1}$	.	.
28	$(105,15)$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	2	$\underline{1}$	.	.
31	$(168,6)$	.	$\underline{1}$	.	2	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.
32	$(168,21)$	.	$\underline{1}$	.	2	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.
33	$(189,10)$	$\underline{1}$	$\underline{2}$	$\underline{1}$	2	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.
34	$(189,17)$	$\underline{1}$	$\underline{2}$	$\underline{1}$	2	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.
35	$(189,22)$	$\underline{1}$	$\underline{2}$	$\underline{1}$	2	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.
36	$(189,5)$	$\underline{1}$	$\underline{2}$	$\underline{1}$	2	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.
37	$(189,20)$	$\underline{1}$	$\underline{2}$	$\underline{1}$	2	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.
38	$(189,7)$	$\underline{1}$	$\underline{2}$	$\underline{1}$	2	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.
39	$(210,6)$	$\underline{2}$	$\underline{3}$	$\underline{1}$	3	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.
40	$(210,21)$	$\underline{2}$	$\underline{3}$	$\underline{1}$	3	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.
41	$(210,10)$	.	.	1	1	1	.	$\underline{1}$
42	$(210,13)$	.	.	1	1	1	.	$\underline{1}$
45	$(280,18)$	$\underline{2}$	$\underline{3}$	$\underline{1}$	4	$\underline{2}$	$\underline{1}$	.
46	$(280,9)$	$\underline{2}$	$\underline{3}$	$\underline{1}$	4	$\underline{2}$	$\underline{1}$	.
49	$(315,16)$	$\underline{1}$	$\underline{2}$	1	2	1	$\underline{1}$	$\underline{1}$
50	$(315,7)$	$\underline{1}$	$\underline{2}$	1	2	1	$\underline{1}$	$\underline{1}$
53	$(378,14)$	.	$\underline{1}$	1	3	2	$\underline{1}$	$\underline{1}$
54	$(378,9)$	.	$\underline{1}$	1	3	2	$\underline{1}$	$\underline{1}$
55	$(405,8)$	$\underline{1}$	$\underline{3}$	1	4	2	$\underline{1}$	$\underline{1}$
56	$(405,15)$	$\underline{1}$	$\underline{3}$	1	4	2	$\underline{1}$	$\underline{1}$
57	$(420,10)$	$\underline{2}$	$\underline{3}$	2	4	2	$\underline{1}$	$\underline{1}$
58	$(420,13)$	$\underline{2}$	$\underline{3}$	2	4	2	$\underline{1}$	$\underline{1}$

	Schritt 3	Ψ_1	Ψ_2	Ψ_3	Ψ_4	Ψ_5	Ψ_6	Ψ_7
1	$(1,0)$	$\underline{1}$	.	.	.	.	.	.
2	$(1,63)$	$\underline{1}$	.	.	.	.	.	.
3	$(7,46)$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.	.	.	.	.
4	$(7,1)$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.	.	.	.	.
5	$(15,28)$	$\underline{1}$	.	$\underline{1}$	.	.	.	.
6	$(15,7)$	$\underline{1}$	.	$\underline{1}$	.	.	.	.
7	$(21,6)$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.	$\underline{1}$	.	.	.
8	$(21,33)$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.	$\underline{1}$	.	.	.
9	$(21,36)$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.	$\underline{1}$	.	.	.
10	$(21,3)$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.	$\underline{1}$	.	.	.
11	$(27,2)$	$\underline{1}$	$\underline{2}$	.	$\underline{1}$	.	.	.
12	$(27,37)$	$\underline{1}$	$\underline{2}$	.	$\underline{1}$	.	.	.
13	$(35,22)$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.	.	.
14	$(35,13)$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.	.	.
15	$(35,4)$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.	.	.
16	$(35,31)$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.	.	.
19	$(70,18)$	.	.	.	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.	.
20	$(70,9)$	.	.	.	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.	.
21	$(84,12)$	.	.	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.	.
22	$(84,15)$	.	.	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.	.
23	$(105,26)$	$\underline{1}$	$\underline{2}$	.	$\underline{1}$	.	$\underline{1}$	.
24	$(105,5)$	$\underline{1}$	$\underline{2}$	.	$\underline{1}$	.	$\underline{1}$	.
25	$(105,6)$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{2}$	$\underline{1}$	.	.
26	$(105,21)$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{2}$	$\underline{1}$	.	.
27	$(105,12)$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{2}$	$\underline{1}$	.	.
28	$(105,15)$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{2}$	$\underline{1}$	.	.
31	$(168,6)$	.	$\underline{1}$	.	$\underline{2}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.
32	$(168,21)$	.	$\underline{1}$	.	$\underline{2}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.
33	$(189,10)$	$\underline{1}$	$\underline{2}$	$\underline{1}$	$\underline{2}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.
34	$(189,17)$	$\underline{1}$	$\underline{2}$	$\underline{1}$	$\underline{2}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.
35	$(189,22)$	$\underline{1}$	$\underline{2}$	$\underline{1}$	$\underline{2}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.
36	$(189,5)$	$\underline{1}$	$\underline{2}$	$\underline{1}$	$\underline{2}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.
37	$(189,20)$	$\underline{1}$	$\underline{2}$	$\underline{1}$	$\underline{2}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.
38	$(189,7)$	$\underline{1}$	$\underline{2}$	$\underline{1}$	$\underline{2}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.
39	$(210,6)$	$\underline{2}$	$\underline{3}$	$\underline{1}$	$\underline{3}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.
40	$(210,21)$	$\underline{2}$	$\underline{3}$	$\underline{1}$	$\underline{3}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	.
41	$(210,10)$	.	.	1	1	$\underline{1}$	.	$\underline{1}$
42	$(210,13)$	.	.	1	1	$\underline{1}$	.	$\underline{1}$
45	$(280,18)$	$\underline{2}$	$\underline{3}$	$\underline{1}$	$\underline{4}$	$\underline{2}$	$\underline{1}$	.
46	$(280,9)$	$\underline{2}$	$\underline{3}$	$\underline{1}$	$\underline{4}$	$\underline{2}$	$\underline{1}$	.
49	$(315,16)$	$\underline{1}$	$\underline{2}$	1	2	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$
50	$(315,7)$	$\underline{1}$	$\underline{2}$	1	2	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$
53	$(378,14)$	.	$\underline{1}$	1	3	$\underline{2}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$
54	$(378,9)$	.	$\underline{1}$	1	3	$\underline{2}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$
55	$(405,8)$	$\underline{1}$	$\underline{3}$	1	4	$\underline{2}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$
56	$(405,15)$	$\underline{1}$	$\underline{3}$	1	4	$\underline{2}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$
57	$(420,10)$	$\underline{2}$	$\underline{3}$	2	4	$\underline{2}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$
58	$(420,13)$	$\underline{2}$	$\underline{3}$	2	4	$\underline{2}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$

12.2. Φ_2-modulare Zerlegungszahlen für $H(E_8)$

12.2.1. Blöcke. Man findet:

Nr.	d	dl	Charaktere
1	8		$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20$ $21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37,$ $38, 39, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 64,$ $65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 79, 80, 81, 82, 84, 85, 86, 87, 91, 92,$ $93, 94, 95, 96, 100, 101, 107, 108, 109, 110, 111, 112$
2	4		$40, 41, 51, 52, 60, 61, 72, 73, 74, 75, 76,$ $77, 78, 83, 88, 89, 90, 97, 98, 99, 102, 103$
3	1	4	$62, 106$
4	1	3	$63, 105$

12.2.2. Blöcke 3 und 4. Offenbar lauten die Zerlegungsmatrizen:

		Λ_1
62	$(4096, 12)$	1
106	$(4096, 27)$	1

		Λ_1
63	$(4096, 26)$	1
105	$(4096, 11)$	1

12.2.3. Block 2. Nach Induzieren aller projektiv-unzerlegbaren projektiven Charaktere von $H(E_7)$ erält man aus den Induzierten von

$$\Psi_6, 1/4 \cdot \Psi_3 + 1/8 \cdot \Psi_7 + 1/4 \cdot \chi_{59}, \Psi_{10}, \Psi_8, 1/4 \cdot \Psi_7 + 1/2 \cdot \chi_{59}, \chi_{59}$$

die erste Basis:

		Λ_1^1	Λ_2^1	Λ_3^1	Λ_4^1	Λ_5^1	Λ_6^1
40	$(1344, 8)$	5	1	1	1	.	.
41	$(1344, 38)$	5	1	1	1	.	.
51	$(2240, 10)$	5	2	1	1	1	.
52	$(2240, 28)$	5	2	1	1	1	.
60	$(3200, 16)$	4	2	3	1	1	1
61	$(3200, 22)$	4	2	3	1	1	1
72	$(112, 3)$	.	.	.	1	.	.
73	$(112, 63)$	.	.	.	1	.	.
74	$(160, 7)$	1	.	.	.	.	.
75	$(160, 55)$	1	.	.	.	.	.
76	$(448, 25)$	2	1	.	.	.	.
77	$(400, 7)$	1	1	.	1	.	.
78	$(400, 43)$	1	1	.	1	.	.
83	$(1344, 19)$	2	2	.	.	1	.
88	$(2016, 19)$	.	1	2	.	1	1
89	$(1296, 13)$	4	1	1	2	.	.
90	$(1296, 33)$	4	1	1	2	.	.
97	$(2800, 13)$	7	3	1	2	1	.
98	$(2800, 25)$	7	3	1	2	1	.
99	$(5600, 19)$	10	4	4	2	2	1
102	$(3360, 13)$	5	2	3	1	1	1
103	$(3360, 25)$	5	2	3	1	1	1
Ψ_9		.	.	2	.	.	-4
χ_{60}		.	.	.	.	4	-2

Man erkennt Λ_6^1 als unzerlegbar. Außerdem findet man für die Induzierten von den projektiven Charakteren Ψ_9, χ_{60} die oben angegebene Zerlegung in die Basis. Also sind

$$\Lambda_5^2 := \Lambda_5^1 - \Lambda_6^1 \text{ und } \Lambda_3^2 := \Lambda_3^1 - 2 \cdot \Lambda_6^1$$

projektiv und man hat als zweite Basis:

		Λ_1^2	Λ_2^2	Λ_3^2	Λ_4^2	Λ_5^2	Λ_6^2
40	$(1344, 8)$	5	1	1	1	.	.
41	$(1344, 38)$	5	1	1	1	.	.
51	$(2240, 10)$	5	2	1	1	1	.
52	$(2240, 28)$	5	2	1	1	1	.
60	$(3200, 16)$	4	2	1	1	.	1
61	$(3200, 22)$	4	2	1	1	.	1
72	$(112, 3)$	.	.	.	1	.	.
73	$(112, 63)$	.	.	.	1	.	.
74	$(160, 7)$	1	.	.	.	.	.
75	$(160, 55)$	1	.	.	.	.	.
76	$(448, 25)$	2	1	.	.	.	.
77	$(400, 7)$	1	1	.	1	.	.
78	$(400, 43)$	1	1	.	1	.	.
83	$(1344, 19)$	2	2	.	.	1	.
88	$(2016, 19)$	.	1	.	.	.	1
89	$(1296, 13)$	4	1	1	2	.	.
90	$(1296, 33)$	4	1	1	2	.	.
97	$(2800, 13)$	7	3	1	2	1	.
98	$(2800, 25)$	7	3	1	2	1	.
99	$(5600, 19)$	10	4	2	2	1	1
102	$(3360, 13)$	5	2	1	1	.	1
103	$(3360, 25)$	5	2	1	1	.	1
Ψ_3		.	4	.	.	-2	-2
Θ_1		.	1	-1	.	.	1
Θ_2		1	.	-4	.	.	.
Θ_3		.	.	-1	1	2	2

Jetzt sind auch Λ_5^2 und Λ_3^2 unzerlegbar.
Für die folgenden projektiven Charaktere für die Weyl-Gruppe $W(E_8) \cong 2 \cdot O_8^+(2) : 2$,

$$\Theta_1 := (\Psi_6)_{W(E_8)}, \Theta_2 := (\Psi_7)_{W(E_8)}, \Theta_3 := (\Psi_5)_{W(E_8)}$$

findet man die oben angegebene Zerlegung in die Basis. Dabei beziehen sich die projektiven Charaktere von $W(E_8)$ auf die 2-modulare Zerlegungsmatrix dieser Gruppe, wie sie aus den Resultaten in [13] und [44] gewonnen werden kann.

Daraus folgt, daß

$$\Lambda_2^3 := \Lambda_2^2 - \Lambda_3^2 - \Lambda_5^2 - \Lambda_6^2, \Lambda_1^3 := \Lambda_1^2 - 4 \cdot \Lambda_3^2, \Lambda_4^3 := \Lambda_4^2 - \Lambda_3^2$$

projektiv sind. Dies ergibt:

		Λ_1^3	Λ_2^3	Λ_3^3	Λ_4^3	Λ_5^3	Λ_6^3
40	$(1344, 8)$	1	.	1	.	.	.
41	$(1344, 38)$	1	.	1	.	.	.
51	$(2240, 10)$	1	.	1	.	1	.
52	$(2240, 28)$	1	.	1	.	1	.
60	$(3200, 16)$	.	.	1	.	.	1
61	$(3200, 22)$	.	.	1	.	.	1
72	$(112, 3)$	.	.	.	1	.	.
73	$(112, 63)$	.	.	.	1	.	.
74	$(160, 7)$	1	.	.	.	.	.
75	$(160, 55)$	1	.	.	.	.	.
76	$(448, 25)$	2	1	.	.	.	.
77	$(400, 7)$	1	1	.	1	.	.
78	$(400, 43)$	1	1	.	1	.	.
83	$(1344, 19)$	2	1	.	.	1	.
88	$(2016, 19)$	.	.	.	.	.	1
89	$(1296, 13)$	.	.	1	1	.	.
90	$(1296, 33)$	.	.	1	1	.	.
97	$(2800, 13)$	3	1	1	1	1	.
98	$(2800, 25)$	3	1	1	1	1	.
99	$(5600, 19)$	2	.	2	.	1	1
102	$(3360, 13)$	1	.	1	.	.	1
103	$(3360, 25)$	1	.	1	.	.	1
Ψ_1		4	-4	4	4	-4	.

Man erkennt nun Λ_2^3 und Λ_4^3 als unzerlegbar. Mit der Zerlegung des Induzierten von Ψ_1 für $H(E_7)$ in die Basis folgt noch, daß

$$\Lambda_1^4 := \Lambda_1^3 - \Lambda_2^3 - \Lambda_5^3$$

projektiv und damit unzerlegbar ist. Also lautet die vollständige Zerlegungsmatrix:

		Λ_1^4	Λ_2^4	Λ_3^4	Λ_4^4	Λ_5^4	Λ_6^4
40	$(1344, 8)$	1	.	1	.	.	.
41	$(1344, 38)$	1	.	1	.	.	.
51	$(2240, 10)$	.	.	1	.	1	.
52	$(2240, 28)$	.	.	1	.	1	.
60	$(3200, 16)$	.	.	1	.	.	1
61	$(3200, 22)$	.	.	1	.	.	1
72	$(112, 3)$	.	.	.	1	.	.
73	$(112, 63)$	.	.	.	1	.	.
74	$(160, 7)$	1	.	.	.	.	.
75	$(160, 55)$	1	.	.	.	.	.
76	$(448, 25)$	1	1	.	.	.	.
77	$(400, 7)$	.	1	.	1	.	.
78	$(400, 43)$	.	1	.	1	.	.
83	$(1344, 19)$	.	1	.	.	1	.
88	$(2016, 19)$	.	.	.	.	.	1
89	$(1296, 13)$	.	.	1	1	.	.
90	$(1296, 33)$	.	.	1	1	.	.
97	$(2800, 13)$	1	1	1	1	1	.
98	$(2800, 25)$	1	1	1	1	1	.
99	$(5600, 19)$	1	.	2	.	1	1
102	$(3360, 13)$	1	.	1	.	.	1
103	$(3360, 25)$	1	.	1	.	.	1

12.2.4. Zurück zu $H(E_7)$. Angenommen, $\Psi_3 - \Psi_7$ wäre projektiv. Dann zerlegt sich die in Block 2 liegende Komponente dieses induzierten projektiven Charakters wie folgt:

$$4 \cdot \Lambda_2^4 + 4 \cdot \Lambda_3^4 - 2 \cdot \Lambda_5^4,$$

Widerspruch. Also folgt unabhängig auch aus den Ergebnissen für $H(E_8)$ die Unzerlegbarkeit von Ψ_3 für $H(E_7)$.

12.2.5. Block 1. Nach Induzieren aller projektiv-unzerlegbaren Charaktere von $H(E_7)$ und Benutzung von 2-modularen projektiven Charakteren der Weyl-Gruppe $W(E_8) \cong 2 \cdot O_8^+(2) : 2$ findet man aus

$$(\Psi_1)_{W(E_8)}, (\Psi_4)_{W(E_8)}, (\Psi_2)_{W(E_8)}, (\Psi_3)_{W(E_8)}, (\Psi_5)_{W(E_8)}, (\Psi_6)_{W(E_8)},$$

$$(\Psi_9)_{H(E_7)}, (\Psi_8)_{W(E_8)}, (\Psi_9)_{W(E_8)}, (1/2 \cdot \Psi_{10})_{H(E_7)}, (\Psi_{10})_{W(E_8)}, (\chi 59)_{H(E_7)}$$

die erste Basis. Dabei werden mit Bemerkung 3.8.6. die projektiv-unzerlegbaren Charaktere der Weyl-Gruppe direkt als projektive Charaktere der generischen Algebra aufgefaßt. Diese und die im weiteren bestimmten Basen werden am Ende dieses Abschnitts in 12.2.7. angegeben.

Im Falle der Φ_2-modularen Zerlegungsabbildung haben zueinander duale irreduzible Charaktere die gleichen modularen Konstituenten. Dies kann und wird natürlich bei allen Rechnungen zum Auffinden von Summanden, wie sie in 4.6.3. beschrieben sind, benutzt. Man findet damit, daß Λ^1_{10}, Λ^1_{11}, Λ^1_{12} projektiv-unzerlegbar sind.
Die projektiven Charaktere Ψ_8, Ψ_7 von $H(E_7)$ ergeben durch Induzieren Charaktere, die sich in die erste Basis wie dort angegeben zerlegen. Also sind

$$\Lambda^2_8 := \Lambda^1_8 - \Lambda^1_{10} \text{ und } \Lambda^2_7 := \Lambda^1_7 - \Lambda^1_{10}$$

projektiv und man hat die am Ende des Abschnitts angegebene zweite Basis.

Nun sind Λ^2_7, Λ^2_8 auch unzerlegbar. Jetzt zerlegt sich noch der Induzierte von Ψ_3 von $H(E_7)$ wie angegeben in die zweite Basis. Beachtet man, daß sowohl Λ^2_{10} als auch Λ^2_{12} höchstens einmal von Λ^2_5 abgezogen werden können, so folgt, daß

$$\Lambda^3_4 := \Lambda^2_4 - \Lambda^2_7 - \Lambda^2_8 - \Lambda^2_{10} - 2 \cdot \Lambda^2_{12}$$

projektiv ist. Somit hat man die dritte Basis.

Weiter zerlegen sich noch die Induzierten von Ψ_1 und Ψ_2 von $H(E_7)$ wie angegeben in die dritte Basis. Es folgt, daß

$$\Lambda^4_3 := \Lambda^3_3 - 2 \cdot \Lambda^3_8 \text{ und } \Lambda^4_2 := \Lambda^3_2 - \Lambda^3_8$$

projektiv sind. Also erhält man nun die vierte Basis.

In dieser Situation kommen nun die verfeinerten Testroutinen zum Auffinden von möglichen Zerlegungen der obigen Projektiven zum Tragen, siehe

4.6.4. Unter Benutzung der nun bekannten projektiv-unzerlegbaren Charaktere von $H(E_7)$ zeigen diese, daß $\Lambda_4^4, \Lambda_5^4, \Lambda_6^4, \Lambda_9^4$ nur Summanden haben können, die bereits in dem von den $\{\Lambda_i^4\}$ aufgespannten Gitter liegen. Da die vierte Basis Dreiecksgestalt hat, kann man die möglichen Summanden direkt ablesen.
Nun betrachtet man die ebenfalls angegebene Zerlegung der Induzierten von Ψ_1, Ψ_2 von $H(E_7)$ in die vierte Basis.
Mit der ersten Relation kann man wie folgt schließen. Λ_6^4 hat einen eindeutigen Summanden, der an der Stelle $\chi_{(168,24)}$ einen nichtverschwindenden Eintrag hat. Dieser Summand kommt mit Vielfachheit 4 in Λ_1^4 vor. Dann zeigt aber die Zeile zu $\chi_{(700,16)}$, daß

$$\Lambda_6^5 := \Lambda_6^4 - \Lambda_{10}^4$$

projektiv ist. Daraus folgt aber weiter, daß Λ_{10}^4 mit Vielfachheit 4 in $\Lambda_1^4 + 2 \cdot \Lambda_3^4$ vorkommt, aber höchstens mit Vielfachheit 2 in Λ_1^4. Damit ist auch

$$\Lambda_3^5 := \Lambda_3^4 - \Lambda_{10}^4$$

projektiv.
Außerdem hat auch Λ_4^4 einen eindeutigen Summanden, der an der Stelle $\chi_{(70,32)}$ einen nichtverschwindenden Eintrag hat. Aus der zweiten Relation folgt unter Berücksichtigung der möglichen anderen Summanden von Λ_4^4 und Λ_6^4, daß

$$\Lambda_2^5 := \Lambda_2^4 - \Lambda_4^4 - \Lambda_6^4 + \Lambda_8^4 + 2 \cdot \Lambda_{10}^4 + 3 \cdot \Lambda_{12}^4$$

projektiv ist. Dabei entsteht obiger Ausdruck mittels folgender Überlegung: Da Λ_4^4 und Λ_6^5 noch nicht als unzerlegbar erkannt sind, müssen nach Abzug dieser Terme mögliche zuviel abgezogene Summanden wieder addiert werden.
Somit erhält man die fünfte Basis.

Mit den verfeinerten Testroutinen zum Auffinden von möglichen projektiven Summanden findet man analog zu oben, daß Λ_3^5 ebenfalls nur Summanden haben kann, die bereits in dem von den $\{\Lambda_i^5\}$ aufgespannten Gitter liegen. Dagegen kann Λ_2^5 neben Summanden aus diesem Gitter auch noch Summanden enthalten, die sich als Summe des bei der fünften Basis angegebenen Charakters Δ mit bereits bekannten projektiven Charakteren schreiben lassen.
Nun untersucht man mit der MeatAxe die Reduktionen einiger Darstellungen in den endlichen Körper $GF(13)$. Dabei wird die Unbestimte u zu einer

primitiven 2-ten Einheitswurzel, das heißt natürlich zu -1, spezialisiert.
Man erhält eine Darstellung zum Charakter $\chi_{(28,8)}$ als antisymmetrisches Quadrat der Spiegelungsdarstellung. Die MeatAxe zeigt, daß diese Darstellung über $GF(13)$ als $1a + 27a$ zerfällt. Weiter erhält man eine Darstellung zum Charakter $\chi_{(70,32)}$ als antisymmetrische vierte Potenz der Spiegelungsdarstellung. Man findet, daß diese Darstellung über $GF(13)$ in $1a+27a+42a$ zerfällt, wobei die beiden vorkommenden Darstellungen der Dimension 27 isomorph sind.
Daraus folgt, daß sowohl der Summand von Λ_2^5 mit nichtverschwindendem Eintrag an der Stelle $\chi_{(28,8)}$ als auch der mit nichtverschwindendem Eintrag an der Stelle $\chi_{(70,32)}$ von Λ_1^5 abgezogen werden kann. Durch Betrachtung der Stellen $\chi_{(210,4)}$ und $\chi_{(420,20)}$ folgt, daß

$$\Lambda_2^6 := \Lambda_2^5 - \Lambda_7^5 - \Lambda_8^5$$

projektiv ist. Damit folgt schließlich mit einer Überlegung wie oben, indem mögliche zuviel abgezogene Terme wieder addiert werden:

$$\Lambda_1^6 := \Lambda_1^5 - \Lambda_2^6 + \Lambda_{10}^5 + 8 \cdot \Lambda_{12}^5$$

ist projektiv. Man beachte, daß der projektiv-unzerlegbare Summand von Λ_9^5, der an der Stelle $\chi_{(300,8)}$ einen nichtverschwindenden Eintrag hat, an der Stelle $\chi_{(840,14)}$ ebenfalls einen nichtverschwindenden Eintrag hat, also nicht Summand von Λ_2^6 ist. Somit hat man die sechste Basis.

Außerdem ist wieder die Zerlegung der Induzierten von Ψ_1 und Ψ_2 von $H(E_7)$ in die sechste Basis angegeben. Diese Relationen zeigen jetzt, daß

$$\Lambda_1^7 := \Lambda_1^6 - 4 \cdot \Lambda_6^6 + 4 \cdot \Lambda_{12}^6 \text{ und } \Lambda_2^7 := \Lambda_2^6 - \Lambda_{10}^6$$

projektiv sind, dies ergibt die siebte Basis.

Weiter folgt aus den Relationen für dieselben projektiven Charaktere, jetzt in der siebten Basis, daß

$$\Lambda_1^8 := \Lambda_1^7 - 5 \cdot \Lambda_{12}^7, \Lambda_2^8 := \Lambda_2^7 - 5 \cdot \Lambda_{12}^7, \Lambda_3^8 := \Lambda_3^7 - \Lambda_{10}^7 - \Lambda_{12}^7$$

projektiv sind und man hat die achte Basis.

Jetzt sei nochmals der mögliche Summand Δ von Λ_2^8 betrachtet, der bei der fünften Basis angegeben ist. Schränkt man $\Lambda_2^8 - \Delta$ auf $H(E_7)$ ein und betrachtet die Komponente in Block 1 von $H(E_7)$, so findet man die folgende Zerlegung in die Basis:

$$2 \cdot \Psi_1 + 2 \cdot \Psi_2 - \Psi_3 + 2 \cdot \Psi_4 + 3 \cdot \Psi_5 + 6 \cdot \Psi_6 + 9 \cdot \Psi_7.$$

Dieser Widerspruch zeigt, daß $\Lambda_2^8 - \Delta$ nicht projektiv ist. Also liegen alle möglichen Summanden von Λ_2^8 schon in dem von $\{\Lambda_i^8\}$ aufgespannten Gitter. Ebenso zeigt man mit der Zerlegung

$$2 \cdot \Psi_1 + 4 \cdot \Psi_2 + \Psi_3 + 4 \cdot \Psi_4 - \Psi_5 + 10 \cdot \Psi_6 + 3 \cdot \Psi_7,$$

daß $\Lambda_2^8 - 2 \cdot \Lambda_{12}^8$ nicht projektiv ist.
Dann folgt aus der ersten der bei der achten Basis angegebenen Relationen, die sich natürlich wieder auf dieselben projektiven Charaktere beziehen, daß

$$\Lambda_1' := \Lambda_1^8 - \Lambda_{12}^8 \text{ und } \Lambda_3' := \Lambda_3^8 - \Lambda_{12}^8$$

projektiv sind.

Nun konstruiert man die Reduktion der Darstellung $14b$ für $H(E_7)$, die bereits in 12.1. betrachtet wurde, in den endlichen Körper $GF(13)$, indem man die gewöhnliche Darstellung zu $\chi_{(21,6)}$, die man als antisymmetrisches Quadrat der Spiegelungsdarstellung erhält, mittels MeatAxe ausreduziert. Der Charakter von $14b$ ist gegeben als die Φ_2-modulare Reduktion von $\chi_{(21,6)} - \chi_{(7,1)}$. Wegen

$$\begin{aligned}(\chi_{(21,6)})^{H(E_8)} &= (\chi_{(28,8)} + \chi_{(350,14)} + \chi_{(567,6)} \\ &\quad + \chi_{(1575,10)} + \chi_{(56,19)} + \chi_{(1008,9)}) \\ &\quad + (\chi_{(160,7)} + \chi_{(1296,13)})\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}(\chi_{(7,1)})^{H(E_8)} &= (\chi_{(28,8)} + \chi_{(35,2)} + \chi_{(210,4)} \\ &\quad + \chi_{(567,6)} + \chi_{(8,1)} + \chi_{(560,5)}) \\ &\quad + (\chi_{(112,3)} + \chi_{(160,7)}),\end{aligned}$$

wobei jeweils der erste Term aus Charakteren aus Block 1 und der zweite aus solchen aus Block 2 besteht, kommt die bisher unbekannte Darstellung φ_{11} in der von $H(E_7)$ nach $H(E_8)$ induzierten Darstellung $14b$ vor. Dabei bezeichnet φ_{11} die zum projektiv-unzerlegbaren Charakter Λ_{11}^8 gehörende

Darstellung.
Die Induktion wird mit dem VectorEnumerator durchgeführt. Die MeatAxe findet als größten Konstituenten einen der Dimension 1184, dieser ist die Reduktion einer irreduziblen Darstellung aus Block 2. Weiter kommt ein Konstituent der Dimension 792 vor. Aus Dimensiongründen ist dieser ein Subquotient der Reduktion von φ_{11} in den endlichen Körper $GF(13)$. Daraus folgt, daß

$$\Lambda_3^9 := \Lambda_3' - \Lambda_{11}^8$$

projektiv ist.

Aus der antisymmetrischen dritten Potenz der Spiegelungsdarstellung von $H(E_7)$ erhält man analog zu oben die Darstellung $14a$, deren Charakter als Reduktion von $\chi_{(15,7)} - \chi_{(1,0)}$ geschrieben werden kann. Wegen

$$(\chi_{(15,7)})^{H(E_8)} = (\chi_{(50,8)} + \chi_{(700,16)} + \chi_{(1050,10)} + \chi_{(1400,11)}) + \chi_{(400,7)}$$

und

$$(\chi_{(1,0)})^{H(E_8)} = (\chi_{(1,0)} + \chi_{(35,2)} + \chi_{(84,4)} + \chi_{(8,1)}) + \chi_{(112,3)}$$

kommt in der Reduktion der nach $H(E_8)$ induzierten Darstellung $14a$ die Reduktion der bisher unbekannten irreduziblen Darstellung φ_{10} vor. Mittels VectorEnumerator und MeatAxe findet man einen Konstituenten der Dimension 651. Daraus folgt, daß weiter

$$\Lambda_1^9 := \Lambda_1' - \Lambda_{10}^8 \text{ und } \Lambda_4^9 := \Lambda_4^8 - \Lambda_{10}^8$$

projektiv sind.
Damit hat man die unten angegebene neunte Basis gefunden.

Nun untersucht man noch die Untermodulstruktur der von $H(E_7)$ nach $H(E_8)$ induzierten Spiegelungsdarstellung über $GF(13)$. Dieser Modul werde mit V bezeichnet. Die Zerlegung von $(\chi_{(7,1)})^{H(E_8)}$ in irreduzible Charaktere wurde oben bereits angegeben. Mittels MeatAxe findet man, daß $\chi_{(210,4)}$ über $GF(13)$ in $8a+202a$ zerfällt. Dabei ist der hier auftretende Konstituent $8a$ isomorph zu der Reduktion der Spiegelungsdarstellung von $H(E_8)$ in den endlichen Körper $GF(13)$.
Nun sei angenommen, daß $\chi_{(210,4)}$ unter Φ_2-modularer Reduktion irreduzibel bleibt, und erst unter Reduktion in den endlichen Körper zerfällt. Da die hier betrachtete Darstellung die Reduktion einer Darstellung der halbeinfachen generischen Algebra ist, folgt aus dem Satz von Zassenhaus, daß die

Φ_2-modulare Reduktion dieses Moduls in den Zahlkörper $\mathbb{Q}[i]$ einen Teilmodul $8 \oplus 210$ im Sockel enthält. Nochmalige Anwendung des Satzes von Zassenhaus zeigt, daß die 13-modulare Reduktion in den endlichen Körper $GF(13)$, V, einen Teilmodul mit den Konstituenten $8a^2, 202a$ enthält.
Das kann nun mit der MeatAxe überprüft werden. Hierbei erweisen sich die in [55] entwickelten Ideen als hilfreich: Man bestimmt zunächst *Peakworte* w_{8a}, w_{202a} für die Konstituenten $8a$ und $202a$ von V. Ein Peakwort für den Konstituenten $8a$ ist ein Element w_{8a} in der operierenden Algebra, das auf allen Konstituenten des betrachteten Moduls mit Ausnahme von $8a$ selbst regulär operiert, auf dem Konstituenten $8a$ jedoch singulär operiert, so daß w_{8a} und w_{8a}^2 dort einen Kern der Dimension 1 haben.
Dann bestimmt man darstellende Matrizen für diese Peakworte und die Kerne der Operationen von w_{8a}^2 und w_{202a} auf V. Da der gesuchte Teilmodul den Konstituenten $8a$ mit der Vielfachheit 2 enthält, betrachtet man den Kern des quadrierten Peakworts. Für $202a$ reicht hingegen der Kern des Peakworts selbst aus. Nun zeigen die Überlegungen in [55], daß ein Teilmodul von V mit den Konstituenten $8a^2, 202a$ sowohl mit dem Kern von w_{8a}^2 als auch mit dem Kern von w_{202a} einen nichttrivialen Schnitt hat. Also bestimmt man die von den einzelnen Vektoren in diesen Kernen aufgespannten Untermoduln unter der Operation der ganzen Algebra. Eine Dimensionsbetrachtung der so gewonnenen Teilmoduln zeigt, daß V keinen Teilmodul mit der verlangten Eigenschaft enthält, im Widerspruch zur Annahme.
Also zerfällt $\chi_{(210,4)}$ bereits unter Φ_2-modularer Reduktion und

$$\Lambda_3^9 - \Lambda_7^9$$

ist nicht projektiv. Nun zeigt die Untersuchung möglicher Summanden, daß Λ_3^9 damit unzerlegbar ist.

Die Einschränkung auf $H(E_7)$ zeigt, daß

$$\Lambda_5^9 - \Lambda_{10}^9 \text{ und } \Lambda_4^9 - \Lambda_8^9 - \Lambda_{12}^9$$

nicht projektiv sind, da man für den Block 1 von $H(E_7)$ die folgenden Zerlegungen erhält:

$$2 \cdot \Psi_1 - \Psi_3 + 4 \cdot \Psi_4 + \Psi_5 + 6 \cdot \Psi_6 + 5 \cdot \Psi_7,$$

$$\Psi_2 + 2 \cdot \Psi_3 + 2 \cdot \Psi_4 - \Psi_5 + 4 \cdot \Psi_6 + \Psi_7.$$

Außerdem kann man nun mit den schon mehrfach angewendeten verfeinerten Testmethoden aus 4.6.4. die möglichen Summanden von Λ_1^9 bestimmen.

Damit sind alle überhaupt möglichen Summanden bekannt und es bleiben als

12.2.6. Offene Fragen.
i) Ist $\Lambda_1^9 - \Lambda_{12}^9$ projektiv?
ii) Ist $\Lambda_2^9 - \Lambda_{12}^9$ projektiv?
iii) Ist $\Lambda_4^9 - \Lambda_8^9$ projektiv? Ist $\Lambda_4^9 - \Lambda_{12}^9$ projektiv?
iv) Ist $\Lambda_5^9 - \Lambda_{11}^9$ projektiv? Ist $\Lambda_5^9 - \Lambda_{12}^9$ projektiv? Oder ist sogar $\Lambda_5^9 - \Lambda_{11}^9 - \Lambda_{12}^9$ projektiv?
v) Ist $\Lambda_6^9 - \Lambda_{12}^9$ projektiv?
vi) Ist $\Lambda_9^9 - \Lambda_{12}^9$ projektiv?

Die bei der neunten Basis angegebene Relation, die auf Ψ_1 von $H(E_7)$ zurückgeht, zeigt, daß noch nicht alle projektiv-unzerlegbaren Charaktere gefunden sind. Aus dieser Relation folgt, daß $\Lambda_1^9 - \Lambda_{12}^9$ oder $\Lambda_2^9 - \Lambda_{12}^9$ projektiv ist. Damit bleiben jetzt (nur) noch 144 mögliche Fälle.

12.2.7. Auf den nachfolgenden Seiten sind die oben sukzessive bestimmten Basen für Block 1 wiedergegeben.

		Λ^1_1	Λ^1_2	Λ^1_3	Λ^1_4	Λ^1_5	Λ^1_6	Λ^1_7	Λ^1_8	Λ^1_9	Λ^1_{10}	Λ^1_{11}	Λ^1_{12}
1	$(1, 0)$	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2	$(1, 120)$	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
3	$(28, 8)$	2	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
4	$(28, 68)$	2	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
5	$(35, 2)$	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
6	$(35, 74)$	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
7	$(70, 32)$	2	2	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.
8	$(50, 8)$	.	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.
9	$(50, 56)$	.	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.
10	$(84, 4)$	2	1	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.
11	$(84, 64)$	2	1	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.
12	$(168, 24)$	4	2	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.
13	$(175, 12)$	5	1	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.
14	$(175, 36)$	5	1	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.
15	$(210, 4)$	.	1	1	1	.	.	1	.	.	.	.	.
16	$(210, 52)$	.	1	1	1	.	.	1	.	.	.	.	.
17	$(420, 20)$	.	2	2	2	.	.	.	1	.	.	.	.
18	$(300, 8)$	2	2	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.
19	$(300, 44)$	2	2	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.
20	$(350, 14)$	2	3	1	1	.	.	.	.	1	.	.	.
21	$(350, 38)$	2	3	1	1	.	.	.	.	1	.	.	.
22	$(525, 12)$	7	4	1	1	1	1	.	.	1	.	.	.
23	$(525, 36)$	7	4	1	1	1	1	.	.	1	.	.	.
24	$(567, 6)$	3	3	2	1	1	.	1	.	1	.	.	.
25	$(567, 46)$	3	3	2	1	1	.	1	.	1	.	.	.
26	$(1134, 20)$	6	6	2	3	.	1	.	1	2	.	.	.
27	$(700, 16)$	2	1	2	2	1	1	1	1	.	1	.	.
28	$(700, 28)$	2	1	2	2	1	1	1	1	.	1	.	.
29	$(700, 6)$	6	4	1	2	1	1	1	.	1	.	.	.
30	$(700, 42)$	6	4	1	2	1	1	1	.	1	.	.	.
31	$(1400, 20)$	12	8	4	3	2	2	.	1	2	.	.	.
32	$(840, 14)$	4	3	2	2	1	1	.	1	1	.	.	.
33	$(840, 26)$	4	3	2	2	1	1	.	1	1	.	.	.
34	$(1680, 22)$	8	6	4	4	2	2	2	1	2	1	.	.
35	$(972, 12)$	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	.	.
36	$(972, 32)$	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	.	.
37	$(1050, 10)$	4	4	3	3	1	1	1	1	1	1	.	.
38	$(1050, 34)$	4	4	3	3	1	1	1	1	1	1	.	.
39	$(2100, 20)$	8	8	6	6	2	2	2	2	2	1	.	.
43	$(1400, 8)$	6	7	4	4	1	1	1	1	2	.	.	.
44	$(1400, 32)$	6	7	4	4	1	1	1	1	2	.	.	.
45	$(1575, 10)$	7	5	3	2	2	1	1	.	1	.	1	.
46	$(1575, 34)$	7	5	3	2	2	1	1	.	1	.	1	.
47	$(3150, 18)$	14	10	4	5	2	3	.	1	2	.	.	1
48	$(2100, 16)$	4	5	5	4	2	1	2	1	1	1	1	.
49	$(2100, 28)$	4	5	5	4	2	1	2	1	1	1	1	.
50	$(4200, 18)$	8	10	8	9	2	3	2	3	2	2	.	1
54	$(2268, 10)$	8	8	5	4	2	1	1	1	2	.	1	.
55	$(2268, 30)$	8	8	5	4	2	1	1	1	2	.	1	.
56	$(4536, 18)$	16	16	8	9	2	3	2	2	4	1	.	1
57	$(2835, 14)$	7	7	4	5	1	2	1	1	1	1	.	1
58	$(2835, 22)$	7	7	4	5	1	2	1	1	1	1	.	1
59	$(5670, 18)$	14	14	10	9	4	3	2	2	2	1	2	1
64	$(4200, 12)$	14	11	6	6	3	3	1	1	2	1	1	1
65	$(4200, 24)$	14	11	6	6	3	3	1	1	2	1	1	1
66	$(6075, 14)$	17	17	11	11	4	4	3	3	4	2	1	1
67	$(6075, 22)$	17	17	11	11	4	4	3	3	4	2	1	1
68	$(8, 1)$	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
69	$(8, 91)$	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
70	$(56, 19)$	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.
71	$(56, 49)$	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.
79	$(448, 9)$	6	2	.	.	1	1	.	.	1	.	.	.
80	$(448, 39)$	6	2	.	.	1	1	.	.	1	.	.	.
81	$(560, 5)$	2	4	2	2	.	.	1	.	1	.	.	.
82	$(560, 47)$	2	4	2	2	.	.	1	.	1	.	.	.
84	$(840, 13)$	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	1	.
85	$(840, 31)$	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	1	.
86	$(1008, 9)$	8	6	2	2	1	1	1	.	2	.	.	.
87	$(1008, 39)$	8	6	2	2	1	1	1	.	2	.	.	.
91	$(1400, 11)$	2	4	5	4	1	1	1	2	1	1	.	.
92	$(1400, 29)$	2	4	5	4	1	1	1	2	1	1	.	.
93	$(1400, 7)$	2	4	3	2	1	.	1	.	1	.	1	.
94	$(1400, 37)$	2	4	3	2	1	.	1	.	1	.	1	.
95	$(2400, 17)$	10	10	6	6	2	2	2	2	3	1	.	.
96	$(2400, 23)$	10	10	6	6	2	2	2	2	3	1	.	.
100	$(3240, 9)$	10	10	7	6	3	2	2	2	3	1	1	.
101	$(3240, 31)$	10	10	7	6	3	2	2	2	3	1	1	.
107	$(4200, 15)$	18	14	7	8	3	4	1	2	3	1	.	1
108	$(4200, 21)$	18	14	7	8	3	4	1	2	3	1	.	1
109	$(4536, 13)$	12	12	7	8	2	3	1	2	2	1	1	1
110	$(4536, 23)$	12	12	7	8	2	3	1	2	2	1	1	1
111	$(5600, 15)$	20	18	10	10	4	4	2	2	4	1	1	1
112	$(5600, 21)$	20	18	10	10	4	4	2	2	4	1	1	1
Ψ_8		.	.	.	.	.	.	2	.	.	-2	.	.
Ψ_7		.	.	.	.	.	.	.	2	.	-2	1	4

		Λ^2_1	Λ^2_2	Λ^2_3	Λ^2_4	Λ^2_5	Λ^2_6	Λ^2_7	Λ^2_8	Λ^2_9	Λ^2_{10}	Λ^2_{11}	Λ^2_{12}
1	(1, 0)	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2	(1, 120)	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
3	(28, 8)	2	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
4	(28, 68)	2	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
5	(35, 2)	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
6	(35, 74)	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
7	(70, 32)	2	2	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.
8	(50, 8)	.	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.
9	(50, 56)	.	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.
10	(84, 4)	2	1	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.
11	(84, 64)	2	1	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.
12	(168, 24)	4	2	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.
13	(175, 12)	5	1	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.
14	(175, 36)	5	1	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.
15	(210, 4)	.	1	1	1	.	.	1	.	.	.	.	.
16	(210, 52)	.	1	1	1	.	.	1	.	.	.	.	.
17	(420, 20)	.	2	2	2	.	.	.	1	.	.	.	.
18	(300, 8)	2	2	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.
19	(300, 44)	2	2	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.
20	(350, 14)	2	3	1	1	.	.	.	.	1	.	.	.
21	(350, 38)	2	3	1	1	.	.	.	.	1	.	.	.
22	(525, 12)	7	4	1	1	1	1	.	.	1	.	.	.
23	(525, 36)	7	4	1	1	1	1	.	.	1	.	.	.
24	(567, 6)	3	3	2	1	1	.	1	.	1	.	.	.
25	(567, 46)	3	3	2	1	1	.	1	.	1	.	.	.
26	(1134, 20)	6	6	2	3	.	1	.	1	2	.	.	.
27	(700, 16)	2	1	2	2	1	1	.	.	.	1	.	.
28	(700, 28)	2	1	2	2	1	1	.	.	.	1	.	.
29	(700, 6)	6	4	1	2	1	1	1	.	1	.	.	.
30	(700, 42)	6	4	1	2	1	1	1	.	1	.	.	.
31	(1400, 20)	12	8	4	3	2	2	.	1	2	.	.	.
32	(840, 14)	4	3	2	2	1	1	.	1	1	.	.	.
33	(840, 26)	4	3	2	2	1	1	.	1	1	.	.	.
34	(1680, 22)	8	6	4	4	2	2	1	.	2	1	.	.
35	(972, 12)	2	2	2	2	1	1	.	.	1	1	.	.
36	(972, 32)	2	2	2	2	1	1	.	.	1	1	.	.
37	(1050, 10)	4	4	3	3	1	1	.	.	1	1	.	.
38	(1050, 34)	4	4	3	3	1	1	.	.	1	1	.	.
39	(2100, 20)	8	8	6	6	2	2	1	1	2	1	.	.
43	(1400, 8)	6	7	4	4	1	1	1	1	2	.	.	.
44	(1400, 32)	6	7	4	4	1	1	1	1	2	.	.	.
45	(1575, 10)	7	5	3	2	2	1	1	.	1	.	1	.
46	(1575, 34)	7	5	3	2	2	1	1	.	1	.	1	.
47	(3150, 18)	14	10	4	5	2	3	.	1	2	.	.	1
48	(2100, 16)	4	5	5	4	2	1	1	.	1	1	1	.
49	(2100, 28)	4	5	5	4	2	1	1	.	1	1	1	.
50	(4200, 18)	8	10	8	9	2	3	.	1	2	2	.	1
54	(2268, 10)	8	8	5	4	2	1	1	1	2	.	1	.
55	(2268, 30)	8	8	5	4	2	1	1	1	2	.	1	.
56	(4536, 18)	16	16	8	9	2	3	1	1	4	1	.	1
57	(2835, 14)	7	7	4	5	1	2	.	.	1	1	.	1
58	(2835, 22)	7	7	4	5	1	2	.	.	1	1	.	1
59	(5670, 18)	14	14	10	9	4	3	1	1	2	1	2	1
64	(4200, 12)	14	11	6	6	3	3	.	.	2	1	1	1
65	(4200, 24)	14	11	6	6	3	3	.	.	2	1	1	1
66	(6075, 14)	17	17	11	11	4	4	1	1	4	2	1	1
67	(6075, 22)	17	17	11	11	4	4	1	1	4	2	1	1
68	(8, 1)	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
69	(8, 91)	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
70	(56, 19)	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.
71	(56, 49)	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.
79	(448, 9)	6	2	.	.	1	1	.	.	1	.	.	.
80	(448, 39)	6	2	.	.	1	1	.	.	1	.	.	.
81	(560, 5)	2	4	2	2	.	.	1	.	1	.	.	.
82	(560, 47)	2	4	2	2	.	.	1	.	1	.	.	.
84	(840, 13)	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	1	.
85	(840, 31)	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	1	.
86	(1008, 9)	8	6	2	2	1	1	1	.	2	.	.	.
87	(1008, 39)	8	6	2	2	1	1	1	.	2	.	.	.
91	(1400, 11)	2	4	5	4	1	1	.	1	1	1	.	.
92	(1400, 29)	2	4	5	4	1	1	.	1	1	1	.	.
93	(1400, 7)	2	4	3	2	1	.	1	.	1	.	1	.
94	(1400, 37)	2	4	3	2	1	.	1	.	1	.	1	.
95	(2400, 17)	10	10	6	6	2	2	1	1	3	1	.	.
96	(2400, 23)	10	10	6	6	2	2	1	1	3	1	.	.
100	(3240, 9)	10	10	7	6	3	2	1	1	3	1	1	.
101	(3240, 31)	10	10	7	6	3	2	1	1	3	1	1	.
107	(4200, 15)	18	14	7	8	3	4	.	1	3	1	.	1
108	(4200, 21)	18	14	7	8	3	4	.	1	3	1	.	1
109	(4536, 13)	12	12	7	8	2	3	.	1	2	1	1	1
110	(4536, 23)	12	12	7	8	2	3	.	1	2	1	1	1
111	(5600, 15)	20	18	10	10	4	4	1	1	4	1	1	1
112	(5600, 21)	20	18	10	10	4	4	1	1	4	1	1	1
Ψ_3		.	.	.	2	1	.	-2	-2	.	-2	1	-4

		Λ^3_1	Λ^3_2	Λ^3_3	Λ^3_4	Λ^3_5	Λ^3_6	Λ^3_7	Λ^3_8	Λ^3_9	Λ^3_{10}	Λ^3_{11}	Λ^3_{12}
1	(1, 0)	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2	(1, 120)	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
3	(28, 8)	2	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
4	(28, 68)	2	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
5	(35, 2)	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
6	(35, 74)	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
7	(70, 32)	2	2	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.
8	(50, 8)	.	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.
9	(50, 56)	.	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.
10	(84, 4)	2	1	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.
11	(84, 64)	2	1	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.
12	(168, 24)	4	2	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.
13	(175, 12)	5	1	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.
14	(175, 36)	5	1	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.
15	(210, 4)	.	1	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.
16	(210, 52)	.	1	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.
17	(420, 20)	.	2	2	1	.	.	.	1	.	.	.	.
18	(300, 8)	2	2	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.
19	(300, 44)	2	2	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.
20	(350, 14)	2	3	1	1	.	.	.	.	1	.	.	.
21	(350, 38)	2	3	1	1	.	.	.	.	1	.	.	.
22	(525, 12)	7	4	1	1	1	1	.	.	1	.	.	.
23	(525, 36)	7	4	1	1	1	1	.	.	1	.	.	.
24	(567, 6)	3	3	2	.	1	.	1	.	1	.	.	.
25	(567, 46)	3	3	2	.	1	.	1	.	1	.	.	.
26	(1134, 20)	6	6	2	2	.	1	.	1	2	.	.	.
27	(700, 16)	2	1	2	1	1	1	.	.	.	1	.	.
28	(700, 28)	2	1	2	1	1	1	.	.	.	1	.	.
29	(700, 6)	6	4	1	1	1	1	1	.	1	.	.	.
30	(700, 42)	6	4	1	1	1	1	1	.	1	.	.	.
31	(1400, 20)	12	8	4	2	2	2	.	1	2	.	.	.
32	(840, 14)	4	3	2	1	1	1	.	1	1	.	.	.
33	(840, 26)	4	3	2	1	1	1	.	1	1	.	.	.
34	(1680, 22)	8	6	4	2	2	2	1	.	2	1	.	.
35	(972, 12)	2	2	2	1	1	1	.	.	1	1	.	.
36	(972, 32)	2	2	2	1	1	1	.	.	1	1	.	.
37	(1050, 10)	4	4	3	2	1	1	.	.	1	1	.	.
38	(1050, 34)	4	4	3	2	1	1	.	.	1	1	.	.
39	(2100, 20)	8	8	6	3	2	2	1	1	2	1	.	.
43	(1400, 8)	6	7	4	2	1	1	1	1	2	.	.	.
44	(1400, 32)	6	7	4	2	1	1	1	1	2	.	.	.
45	(1575, 10)	7	5	3	1	2	1	1	.	1	.	1	.
46	(1575, 34)	7	5	3	1	2	1	1	.	1	.	1	.
47	(3150, 18)	14	10	4	2	2	3	.	1	2	.	.	1
48	(2100, 16)	4	5	5	2	2	1	1	.	1	1	1	.
49	(2100, 28)	4	5	5	2	2	1	1	.	1	1	1	.
50	(4200, 18)	8	10	8	4	2	3	.	1	2	2	.	1
54	(2268, 10)	8	8	5	2	2	1	1	1	2	.	1	.
55	(2268, 30)	8	8	5	2	2	1	1	1	2	.	1	.
56	(4536, 18)	16	16	8	4	2	3	1	1	4	1	.	1
57	(2835, 14)	7	7	4	2	1	2	.	.	1	1	.	1
58	(2835, 22)	7	7	4	2	1	2	.	.	1	1	.	1
59	(5670, 18)	14	14	10	4	4	3	1	1	2	1	2	1
64	(4200, 12)	14	11	6	3	3	3	.	.	2	1	1	1
65	(4200, 24)	14	11	6	3	3	3	.	.	2	1	1	1
66	(6075, 14)	17	17	11	5	4	4	1	1	4	2	1	1
67	(6075, 22)	17	17	11	5	4	4	1	1	4	2	1	1
68	(8, 1)	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
69	(8, 91)	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
70	(56, 19)	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.
71	(56, 49)	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.
79	(448, 9)	6	2	.	.	1	1	.	.	1	.	.	.
80	(448, 39)	6	2	.	.	1	1	.	.	1	.	.	.
81	(560, 5)	2	4	2	1	.	.	1	.	1	.	.	.
82	(560, 47)	2	4	2	1	.	.	1	.	1	.	.	.
84	(840, 13)	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	1	.
85	(840, 31)	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	1	.
86	(1008, 9)	8	6	2	1	1	1	1	.	2	.	.	.
87	(1008, 39)	8	6	2	1	1	1	1	.	2	.	.	.
91	(1400, 11)	2	4	5	2	1	1	.	1	1	1	.	.
92	(1400, 29)	2	4	5	2	1	1	.	1	1	1	.	.
93	(1400, 7)	2	4	3	1	1	.	1	.	1	.	1	.
94	(1400, 37)	2	4	3	1	1	.	1	.	1	.	1	.
95	(2400, 17)	10	10	6	3	2	2	1	1	3	1	.	.
96	(2400, 23)	10	10	6	3	2	2	1	1	3	1	.	.
100	(3240, 9)	10	10	7	3	3	2	1	1	3	1	1	.
101	(3240, 31)	10	10	7	3	3	2	1	1	3	1	1	.
107	(4200, 15)	18	14	7	4	3	4	.	1	3	1	.	1
108	(4200, 21)	18	14	7	4	3	4	.	1	3	1	.	1
109	(4536, 13)	12	12	7	4	2	3	.	1	2	1	1	1
110	(4536, 23)	12	12	7	4	2	3	.	1	2	1	1	1
111	(5600, 15)	20	18	10	5	4	4	1	1	4	1	1	1
112	(5600, 21)	20	18	10	5	4	4	1	1	4	1	1	1
Ψ_1		1	.	2	.	.	-4	.	-4	.	.	.	-4
Ψ_2		.	2	1	-2	1	-2	.	-4	1	.	4	-6

		Λ^4_1	Λ^4_2	Λ^4_3	Λ^4_4	Λ^4_5	Λ^4_6	Λ^4_7	Λ^4_8	Λ^4_9	Λ^4_{10}	Λ^4_{11}	Λ^4_{12}
1	$(1, 0)$	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2	$(1, 120)$	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
3	$(28, 8)$	2	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
4	$(28, 68)$	2	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
5	$(35, 2)$	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
6	$(35, 74)$	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
7	$(70, 32)$	2	2	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.
8	$(50, 8)$	.	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.
9	$(50, 56)$	.	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.
10	$(84, 4)$	2	1	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.
11	$(84, 64)$	2	1	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.
12	$(168, 24)$	4	2	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.
13	$(175, 12)$	5	1	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.
14	$(175, 36)$	5	1	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.
15	$(210, 4)$	.	1	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.
16	$(210, 52)$	.	1	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.
17	$(420, 20)$	.	1	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.
18	$(300, 8)$	2	2	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.
19	$(300, 44)$	2	2	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.
20	$(350, 14)$	2	3	1	1	.	.	.	.	1	.	.	.
21	$(350, 38)$	2	3	1	1	.	.	.	.	1	.	.	.
22	$(525, 12)$	7	4	1	1	1	1	.	.	1	.	.	.
23	$(525, 36)$	7	4	1	1	1	1	.	.	1	.	.	.
24	$(567, 6)$	3	3	2	.	1	.	1	.	1	.	.	.
25	$(567, 46)$	3	3	2	.	1	.	1	.	1	.	.	.
26	$(1134, 20)$	6	5	.	2	.	1	.	1	2	.	.	.
27	$(700, 16)$	2	1	2	1	1	1	.	.	.	1	.	.
28	$(700, 28)$	2	1	2	1	1	1	.	.	.	1	.	.
29	$(700, 6)$	6	4	1	1	1	1	1	.	1	.	.	.
30	$(700, 42)$	6	4	1	1	1	1	1	.	1	.	.	.
31	$(1400, 20)$	12	7	2	2	2	2	.	1	2	.	.	.
32	$(840, 14)$	4	2	.	1	1	1	.	1	1	.	.	.
33	$(840, 26)$	4	2	.	1	1	1	.	1	1	.	.	.
34	$(1680, 22)$	8	6	4	2	2	2	1	.	2	1	.	.
35	$(972, 12)$	2	2	2	1	1	1	.	.	1	1	.	.
36	$(972, 32)$	2	2	2	1	1	1	.	.	1	1	.	.
37	$(1050, 10)$	4	4	3	2	1	1	.	.	1	1	.	.
38	$(1050, 34)$	4	4	3	2	1	1	.	.	1	1	.	.
39	$(2100, 20)$	8	7	4	3	2	2	1	1	2	1	.	.
43	$(1400, 8)$	6	6	2	2	1	1	1	1	2	.	.	.
44	$(1400, 32)$	6	6	2	2	1	1	1	1	2	.	.	.
45	$(1575, 10)$	7	5	3	1	2	1	1	.	1	.	1	.
46	$(1575, 34)$	7	5	3	1	2	1	1	.	1	.	1	.
47	$(3150, 18)$	14	9	2	2	2	3	.	1	2	.	.	1
48	$(2100, 16)$	4	5	5	2	2	1	1	.	1	1	1	.
49	$(2100, 28)$	4	5	5	2	2	1	1	.	1	1	1	.
50	$(4200, 18)$	8	9	6	4	2	3	.	1	2	2	.	1
54	$(2268, 10)$	8	7	3	2	2	1	1	1	2	.	1	.
55	$(2268, 30)$	8	7	3	2	2	1	1	1	2	.	1	.
56	$(4536, 18)$	16	15	6	4	2	3	1	1	4	1	.	1
57	$(2835, 14)$	7	7	4	2	1	2	.	.	1	1	.	1
58	$(2835, 22)$	7	7	4	2	1	2	.	.	1	1	.	1
59	$(5670, 18)$	14	13	8	4	4	3	1	1	2	1	2	1
64	$(4200, 12)$	14	11	6	3	3	3	.	.	2	1	1	1
65	$(4200, 24)$	14	11	6	3	3	3	.	.	2	1	1	1
66	$(6075, 14)$	17	16	9	5	4	4	1	1	4	2	1	1
67	$(6075, 22)$	17	16	9	5	4	4	1	1	4	2	1	1
68	$(8, 1)$	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
69	$(8, 91)$	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
70	$(56, 19)$	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.
71	$(56, 49)$	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.
79	$(448, 9)$	6	2	.	.	1	1	.	.	1	.	.	.
80	$(448, 39)$	6	2	.	.	1	1	.	.	1	.	.	.
81	$(560, 5)$	2	4	2	1	.	.	1	.	1	.	.	.
82	$(560, 47)$	2	4	2	1	.	.	1	.	1	.	.	.
84	$(840, 13)$	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	1	.
85	$(840, 31)$	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	1	.
86	$(1008, 9)$	8	6	2	1	1	1	1	.	2	.	.	.
87	$(1008, 39)$	8	6	2	1	1	1	1	.	2	.	.	.
91	$(1400, 11)$	2	3	3	2	1	1	.	1	1	1	.	.
92	$(1400, 29)$	2	3	3	2	1	1	.	1	1	1	.	.
93	$(1400, 7)$	2	4	3	1	1	.	1	.	1	.	1	.
94	$(1400, 37)$	2	4	3	1	1	.	1	.	1	.	1	.
95	$(2400, 17)$	10	9	4	3	2	2	1	1	3	1	.	.
96	$(2400, 23)$	10	9	4	3	2	2	1	1	3	1	.	.
100	$(3240, 9)$	10	9	5	3	3	2	1	1	3	1	1	.
101	$(3240, 31)$	10	9	5	3	3	2	1	1	3	1	1	.
107	$(4200, 15)$	18	13	5	4	3	4	.	1	3	1	.	1
108	$(4200, 21)$	18	13	5	4	3	4	.	1	3	1	.	1
109	$(4536, 13)$	12	11	5	4	2	3	.	1	2	1	1	1
110	$(4536, 23)$	12	11	5	4	2	3	.	1	2	1	1	1
111	$(5600, 15)$	20	17	8	5	4	4	1	1	4	1	1	1
112	$(5600, 21)$	20	17	8	5	4	4	1	1	4	1	1	1
Ψ_1		1	.	2	.	.	-4	.	.	.	.	.	-4
Ψ_2		.	2	1	-2	1	-2	.	.	1	.	4	-6

		Λ^5_1	Λ^5_2	Λ^5_3	Λ^5_4	Λ^5_5	Λ^5_6	Λ^5_7	Λ^5_8	Λ^5_9	Λ^5_{10}	Λ^5_{11}	Λ^5_{12}	Δ
1	$(1,0)$	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2	$(1,120)$	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
3	$(28,8)$	2	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
4	$(28,68)$	2	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
5	$(35,2)$	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
6	$(35,74)$	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
7	$(70,32)$	2	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1
8	$(50,8)$	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
9	$(50,56)$	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
10	$(84,4)$	2	1	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.
11	$(84,64)$	2	1	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.
12	$(168,24)$	4	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.
13	$(175,12)$	5	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.
14	$(175,36)$	5	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.
15	$(210,4)$	.	1	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.
16	$(210,52)$	.	1	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.
17	$(420,20)$	.	1	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.
18	$(300,8)$	2	2	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	1
19	$(300,44)$	2	2	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	1
20	$(350,14)$	2	2	1	1	.	.	.	.	1	.	.	.	.
21	$(350,38)$	2	2	1	1	.	.	.	.	1	.	.	.	.
22	$(525,12)$	7	2	1	1	1	1	.	.	1	.	.	.	1
23	$(525,36)$	7	2	1	1	1	1	.	.	1	.	.	.	1
24	$(567,6)$	3	3	2	.	1	.	1	.	1	.	.	.	1
25	$(567,46)$	3	3	2	.	1	.	1	.	1	.	.	.	1
26	$(1134,20)$	6	3	.	2	.	1	.	1	2	.	.	.	1
27	$(700,16)$	2	1	1	1	1	.	.	.	.	1	.	.	.
28	$(700,28)$	2	1	1	1	1	.	.	.	.	1	.	.	.
29	$(700,6)$	6	2	1	1	1	1	1	.	1	.	.	.	1
30	$(700,42)$	6	2	1	1	1	1	1	.	1	.	.	.	1
31	$(1400,20)$	12	4	2	2	2	2	.	1	2	.	.	.	.
32	$(840,14)$	4	1	.	1	1	1	.	1	1	.	.	.	.
33	$(840,26)$	4	1	.	1	1	1	.	1	1	.	.	.	.
34	$(1680,22)$	8	4	3	2	2	1	1	.	2	1	.	.	2
35	$(972,12)$	2	2	1	1	1	.	.	.	1	1	.	.	1
36	$(972,32)$	2	2	1	1	1	.	.	.	1	1	.	.	1
37	$(1050,10)$	4	3	2	2	1	.	.	.	1	1	.	.	1
38	$(1050,34)$	4	3	2	2	1	.	.	.	1	1	.	.	1
39	$(2100,20)$	8	5	3	3	2	1	1	1	2	1	.	.	1
43	$(1400,8)$	6	4	2	2	1	1	1	1	2	.	.	.	1
44	$(1400,32)$	6	4	2	2	1	1	1	1	2	.	.	.	1
45	$(1575,10)$	7	3	3	1	2	1	1	.	1	.	1	.	1
46	$(1575,34)$	7	3	3	1	2	1	1	.	1	.	1	.	1
47	$(3150,18)$	14	8	2	2	2	3	.	1	2	.	.	1	.
48	$(2100,16)$	4	4	4	2	2	.	1	.	1	1	1	.	1
49	$(2100,28)$	4	4	4	2	2	.	1	.	1	1	1	.	1
50	$(4200,18)$	8	10	4	4	2	1	.	1	2	2	.	1	2
54	$(2268,10)$	8	5	3	2	2	1	1	1	2	.	1	.	1
55	$(2268,30)$	8	5	3	2	2	1	1	1	2	.	1	.	1
56	$(4536,18)$	16	14	5	4	2	2	1	1	4	1	.	1	3
57	$(2835,14)$	7	8	3	2	1	1	.	.	1	1	.	1	1
58	$(2835,22)$	7	8	3	2	1	1	.	.	1	1	.	1	1
59	$(5670,18)$	14	12	7	4	4	2	1	1	2	1	2	1	1
64	$(4200,12)$	14	10	5	3	3	2	.	.	2	1	1	1	1
65	$(4200,24)$	14	10	5	3	3	2	.	.	2	1	1	1	1
66	$(6075,14)$	17	15	7	5	4	2	1	1	4	2	1	1	3
67	$(6075,22)$	17	15	7	5	4	2	1	1	4	2	1	1	3
68	$(8,1)$	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
69	$(8,91)$	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
70	$(56,19)$	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.
71	$(56,49)$	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.
79	$(448,9)$	6	1	.	.	1	1	.	.	1	.	.	.	1
80	$(448,39)$	6	1	.	.	1	1	.	.	1	.	.	.	1
81	$(560,5)$	2	3	2	1	.	.	1	.	1	.	.	.	1
82	$(560,47)$	2	3	2	1	.	.	1	.	1	.	.	.	1
84	$(840,13)$	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	1	.	.
85	$(840,31)$	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	1	.	.
86	$(1008,9)$	8	4	2	1	1	1	1	.	2	.	.	.	2
87	$(1008,39)$	8	4	2	1	1	1	1	.	2	.	.	.	2
91	$(1400,11)$	2	3	2	2	1	.	.	1	1	1	.	.	1
92	$(1400,29)$	2	3	2	2	1	.	.	1	1	1	.	.	1
93	$(1400,7)$	2	3	3	1	1	.	1	.	1	.	1	.	.
94	$(1400,37)$	2	3	3	1	1	.	1	.	1	.	1	.	.
95	$(2400,17)$	10	7	3	3	2	1	1	1	3	1	.	.	2
96	$(2400,23)$	10	7	3	3	2	1	1	1	3	1	.	.	2
100	$(3240,9)$	10	7	4	3	3	1	1	1	3	1	1	.	2
101	$(3240,31)$	10	7	4	3	3	1	1	1	3	1	1	.	2
107	$(4200,15)$	18	11	4	4	3	3	.	1	3	1	.	1	2
108	$(4200,21)$	18	11	4	4	3	3	.	1	3	1	.	1	2
109	$(4536,13)$	12	10	4	4	2	2	.	1	2	1	1	1	1
110	$(4536,23)$	12	10	4	4	2	2	.	1	2	1	1	1	1
111	$(5600,15)$	20	14	7	5	4	3	1	1	4	1	1	1	3
112	$(5600,21)$	20	14	7	5	4	3	1	1	4	1	1	1	3

		Λ^6_1	Λ^6_2	Λ^6_3	Λ^6_4	Λ^6_5	Λ^6_6	Λ^6_7	Λ^6_8	Λ^6_9	Λ^6_{10}	Λ^6_{11}	Λ^6_{12}
1	(1, 0)	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2	(1, 120)	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
3	(28, 8)	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
4	(28, 68)	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
5	(35, 2)	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
6	(35, 74)	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
7	(70, 32)	1	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.
8	(50, 8)	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.
9	(50, 56)	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.
10	(84, 4)	1	1	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.
11	(84, 64)	1	1	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.
12	(168, 24)	4	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.
13	(175, 12)	5	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.
14	(175, 36)	5	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.
15	(210, 4)	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.
16	(210, 52)	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.
17	(420, 20)	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.
18	(300, 8)	.	2	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.
19	(300, 44)	.	2	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.
20	(350, 14)	.	2	1	1	.	.	.	.	1	.	.	.
21	(350, 38)	.	2	1	1	.	.	.	.	1	.	.	.
22	(525, 12)	5	2	1	1	1	1	.	.	1	.	.	.
23	(525, 36)	5	2	1	1	1	1	.	.	1	.	.	.
24	(567, 6)	1	2	2	.	1	.	1	.	1	.	.	.
25	(567, 46)	1	2	2	.	1	.	1	.	1	.	.	.
26	(1134, 20)	4	2	.	2	.	1	.	1	2	.	.	.
27	(700, 16)	2	1	1	1	1	.	.	.	.	1	.	.
28	(700, 28)	2	1	1	1	1	.	.	.	.	1	.	.
29	(700, 6)	5	1	1	1	1	1	1	.	1	.	.	.
30	(700, 42)	5	1	1	1	1	1	1	.	1	.	.	.
31	(1400, 20)	9	3	2	2	2	2	.	1	2	.	.	.
32	(840, 14)	4	.	.	1	1	1	.	1	1	.	.	.
33	(840, 26)	4	.	.	1	1	1	.	1	1	.	.	.
34	(1680, 22)	6	3	3	2	2	1	1	.	2	1	.	.
35	(972, 12)	1	2	1	1	1	.	.	.	1	1	.	.
36	(972, 32)	1	2	1	1	1	.	.	.	1	1	.	.
37	(1050, 10)	2	3	2	2	1	.	.	.	1	1	.	.
38	(1050, 34)	2	3	2	2	1	.	.	.	1	1	.	.
39	(2100, 20)	6	3	3	3	2	1	1	1	2	1	.	.
43	(1400, 8)	4	2	2	2	1	1	1	1	2	.	.	.
44	(1400, 32)	4	2	2	2	1	1	1	1	2	.	.	.
45	(1575, 10)	5	2	3	1	2	1	1	.	1	.	1	.
46	(1575, 34)	5	2	3	1	2	1	1	.	1	.	1	.
47	(3150, 18)	15	7	2	2	2	3	.	1	2	.	.	1
48	(2100, 16)	2	3	4	2	2	.	1	.	1	1	1	.
49	(2100, 28)	2	3	4	2	2	.	1	.	1	1	1	.
50	(4200, 18)	9	9	4	4	2	1	.	1	2	2	.	1
54	(2268, 10)	5	3	3	2	2	1	1	1	2	.	1	.
55	(2268, 30)	5	3	3	2	2	1	1	1	2	.	1	.
56	(4536, 18)	13	12	5	4	2	2	1	1	4	1	.	1
57	(2835, 14)	8	8	3	2	1	1	.	.	1	1	.	1
58	(2835, 22)	8	8	3	2	1	1	.	.	1	1	.	1
59	(5670, 18)	13	10	7	4	4	2	1	1	2	1	2	1
64	(4200, 12)	13	10	5	3	3	2	.	.	2	1	1	1
65	(4200, 24)	13	10	5	3	3	2	.	.	2	1	1	1
66	(6075, 14)	14	13	7	5	4	2	1	1	4	2	1	1
67	(6075, 22)	14	13	7	5	4	2	1	1	4	2	1	1
68	(8, 1)	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
69	(8, 91)	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
70	(56, 19)	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.
71	(56, 49)	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.
79	(448, 9)	5	1	.	.	1	1	.	.	1	.	.	.
80	(448, 39)	5	1	.	.	1	1	.	.	1	.	.	.
81	(560, 5)	.	2	2	1	.	.	1	.	1	.	.	.
82	(560, 47)	.	2	2	1	.	.	1	.	1	.	.	.
84	(840, 13)	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	1	.
85	(840, 31)	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	1	.
86	(1008, 9)	5	3	2	1	1	1	1	.	2	.	.	.
87	(1008, 39)	5	3	2	1	1	1	1	.	2	.	.	.
91	(1400, 11)	1	2	2	2	1	.	.	1	1	1	.	.
92	(1400, 29)	1	2	2	2	1	.	.	1	1	1	.	.
93	(1400, 7)	.	2	3	1	1	.	1	.	1	.	1	.
94	(1400, 37)	.	2	3	1	1	.	1	.	1	.	1	.
95	(2400, 17)	6	5	3	3	2	1	1	1	3	1	.	.
96	(2400, 23)	6	5	3	3	2	1	1	1	3	1	.	.
100	(3240, 9)	6	5	4	3	3	1	1	1	3	1	1	.
101	(3240, 31)	6	5	4	3	3	1	1	1	3	1	1	.
107	(4200, 15)	17	10	4	4	3	3	.	1	3	1	.	1
108	(4200, 21)	17	10	4	4	3	3	.	1	3	1	.	1
109	(4536, 13)	12	9	4	4	2	2	.	1	2	1	1	1
110	(4536, 23)	12	9	4	4	2	2	.	1	2	1	1	1
111	(5600, 15)	17	12	7	5	4	3	1	1	4	1	1	1
112	(5600, 21)	17	12	7	5	4	3	1	1	4	1	1	1
Ψ_1		1	1	2	.	.	−4	.	.	.	−3	.	−12
Ψ_2		.	2	1	.	1	.	2	.	1	−3	4	−12

		Λ^7_1	Λ^7_2	Λ^7_3	Λ^7_4	Λ^7_5	Λ^7_6	Λ^7_7	Λ^7_8	Λ^7_9	Λ^7_{10}	Λ^7_{11}	Λ^7_{12}
1	$(1,0)$	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2	$(1,120)$	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
3	$(28,8)$	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
4	$(28,68)$	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
5	$(35,2)$	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
6	$(35,74)$	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
7	$(70,32)$	1	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.
8	$(50,8)$	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.
9	$(50,56)$	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.
10	$(84,4)$	1	1	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.
11	$(84,64)$	1	1	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.
12	$(168,24)$	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.
13	$(175,12)$	1	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.
14	$(175,36)$	1	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.
15	$(210,4)$	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.
16	$(210,52)$	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.
17	$(420,20)$	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.
18	$(300,8)$	.	2	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.
19	$(300,44)$	.	2	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.
20	$(350,14)$	.	2	1	1	.	.	.	.	1	.	.	.
21	$(350,38)$	.	2	1	1	.	.	.	.	1	.	.	.
22	$(525,12)$	1	2	1	1	1	1	.	.	1	.	.	.
23	$(525,36)$	1	2	1	1	1	1	.	.	1	.	.	.
24	$(567,6)$	1	2	2	.	1	.	1	.	1	.	.	.
25	$(567,46)$	1	2	2	.	1	.	1	.	1	.	.	.
26	$(1134,20)$	.	2	.	2	.	1	.	1	2	.	.	.
27	$(700,16)$	2	.	1	1	1	.	.	.	.	1	.	.
28	$(700,28)$	2	.	1	1	1	.	.	.	.	1	.	.
29	$(700,6)$	1	1	1	1	1	1	1	.	1	.	.	.
30	$(700,42)$	1	1	1	1	1	1	1	.	1	.	.	.
31	$(1400,20)$	1	3	2	2	2	2	.	1	2	.	.	.
32	$(840,14)$	.	.	.	1	1	1	.	1	1	.	.	.
33	$(840,26)$	.	.	.	1	1	1	.	1	1	.	.	.
34	$(1680,22)$	2	2	3	2	2	1	1	.	2	1	.	.
35	$(972,12)$	1	1	1	1	1	.	.	.	1	1	.	.
36	$(972,32)$	1	1	1	1	1	.	.	.	1	1	.	.
37	$(1050,10)$	2	2	2	2	1	.	.	.	1	1	.	.
38	$(1050,34)$	2	2	2	2	1	.	.	.	1	1	.	.
39	$(2100,20)$	2	2	3	3	2	1	1	1	2	1	.	.
43	$(1400,8)$	.	2	2	2	1	1	1	1	2	.	.	.
44	$(1400,32)$	.	2	2	2	1	1	1	1	2	.	.	.
45	$(1575,10)$	1	2	3	1	2	1	1	.	1	.	1	.
46	$(1575,34)$	1	2	3	1	2	1	1	.	1	.	1	.
47	$(3150,18)$	7	7	2	2	2	3	.	1	2	.	.	1
48	$(2100,16)$	2	2	4	2	2	.	1	.	1	1	1	.
49	$(2100,28)$	2	2	4	2	2	.	1	.	1	1	1	.
50	$(4200,18)$	9	7	4	4	2	1	.	1	2	2	.	1
54	$(2268,10)$	1	3	3	2	2	1	1	1	2	.	1	.
55	$(2268,30)$	1	3	3	2	2	1	1	1	2	.	1	.
56	$(4536,18)$	9	11	5	4	2	2	1	1	4	1	.	1
57	$(2835,14)$	8	7	3	2	1	1	.	.	1	1	.	1
58	$(2835,22)$	8	7	3	2	1	1	.	.	1	1	.	1
59	$(5670,18)$	9	9	7	4	4	2	1	1	2	1	2	1
64	$(4200,12)$	9	9	5	3	3	2	.	.	2	1	1	1
65	$(4200,24)$	9	9	5	3	3	2	.	.	2	1	1	1
66	$(6075,14)$	10	11	7	5	4	2	1	1	4	2	1	1
67	$(6075,22)$	10	11	7	5	4	2	1	1	4	2	1	1
68	$(8,1)$	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
69	$(8,91)$	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
70	$(56,19)$	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.
71	$(56,49)$	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.
79	$(448,9)$	1	1	.	.	1	1	.	.	1	.	.	.
80	$(448,39)$	1	1	.	.	1	1	.	.	1	.	.	.
81	$(560,5)$	.	2	2	1	.	.	1	.	1	.	.	.
82	$(560,47)$	.	2	2	1	.	.	1	.	1	.	.	.
84	$(840,13)$	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	1	.
85	$(840,31)$	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	1	.
86	$(1008,9)$	1	3	2	1	1	1	1	.	2	.	.	.
87	$(1008,39)$	1	3	2	1	1	1	1	.	2	.	.	.
91	$(1400,11)$	1	1	2	2	1	.	.	1	1	1	.	.
92	$(1400,29)$	1	1	2	2	1	.	.	1	1	1	.	.
93	$(1400,7)$	.	2	3	1	1	.	1	.	1	.	1	.
94	$(1400,37)$	.	2	3	1	1	.	1	.	1	.	1	.
95	$(2400,17)$	2	4	3	3	2	1	1	1	3	1	.	.
96	$(2400,23)$	2	4	3	3	2	1	1	1	3	1	.	.
100	$(3240,9)$	2	4	4	3	3	1	1	1	3	1	1	.
101	$(3240,31)$	2	4	4	3	3	1	1	1	3	1	1	.
107	$(4200,15)$	9	9	4	4	3	3	.	1	3	1	.	1
108	$(4200,21)$	9	9	4	4	3	3	.	1	3	1	.	1
109	$(4536,13)$	8	8	4	4	2	2	.	1	2	1	1	1
110	$(4536,23)$	8	8	4	4	2	2	.	1	2	1	1	1
111	$(5600,15)$	9	11	7	5	4	3	1	1	4	1	1	1
112	$(5600,21)$	9	11	7	5	4	3	1	1	4	1	1	1
Ψ_1		1	1	2	.	.	.	.	.	.	-2	.	-16
Ψ_2		.	2	1	.	1	.	2	.	1	-1	4	-12

		Λ_1^8	Λ_2^8	Λ_3^8	Λ_4^8	Λ_5^8	Λ_6^8	Λ_7^8	Λ_8^8	Λ_9^8	Λ_{10}^8	Λ_{11}^8	Λ_{12}^8
1	$(1,0)$	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2	$(1,120)$	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
3	$(28,8)$	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
4	$(28,68)$	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
5	$(35,2)$	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
6	$(35,74)$	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
7	$(70,32)$	1	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.
8	$(50,8)$	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.
9	$(50,56)$	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.
10	$(84,4)$	1	1	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.
11	$(84,64)$	1	1	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.
12	$(168,24)$	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.
13	$(175,12)$	1	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.
14	$(175,36)$	1	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.
15	$(210,4)$	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.
16	$(210,52)$	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.
17	$(420,20)$	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.
18	$(300,8)$	.	2	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.
19	$(300,44)$	.	2	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.
20	$(350,14)$	.	2	1	1	.	.	.	.	1	.	.	.
21	$(350,38)$	.	2	1	1	.	.	.	.	1	.	.	.
22	$(525,12)$	1	2	1	1	1	1	.	.	1	.	.	.
23	$(525,36)$	1	2	1	1	1	1	.	.	1	.	.	.
24	$(567,6)$	1	2	2	.	1	.	1	.	1	.	.	.
25	$(567,46)$	1	2	2	.	1	.	1	.	1	.	.	.
26	$(1134,20)$	.	2	.	2	.	1	.	1	2	.	.	.
27	$(700,16)$	2	.	.	1	1	.	.	.	.	1	.	.
28	$(700,28)$	2	.	.	1	1	.	.	.	.	1	.	.
29	$(700,6)$	1	1	1	1	1	1	1	.	1	.	.	.
30	$(700,42)$	1	1	1	1	1	1	1	.	1	.	.	.
31	$(1400,20)$	1	3	2	2	2	2	.	1	2	.	.	.
32	$(840,14)$	.	.	.	1	1	1	.	1	1	.	.	.
33	$(840,26)$	.	.	.	1	1	1	.	1	1	.	.	.
34	$(1680,22)$	2	2	2	2	2	1	1	.	2	1	.	.
35	$(972,12)$	1	1	.	1	1	.	.	.	1	1	.	.
36	$(972,32)$	1	1	.	1	1	.	.	.	1	1	.	.
37	$(1050,10)$	2	2	1	2	1	.	.	.	1	1	.	.
38	$(1050,34)$	2	2	1	2	1	.	.	.	1	1	.	.
39	$(2100,20)$	2	2	2	3	2	1	1	1	2	1	.	.
43	$(1400,8)$	.	2	2	2	1	1	1	1	2	.	.	.
44	$(1400,32)$	.	2	2	2	1	1	1	1	2	.	.	.
45	$(1575,10)$	1	2	3	1	2	1	1	.	1	.	1	.
46	$(1575,34)$	1	2	3	1	2	1	1	.	1	.	1	.
47	$(3150,18)$	2	2	1	2	2	3	.	1	2	.	.	1
48	$(2100,16)$	2	2	3	2	2	.	1	.	1	1	1	.
49	$(2100,28)$	2	2	3	2	2	.	1	.	1	1	1	.
50	$(4200,18)$	4	2	1	4	2	1	.	1	2	2	.	1
54	$(2268,10)$	1	3	3	2	2	1	1	1	2	.	1	.
55	$(2268,30)$	1	3	3	2	2	1	1	1	2	.	1	.
56	$(4536,18)$	4	6	3	4	2	2	1	1	4	1	.	1
57	$(2835,14)$	3	2	1	2	1	1	.	.	1	1	.	1
58	$(2835,22)$	3	2	1	2	1	1	.	.	1	1	.	1
59	$(5670,18)$	4	4	5	4	4	2	1	1	2	1	2	1
64	$(4200,12)$	4	4	3	3	3	2	.	.	2	1	1	1
65	$(4200,24)$	4	4	3	3	3	2	.	.	2	1	1	1
66	$(6075,14)$	5	6	4	5	4	2	1	1	4	2	1	1
67	$(6075,22)$	5	6	4	5	4	2	1	1	4	2	1	1
68	$(8,1)$	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
69	$(8,91)$	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
70	$(56,19)$	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.
71	$(56,49)$	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.
79	$(448,9)$	1	1	.	.	1	1	.	.	1	.	.	.
80	$(448,39)$	1	1	.	.	1	1	.	.	1	.	.	.
81	$(560,5)$	.	2	2	1	.	.	1	.	1	.	.	.
82	$(560,47)$	.	2	2	1	.	.	1	.	1	.	.	.
84	$(840,13)$	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	1	.
85	$(840,31)$	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	1	.
86	$(1008,9)$	1	3	2	1	1	1	1	.	2	.	.	.
87	$(1008,39)$	1	3	2	1	1	1	1	.	2	.	.	.
91	$(1400,11)$	1	1	1	2	1	.	.	1	1	1	.	.
92	$(1400,29)$	1	1	1	2	1	.	.	1	1	1	.	.
93	$(1400,7)$	.	2	3	1	1	.	1	.	1	.	1	.
94	$(1400,37)$	.	2	3	1	1	.	1	.	1	.	1	.
95	$(2400,17)$	2	4	2	3	2	1	1	1	3	1	.	.
96	$(2400,23)$	2	4	2	3	2	1	1	1	3	1	.	.
100	$(3240,9)$	2	4	3	3	3	1	1	1	3	1	1	.
101	$(3240,31)$	2	4	3	3	3	1	1	1	3	1	1	.
107	$(4200,15)$	4	4	2	4	3	3	.	1	3	1	.	1
108	$(4200,21)$	4	4	2	4	3	3	.	1	3	1	.	1
109	$(4536,13)$	3	3	2	4	2	2	.	1	2	1	1	1
110	$(4536,23)$	3	3	2	4	2	2	.	1	2	1	1	1
111	$(5600,15)$	4	6	5	5	4	3	1	1	4	1	1	1
112	$(5600,21)$	4	6	5	5	4	3	1	1	4	1	1	1
Ψ_1		1	1	2	.	.	.	.	.	.	.	.	-4
Ψ_2		.	2	1	.	1	.	2	.	1	.	4	-1

		Λ^9_1	Λ^9_2	Λ^9_3	Λ^9_4	Λ^9_5	Λ^9_6	Λ^9_7	Λ^9_8	Λ^9_9	Λ^9_{10}	Λ^9_{11}	Λ^9_{12}
1	$(1,0)$	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2	$(1,120)$	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
3	$(28,8)$	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
4	$(28,68)$	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
5	$(35,2)$	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
6	$(35,74)$	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
7	$(70,32)$	1	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.
8	$(50,8)$	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.
9	$(50,56)$	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.
10	$(84,4)$	1	1	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.
11	$(84,64)$	1	1	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.
12	$(168,24)$	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.
13	$(175,12)$	1	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.
14	$(175,36)$	1	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.
15	$(210,4)$	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.
16	$(210,52)$	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.
17	$(420,20)$	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.
18	$(300,8)$	.	2	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.
19	$(300,44)$	.	2	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.
20	$(350,14)$	.	2	1	1	.	.	.	.	1	.	.	.
21	$(350,38)$	.	2	1	1	.	.	.	.	1	.	.	.
22	$(525,12)$	1	2	1	1	1	1	.	.	1	.	.	.
23	$(525,36)$	1	2	1	1	1	1	.	.	1	.	.	.
24	$(567,6)$	1	2	2	.	1	.	1	.	1	.	.	.
25	$(567,46)$	1	2	2	.	1	.	1	.	1	.	.	.
26	$(1134,20)$	.	2	.	2	.	1	.	1	2	.	.	.
27	$(700,16)$	1	.	.	.	1	.	.	.	.	1	.	.
28	$(700,28)$	1	.	.	.	1	.	.	.	.	1	.	.
29	$(700,6)$	1	1	1	1	1	1	1	.	1	.	.	.
30	$(700,42)$	1	1	1	1	1	1	1	.	1	.	.	.
31	$(1400,20)$	1	3	2	2	2	2	.	1	2	.	.	.
32	$(840,14)$	.	.	.	1	1	1	.	1	1	.	.	.
33	$(840,26)$	.	.	.	1	1	1	.	1	1	.	.	.
34	$(1680,22)$	1	2	2	1	2	1	1	.	2	1	.	.
35	$(972,12)$	.	1	.	.	1	.	.	.	1	1	.	.
36	$(972,32)$	.	1	.	.	1	.	.	.	1	1	.	.
37	$(1050,10)$	1	2	1	1	1	.	.	.	1	1	.	.
38	$(1050,34)$	1	2	1	1	1	.	.	.	1	1	.	.
39	$(2100,20)$	1	2	2	2	2	1	1	1	2	1	.	.
43	$(1400,8)$	.	2	2	2	1	1	1	1	2	.	.	.
44	$(1400,32)$	.	2	2	2	1	1	1	1	2	.	.	.
45	$(1575,10)$	1	2	2	1	2	1	1	.	1	.	1	.
46	$(1575,34)$	1	2	2	1	2	1	1	.	1	.	1	.
47	$(3150,18)$	1	2	.	2	2	3	.	1	2	.	.	1
48	$(2100,16)$	1	2	2	1	2	.	1	.	1	1	1	.
49	$(2100,28)$	1	2	2	1	2	.	1	.	1	1	1	.
50	$(4200,18)$	1	2	.	2	2	1	.	1	2	2	.	1
54	$(2268,10)$	1	3	2	2	2	1	1	1	2	.	1	.
55	$(2268,30)$	1	3	2	2	2	1	1	1	2	.	1	.
56	$(4536,18)$	2	6	2	3	2	2	1	1	4	1	.	1
57	$(2835,14)$	1	2	.	1	1	1	.	.	1	1	.	1
58	$(2835,22)$	1	2	.	1	1	1	.	.	1	1	.	1
59	$(5670,18)$	2	4	2	3	4	2	1	1	2	1	2	1
64	$(4200,12)$	2	4	1	2	3	2	.	.	2	1	1	1
65	$(4200,24)$	2	4	1	2	3	2	.	.	2	1	1	1
66	$(6075,14)$	2	6	2	3	4	2	1	1	4	2	1	1
67	$(6075,22)$	2	6	2	3	4	2	1	1	4	2	1	1
68	$(8,1)$	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
69	$(8,91)$	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
70	$(56,19)$	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.
71	$(56,49)$	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.
79	$(448,9)$	1	1	.	.	1	1	.	.	1	.	.	.
80	$(448,39)$	1	1	.	.	1	1	.	.	1	.	.	.
81	$(560,5)$	.	2	2	1	.	.	1	.	1	.	.	.
82	$(560,47)$	.	2	2	1	.	.	1	.	1	.	.	.
84	$(840,13)$	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	1	.
85	$(840,31)$	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	1	.
86	$(1008,9)$	1	3	2	1	1	1	1	.	2	.	.	.
87	$(1008,39)$	1	3	2	1	1	1	1	.	2	.	.	.
91	$(1400,11)$	.	1	1	1	1	.	.	1	1	1	.	.
92	$(1400,29)$	.	1	1	1	1	.	.	1	1	1	.	.
93	$(1400,7)$	.	2	2	1	1	.	1	.	1	.	1	.
94	$(1400,37)$	.	2	2	1	1	.	1	.	1	.	1	.
95	$(2400,17)$	1	4	2	2	2	1	1	1	3	1	.	.
96	$(2400,23)$	1	4	2	2	2	1	1	1	3	1	.	.
100	$(3240,9)$	1	4	2	2	3	1	1	1	3	1	1	.
101	$(3240,31)$	1	4	2	2	3	1	1	1	3	1	1	.
107	$(4200,15)$	2	4	1	3	3	3	.	1	3	1	.	1
108	$(4200,21)$	2	4	1	3	3	3	.	1	3	1	.	1
109	$(4536,13)$	1	3	.	3	2	2	.	1	2	1	1	1
110	$(4536,23)$	1	3	.	3	2	2	.	1	2	1	1	1
111	$(5600,15)$	2	6	3	4	4	3	1	1	4	1	1	1
112	$(5600,21)$	2	6	3	4	4	3	1	1	4	1	1	1
Ψ_1		1	1	2	.	.	.	.	.	.	1	2	-1

13. 7-modulare Zerlegungszahlen für ${}^2E_6(2^2)$

Die l-modulare Zerlegungstheorie endlicher Gruppen für eine Primzahl l fügt sich nahtlos in die in Kapitel 3. entwickelte Theorie ein. Voraussetzung hier ist ein diskreter Bewertungsring R in einem algebraischen Zahlkörper K, dessen maximales Ideal $\wp \trianglelefteq R$ über dem Ideal $l \cdot R \trianglelefteq R$ liegt. Mit [16], Korollar 17.2., kann man annehmen, daß sowohl K als auch der Restklassenkörper $k := R/\wp$ Zerfällungskörper für die Gruppenalgebren KG und kG sind. Auch die oben gemachten Bemerkungen zum Induzieren projektiver Charaktere, jetzt von Untergruppen, bleiben weiterhin gültig.
In diesem Kapitel werden Zerlegungszahlen für die endliche Gruppe ${}^2E_6(2^2)$, die förderhin G heißen soll, berechnet. Hierbei stellt sich der Satz von Dipper, siehe 3.7.3., als ein wichtiges Hilfsmittel heraus. Außerdem wird hier das Programmsystem MOC, siehe [40], eingesetzt, das von G. Hiss, K. Lux und R. Parker zur Berechnung von Zerlegungszahlen endlicher Gruppen entwickelt worden ist.
Die gewöhnlichen Charaktertafeln der in diesem Kapitel vorkommenden Gruppen sind in [13] zu finden und auch in der Datenbank von GAP verfügbar. Die hier vorgenommene Numerierung der gewöhnlichen Charaktere ist identisch mir der in den beiden eben genannten Referenzen.

13.1. Die Φ_3-modularen Zerlegungszahlen für $H(F_4)$

Man betrachtet die G zugeordnete Iwahori-Hecke-Algebra

$$H \cong H(F_4, \{2^2, 2^2, 2, 2\}),$$

also die Spezialisierung der generischen Algebra $H(F_4, \{u^2, u^2, u, u\})$ unter der Abbildung D_q mit $q = 2$, siehe 3.7.1. In der vorliegenden Situation ist der Satz 3.7.3. von Dipper mit $q = 2$ und $l = 7$ anwendbar. Also erhält man mittels der Fitting-Korrespondenz, siehe 2.3.6., aus den l-modularen projektiven Charakteren für H solche für G. Außerdem macht man sich die in 3.8. gemachten Beobachtungen zunutze, indem man die Φ_e-modulare Zerlegungsabbildung der generischen Algebra für $e = 3$ betrachtet. Im folgenden sei also $q = 2$, $l = 7$ und $e = 3$.
K. Bremke hat in [7], Sätze 3.10. und 3.11., die Φ_e-modularen Zerlegungszahlen für die oben genannte generische Iwahori-Hecke-Algebra berechnet und außerdem gezeigt, daß die Φ_e-modulare Zerlegungsabbildung der generischen Algebra schon mit der l-modularen Zerlegungsabbildung von H übereinstimmt. Damit erhält man also aus den bezüglich Φ_e-modularer Reduk-

tion projektiv-unzerlegbaren Charakteren der generischen Iwahori-Hecke-Algebra direkt projektiv-unzerlegbare Charaktere von G.
Die in [7] genannten projektiv-unzerlegbaren Charaktere werden in der Reihenfolge der dort behandelten nichttrivialen Blöcke fortlaufend numeriert. Wie sich herausstellt, sind die irreduziblen Charaktere von echt positivem e-Defekt genau diejenigen, deren Fitting-Korrespondenten im l-modularen Hauptblock von G liegen.

Nun werden die Fitting-Korrespondenten der irreduziblen Charaktere von H bestimmt. Im Zusammenhang mit den nachfolgenden Aussagen sei auf Bemerkung 3.6.4. hingewiesen.
Im System CHEVIE sind die generischen Grade der hier betrachteten Algebra enthalten. Als Reihenfolge der irreduziblen Charaktere der generischen Algebra wählt man die dort und in GAP angegebene Reihenfolge der irreduziblen Charaktere der Weyl-Gruppe $W(F_4)$. Die zu den irreduziblen Charakteren der generischen Algebra in Fitting-Korrespondenz stehenden irreduziblen Charaktere des Hauptblocks von G können in dem hier vorliegenden Fall schon durch ihre Charaktergrade, die sich ja gerade als Spezialisierungen der generischen Grade ergeben, identifiziert werden. In der nachfolgenden Liste sind in der ersten Spalte die Nummern der so vorkommenden irreduziblen Charaktere im l-modularen Hauptblock von G, in der zweiten Spalte deren Grade, in der dritten Spalte die Nummern der dazu in Fitting-Korrespondenz stehenden irreduziblen Charaktere der generischen Algebra und in der vierten Spalte die Parametrisierung, wie man sie etwa in [10], Abschnitt 13.8., findet, angegeben.

G	Grad	H	
1	1	1	$(1,0)$
2	1938	7	$(2,4)'$
3	48620	17	$(4,1)$
4	554268	3	$(1,12)'$
5	815100	5	$(2,4)''$
7	1828332	23	$(8,3)'$
14	20155200	21	$(8,3)''$
15	22170720	19	$(4,7)'$
30	221707200	9	$(4,8)$
38	497306304	25	$(16,5)$
50	1289932800	22	$(8,9)'$
52	1418926080	18	$(4,7)''$
57	2270281728	2	$(1,12)''$
63	3338649600	6	$(2,16)'$
68	7488847872	24	$(8,9)''$
82	12745441280	20	$(4,13)$
106	32514244608	8	$(2,16)''$
125	68719476736	4	$(1,24)$

13.2. 7-modulare Zerlegungszahlen für $F_4(2)$

Diese Zerlegungszahlen wurden von G. Hiss [39] bestimmt und dem Verfasser schon vor ihrer Veröffentlichung zur Verfügung gestellt. Für den ersten der unten wiedergegebenen Blöcke ist noch nicht bewiesen, daß die dort angegebenen projektiven Charaktere, also *cum grano salis* die Spalten der entsprechenden Matrix, auch unzerlegbar sind. Immerhin erhält man aber aus ihnen per Induktion projektive Charaktere von G.
Da in [39] eine andere Numerierung der gewöhnlichen Charaktere als die hier verwendete benutzt wird, ergibt sich eine unkanonische Numerierung der Blöcke und der Zeilen der Zerlegungsmatrizen. Die unten angegebnen projektiven Charaktere des Hauptblocks werden absteigend mit $\Psi_{21}, \ldots, \Psi_1$ bezeichnet.

	$\{\Psi_i\}$																					
1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
3	1105	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
4	1105	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
5	1326	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
6	1377	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
11	44200	.	.	.	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
12	44200	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
14	99450	.	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
15	99450	.	.	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
20	183600	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
21	183600	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
27	322218	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
31	358020	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.
30	358020	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.
44	947700	.	.	.	.	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.
48	1342575	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.
49	1342575	.	.	.	1	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.
57	2828800	.	.	.	.	.	.	1	.	.	1	1	.	1	.	1	.	1	.	.	.	.
56	2828800	.	.	.	.	.	1	.	.	.	1	1	.	.	1	1	1	.	.	.	.	.
67	4526080	.	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.
68	4526080	.	.	1	.	.	.	.	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	1	.	.
71	5640192	.	.	.	1	.	.	.	.	.	1	1	.	.	.	1	1	1	.	.	1	.
79	8055450	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	.	1	.	.	.	1	.	1	1	.
78	8055450	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	1	.	.	1	.	1	.	1	.	1	.
84	10740600	.	.	.	.	.	.	.	.	.	3	3	.	.	1	.	.	.	1	.	.	1
85	10740600	.	.	.	.	.	.	.	.	.	3	3	.	1	.	.	.	.	.	1	.	1
94	16777216	.	.	.	.	.	.	.	.	.	3	3	1	.	.	.	.	.	1	1	1	1

		Ψ_{27}	Ψ_{26}	Ψ_{25}	Ψ_{24}	Ψ_{23}	Ψ_{22}
10	23205	1	.	.	.	.	.
29	348075	.	1	.	.	.	.
39	626535	1	.	1	.	.	.
55	2784600	.	.	1	1	.	.
70	5012280	.	1	.	.	1	.
82	9398025	.	.	.	1	.	1
88	11880960	.	.	.	.	1	1

		Ψ_{33}	Ψ_{32}	Ψ_{31}	Ψ_{30}	Ψ_{29}	Ψ_{28}
9	23205	1	.	.	.	.	.
28	348075	.	1	.	.	.	.
38	626535	1	.	1	.	.	.
54	2784600	.	.	1	1	.	.
69	5012280	.	1	.	.	1	.
83	9398025	.	.	.	1	.	1
89	11880960	.	.	.	.	1	1

13.3. Die 7-modularen Zerlegungszahlen für $O_{10}^{-}(2)$

Diese Zerlegungszahlen sind von P. Fong und B. Srinivasan in [25] bestimmt worden. Zum Zwecke leichterer Referenzierbarkeit werden die nichttrivialen Blöcke hier reproduziert.

		Ψ_6	Ψ_5	Ψ_4	Ψ_3	Ψ_2	Ψ_1
1	1	1	.	.	.	.	.
7	748	1	1	.	.	.	.
19	14960	.	.	1	.	.	.
28	35904	.	1	.	1	.	.
56	171072	.	.	1	.	1	.
62	227205	.	.	.	1	.	1
75	348160	.	.	.	.	1	1

		Ψ_{12}	Ψ_{11}	Ψ_{10}	Ψ_9	Ψ_8	Ψ_7
3	187	1	.	.	.	.	.
16	9350	.	1	.	.	.	.
32	56100	1	.	1	.	.	.
57	181764	.	1	.	1	.	.
92	598400	.	.	.	1	1	.
104	765952	.	.	1	.	.	1
112	1136025	.	.	.	.	1	1

		Ψ_{18}	Ψ_{17}	Ψ_{16}	Ψ_{15}	Ψ_{14}	Ψ_{13}
4	340	1	.	.	.	.	.
8	2244	.	1	.	.	.	.
17	10692	1	.	1	.	.	.
33	59840	.	.	1	1	.	.
60	191488	.	1	.	.	1	.
107	908820	.	.	.	1	.	1
110	1048576	.	.	.	.	1	1

		Ψ_{21}	Ψ_{20}	Ψ_{19}
20	15147	1	.	.
73	302940	1	1	.
96	681615	.	.	1
97	681615	.	.	1
108	969408	.	1	1

13.4. 7-modulare Zerlegungszahlen für ${}^2E_6(2^2)$

13.4.1. Blöcke. Mittels der Charaktertafel von $G := {}^2E_6(2^2)$ findet man die folgende Aufteilung der irreduziblen Charaktere in Blöcke. In der zweiten Spalte wird wieder der Defekt angegeben, in der dritten Spalte die Nummern der im jeweiligen Block liegenden Charaktere. Die Grade der entsprechenden Charaktere sind in den unten angegebenen Zerlegungsmatrizen wiedergegeben.

Nr.	d	Charaktere
1	2	$1, 2, 3, 4, 5, 7, 12, 14, 15, 25, 26, 30, 38, 39, 50,$
		$52, 57, 63, 68, 69, 75, 82, 105, 106, 114, 120, 125$
2	1	$6, 16, 40, 64, 88, 112, 116$
3	1	$9, 27, 46, 60, 71, 79, 89$
4	1	$10, 28, 47, 61, 72, 80, 90$
5	1	$11, 29, 48, 62, 73, 81, 91$
6	1	$42, 87, 103, 104, 113$

13.4.2. Block 2**.** Man induziert die folgenden projektiv-unzerlegbaren Charaktere von maximalen Untergruppen nach G,

$$(\chi18)^G_{F_4(2)}, (\chi2)^G_{F_4(2)}, (\chi2)^G_{O^-_{10}(2)}, (\chi23)^G_{F_4(2)}, (\chi32)^G_{F_4(2)}, (\chi17)^G_{F_4(2)},$$

und schränkt auf den zweiten Block ein. Dies ergibt die nachfolgend angegebenen projektiven Charaktere. Diese bilden eine Basis für den von den projektiven Charakteren dieses Blocks aufgespannten Raum.

6	1322685	1	.	.	.	.	.
16	29099070	.	1	.	.	.	.
40	581981400	1	.	1	.	.	.
64	4655851200	.	1	.	1	.	.
88	14898723840	.	.	1	.	1	.
112	43341742080	.	.	.	3	1	1
116	53033055075	.	.	.	2	2	1

Aus der Brauer-Dade-Theorie der Blöcke von zyklischem Defekt, siehe [4] und [18], folgt damit die Gestalt der Zerlegungsmatrix:

		Λ_1	Λ_2	Λ_3	Λ_4	Λ_5	Λ_6
6	1322685	1	.	.	.	.	.
16	29099070	.	1	.	.	.	.
40	581981400	1	.	1	.	.	.
64	4655851200	.	1	.	1	.	.
88	14898723840	.	.	1	.	1	.
112	43341742080	.	.	.	1	.	1
116	53033055075	.	.	.	.	1	1

13.4.3. Blöcke 3, 4 **und** 5. Diese Blöcke sind unter dem äußeren Automorphismus der Ordnung 3 von G konjugiert, siehe [13]. Daher reicht es aus, die Zerlegungsmatrix für Block 4 zu berechnen.
Man induziert die folgenden projektiv-unzerlegbaren Charaktere von maximalen Untergruppen nach G,

$$(\Psi_6)^G_{O^-_{10}(2)}, (\chi_8)^G_{F_4(2)}, (\chi_5)^G_{O^-_{10}(2)}, (\chi_2)^G_{O^-_{10}(2)}, (\chi_{18})^G_{F_4(2)}, (\chi_7)^G_{F_4(2)}.$$

Einschränken auf Block 4 ergibt die nachfolgend angegebenen projektiven Charaktere.

10	2909907	1	.	.	.	.	.
28	145495350	.	1	.	.	.	.
47	872972100	1	.	1	.	.	.
61	2828429604	1	1	.	1	.	.
72	9311702400	2	.	.	1	1	.
80	11918979072	.	.	2	.	.	1
90	17677685025	1	.	1	.	1	1

Wiederum folgt daraus die Zerlegungsmatrix mittels Brauer-Dade-Theorie.

		Λ_1	Λ_2	Λ_3	Λ_4	Λ_5	Λ_6
10	2909907	1	.	.	.	.	.
28	145495350	.	1	.	.	.	.
47	872972100	1	.	1	.	.	.
61	2828429604	.	1	.	1	.	.
72	9311702400	.	.	.	1	1	.
80	11918979072	.	.	1	.	.	1
90	17677685025	.	.	.	.	1	1

13.4.4. Block 6. Analog findet man aus $(\chi_8)^G_{F_4(2)}, (\chi_{17})^G_{F_4(2)}$ die nachfolgenden projektiven Charaktere.

42	707107401	1	.
87	14142148020	1	.
103	31819833045	.	1
104	31819833045	.	1
113	45254873664	.	1

Außerdem schränken die irreduziblen Charaktere χ_{103}, χ_{104} gleich auf die 7-regulären Klassen ein, wie man der gewöhnlichen Charaktertafel von G entnimmt. Damit erhält man als Zerlegungsmatrix:

		Λ_1	Λ_2	Λ_3
42	707107401	1	.	.
87	14142148020	1	1	.
103	31819833045	.	.	1
104	31819833045	.	.	1
113	45254873664	.	1	1

13.4.5. Block 1. Man gewinnt projektive Charaktere durch Induktion projektiver Charaktere von den oben erwähnten maximalen Untergruppen und durch Tensorieren von gewöhnlichen mit Defekt-0-Charakteren von G. Außerdem verwendet man die von der Algebra H, siehe 13.1., herkommenden projektiven Charaktere. Damit erhält man die am Ende dieses Abschnitts in 13.4.7. angegebene Menge $\{\Lambda_i^1\}_{i=1}^{21}$ von linear unabhängigen projektiven Charakteren des ersten Blocks. Ihre Herkunft wird in der folgenden Liste beschrieben:

$$(\Psi_1)_H, (\Psi_3)_H, (\Psi_5)_H, (\chi_7)^G_{F_4(2)}, (\Psi_2)_H, (\Psi_7)_H, \chi_2 \otimes \chi_{21},$$

$$(\Psi_6)_H, (\chi_{23})^G_{F_4(2)}, (\Psi_{11})^G_{F_4(2)}, \chi_2 \otimes \chi_{97}, (\Psi_4)_H, (\Psi_8)_H, \chi_2 \otimes \chi_{34},$$

$$(\chi_{46})^G_{F_4(2)}, \chi_5 \otimes \chi_{13}, \chi_4 \otimes \chi_{13}, \chi_8 \otimes \chi_{13}, \chi_2 \otimes \chi_{44}, \chi_2 \otimes \chi_{56}, (\chi_{17})^G_{F_4(2)}.$$

Aus der Charaktertafel von G findet man, daß der Rang der Zerlegungsmatrix dieses Blocks gleich 21 ist. Allerdings hat die von $\{\Lambda^1_i\}^{21}_{i=1}$ gebildete Matrix einen Elementarteiler verschieden von 1. Der FindBasis-Algorithmus, siehe 4.5., zeigt dann, daß man Λ^1_{10} durch den Vektor

$$\Lambda^1_{10'} := 1/2 \cdot (\Lambda^1_{10} + \Lambda^1_{11} + \Lambda^1_{12} + \Lambda^1_{16} + \Lambda^1_{17} + \Lambda^1_{19} + \Lambda^1_{20}),$$

der ebenfalls unten angegeben ist, ersetzen kann, um eine erste Basis für den von den projektiv-unzerlegbaren Charakteren aufgespannten Raum zu erhalten.

Per Konstruktion ist nun klar, daß die von der Iwahori-Hecke-Algebra herkommenden projektiven Charaktere

$$\Lambda^1_1, \Lambda^1_2, \Lambda^1_3, \Lambda^1_5, \Lambda^1_6, \Lambda^1_8, \Lambda^1_{12}, \Lambda^1_{13}$$

projektiv-unzerlegbar sind. Außerdem findet man, daß

$$\Lambda^1_4, \Lambda^1_7, \Lambda^1_{17}, \Lambda^1_{19}, \Lambda^1_{21}$$

projektiv-unzerlegbar sind, da keine Teilsumme der darin jeweils vorkommenden gewöhnlichen irreduziblen Charaktere einen Grad hat, der durch 7^2, also die maximale 7-Potenz, die noch die Gruppenordnung $|G|$ teilt, dividierbar ist.
Außerdem ist bei der ersten Basis die Zerlegung der folgenden projektiven Charaktere angegeben:

$$\Theta_1 := (\Psi_{16})^G_{F_4(2)}, \Theta_2 := (\Psi_{21})^G_{F_4(2)}, \Theta_3 := (\chi_{19})^G_{F_4(2)},$$

$$\Theta_4 := \chi_5 \otimes \chi_{17}, \Theta_5 := \chi_2 \otimes \chi_{66}, \Theta_6 := \chi_4 \otimes \chi_8.$$

Daraus folgt, daß die folgenden Charaktere projektiv sind:

$$\Lambda^2_{21} := \Lambda^1_{20} - \Lambda^1_{21}, \Lambda^2_{20} := \Lambda^1_{21}, \Lambda^2_{15} := \Lambda^1_{15} - 2 \cdot \Lambda^1_{19} - \Lambda^1_{21},$$

$$\Lambda_{14}^2 := \Lambda_{14}^1 - \Lambda_{21}^1, \Lambda_{11}^2 := \Lambda_{11}^1 - 2 \cdot \Lambda_{21}^1, \Lambda_9^2 := \Lambda_9^1 - \Lambda_{17}^1, -3 \cdot \Lambda_{21}^1.$$

Dies ergibt die unten angegebene zweite Basis. Alle anderen Basisvektoren bleiben wie üblich unverändert.

Mit einem Argument analog zu dem oben benutzten folgert man jetzt, daß auch $\Lambda_9^2, \Lambda_{14}^2, \Lambda_{21}^2$ projektiv-unzerlegbar sind. Man beachte, daß gegenüber der ersten Basis die beiden letzten Spalten vertauscht sind.
Weiter sind bei der zweiten Basis die Zerlegungen der wie folgt gegebenen projektiven Charaktere wiedergegeben:

$$\Theta_7 := (\chi_8)_{F_4(2)}^G, \Theta_8 := \chi_2 \otimes (\Lambda_1)_{\text{Block } 3},$$

$$\Theta_9 := \chi_5 \otimes \chi_{17}, \Theta_{10} := (\chi_{15})_{O_{10}^-(2)}^G.$$

Damit erhält man die folgenden projektiven Charaktere,

$$\Lambda_{18}^3 := \Lambda_{18}^2 - \Lambda_{20}^2 - 3 \cdot \Lambda_{21}^2, \Lambda_{16}^3 := \Lambda_{16}^2 - \Lambda_{21}^2,$$

$$\Lambda_{15}^3 := \Lambda_{15}^2 - \Lambda_{20}^2 - 4 \cdot \Lambda_{21}^2, \Lambda_{11}^3 := \Lambda_{11}^2 - \Lambda_{19}^2,$$

und damit die dritte Basis.

Nun findet man, daß $\Lambda_{18}^3, \Lambda_{16}^3$ projektiv-unzerlegbar sind.
Außerdem sind bei der dritten Basis noch die Zerlegungen der folgenden projektiven Charaktere angegeben:

$$\Theta_{11} := \chi_3 \otimes \chi_{32}, \Theta_{12} := \chi_2 \otimes \chi_{32}, \Theta_{13} := \chi_5 \otimes \chi_{17}.$$

Damit sind nun auch

$$\Lambda_{15}^4 := \Lambda_{15}^3 - 10 \cdot \Lambda_{16}^3 - 6 \cdot \Lambda_{18}^3 - \Lambda_{20}^3 - 14 \cdot \Lambda_{21}^3,$$

$$\Lambda_{11}^4 := \Lambda_{11}^3 - \Lambda_{16}^3 - 2 \cdot \Lambda_{18}^3 - 2 \cdot \Lambda_{20}^3 - 7 \cdot \Lambda_{21}^3$$

projektiv und man erhält die vierte Basis.

Nun beachtet man, daß die gewöhnlichen irreduziblen Charaktere χ_{25}, χ_{26} unter komplexer Konjugation ineinander übergehen und auf die 7-regulären Konjugiertenklassen von G verschieden einschränken, wie man anhand der Charaktertafel von G feststellt. Also gibt es mindestens ein Paar von zueinander konjugiert komplexen Brauercharakteren, somit auch mindestens ein Paar zueinander konjugiert komplexer projektiv-unzerlegbarer Charaktere.

Angenommen, diese bisher unbekannten projektiv-unzerlegbaren Charaktere, die an den Stellen χ_{25} oder χ_{26} nichtverschwindende Einträge haben, kommen nicht als Summanden in Λ^4_{11} vor. Dann folgt aber, daß der Raum, der von den unter komplexer Konjugation invarianten projektiv-unzerlegbaren Charakteren aufgespannt wird, mindestens den Rang 20 hat, Widerspruch.
Also kommen diese projektiv-unzerlegbaren Charaktere in Λ^4_{11} vor. Da alle gewöhnlichen Charaktere bis auf χ_{25}, χ_{26} invariant unter komplexer Konjugation sind, findet man die ebenfalls bei der vierten Basis angegebenen neuen projektiven Charaktere. Man beachte dabei, daß Λ^4_{11} noch weitere projektive Summanden enthält, die unter komplexer Konjugation fest bleiben. Dies ergibt die fünfte Basis, in der Λ^5_{10} und Λ^5_{11} gerade die soeben gefundenen projektiven Charaktere sind.
Damit bleibt noch zu klären:

13.4.6. Offene Fragen.
i) Ist $\Lambda^5_{15} - \Lambda^5_{21}$ projektiv?
ii) Ist $\Lambda^5_{10} - x \cdot \Lambda^5_{21}$ projektiv? Dabei ist $0 \leq x \leq 6$.
iii) Ist $\Lambda^5_{10} - y \cdot \Lambda^5_{20}$ projektiv? Dabei ist $0 \leq y \leq 10$.
iv) Ist $\Lambda^5_{10} - z \cdot \Lambda^5_{19}$ projektiv? Dabei ist $0 \leq z \leq 2$.
Unter komplexer Konjugation erhält man jeweils die zu ii), iii) und iv) analoge Aussage für Λ^5_{11}.

13.4.7. Auf den nachfolgenden Seiten sind die oben sukzessive bestimmten Basen für Block 1 wiedergegeben.

	$\{\Lambda_i^1\}_{i=1}^{21}$																						$\Lambda^1_{10'}$
1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2	1938	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
3	48620	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
4	554268	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
5	815100	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
7	1828332	.	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
12	2956096	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
14	20155200	.	.	1	.	.	.	.	1	.	2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
15	22170720	.	.	.	.	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
25	145411200	.	.	.	.	.	.	.	.	.	7	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	4
26	145411200	.	.	.	.	.	.	.	.	.	9	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	5
30	221707200	1	1	.	.	1	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
38	497306304	.	.	1	.	.	1	.	1	.	18	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	9
39	505076715	.	.	.	1	.	.	1	.	.	22	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	11
50	1289932800	.	.	.	.	.	1	.	.	1	54	2	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	28
52	1418926080	.	.	.	.	.	.	.	1	.	76	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	38
57	2270281728	.	.	.	.	1	.	.	.	.	106	1	.	.	.	10	1	.	.	.	.	.	54
63	3338649600	.	1	.	1	.	.	.	.	1	117	1	1	.	.	.	.	1	.	.	.	.	60
68	7488847872	.	.	.	.	.	.	.	1	.	364	4	.	1	.	7	.	.	1	.	.	.	184
69	7576150725	.	.	.	.	.	.	1	.	.	362	3	.	.	.	16	1	.	1	.	.	.	183
75	10101534300	.	.	.	1	.	.	.	.	2	401	7	.	.	1	2	.	1	.	1	.	.	205
82	12745441280	.	.	.	.	.	.	1	.	.	557	8	.	1	1	8	.	.	1	1	.	.	283
105	32324909760	.	.	.	.	.	.	.	.	5	1387	25	.	.	1	3	.	1	1	.	1	1	707
106	32514244608	.	.	.	.	1	.	.	.	.	1444	20	1	.	.	29	2	.	3	.	1	.	734
114	45456904350	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2036	28	.	.	.	38	2	.	4	1	1	.	1034
120	60609205800	.	.	.	.	.	.	.	.	3	2682	43	.	.	1	23	1	.	4	.	2	1	1364
125	68719476736	.	.	.	.	.	.	.	.	4	2972	48	1	.	1	24	1	1	4	1	2	1	1513
Θ_1		.	.	.	.	2	.	.	8	.	.	.	.	4	.	6	−33	.	−5	−8	1	−3	
Θ_2		1	.	2	.	.	.	1	.	.	.	.	.	1	.	.	1	.	.	2	2	−1	
Θ_3		.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	.	2	.	.	.	−1	
Θ_4		.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	1	.	.	1	.	−1	4	−2	−1	.	−3	
Θ_5		.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	1	.	.	−1	.	2	2	−1	
Θ_6		.	.	.	1	.	1	.	.	1	.	.	.	.	2	.	.	.	.	.	.	−5	

	$\{\Lambda_i^2\}_{i=1}^{21}$																					
1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2	1938	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
3	48620	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
4	554268	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
5	815100	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
7	1828332	.	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
12	2956096	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
14	20155200	.	.	1	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
15	22170720	.	.	.	.	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
25	145411200	.	.	.	.	.	.	.	.	.	4	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
26	145411200	.	.	.	.	.	.	.	.	.	5	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
30	221707200	1	1	.	.	1	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
38	497306304	.	.	1	.	.	1	.	1	.	9	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.
39	505076715	.	.	.	1	.	.	1	.	.	11	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.
50	1289932800	.	.	.	.	.	1	.	.	1	28	2	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.
52	1418926080	.	.	.	.	.	.	.	1	.	38	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.
57	2270281728	.	.	.	.	1	.	.	.	.	54	1	.	.	.	10	1	.	.	.	.	.
63	3338649600	.	1	.	1	.	.	.	.	.	60	1	1	.	.	.	.	1	.	.	.	.
68	7488847872	.	.	.	.	.	.	.	1	.	184	4	.	1	.	7	.	.	1	.	.	.
69	7576150725	.	.	.	.	.	.	1	.	.	183	3	.	.	.	16	1	.	1	.	.	.
75	10101534300	.	.	.	1	.	.	.	.	1	205	7	.	.	1	.	.	1	.	1	.	.
82	12745441280	.	.	.	.	.	.	1	.	.	283	8	.	1	1	6	.	.	1	1	.	.
105	32324909760	.	.	.	.	.	.	.	.	1	707	23	.	.	.	2	.	1	1	.	1	.
106	32514244608	.	.	.	.	1	.	.	.	.	734	20	1	.	.	29	2	.	3	.	.	1
114	45456904350	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1034	28	.	.	.	36	2	.	4	1	.	1
120	60609205800	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1364	41	.	.	.	22	1	.	4	.	1	1
125	68719476736	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1513	46	1	.	.	21	1	1	4	1	1	1
Θ_7		.	.	1	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	-1	-4
Θ_8		.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	1	1	.	-3
Θ_9		.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	1	.	.	1	.	-1	4	-2	-1	.	.
Θ_{10}		.	.	1	.	1	.	.	2	.	.	.	.	1	1	3	-21	.	-3	2	-1	-11

	$\{\Lambda_i^3\}_{i=1}^{21}$																					
1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2	1938	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
3	48620	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
4	554268	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
5	815100	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
7	1828332	.	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
12	2956096	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
14	20155200	.	.	1	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
15	22170720	.	.	.	.	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
25	145411200	.	.	.	.	.	.	.	.	.	4	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
26	145411200	.	.	.	.	.	.	.	.	.	5	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
30	221707200	1	1	.	.	1	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
38	497306304	.	.	1	.	.	1	.	1	.	9	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.
39	505076715	.	.	.	1	.	.	1	.	.	11	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.
50	1289932800	.	.	.	.	.	1	.	.	1	28	2	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.
52	1418926080	.	.	.	.	.	.	.	1	.	38	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.
57	2270281728	.	.	.	.	1	.	.	.	.	54	1	.	.	.	10	1	.	.	.	.	.
63	3338649600	.	1	.	1	.	.	.	.	.	60	1	1	.	.	.	.	1	.	.	.	.
68	7488847872	.	.	.	.	.	.	.	1	.	184	4	.	1	.	7	.	.	1	.	.	.
69	7576150725	.	.	.	.	.	.	1	.	.	183	3	.	.	.	16	1	.	1	.	.	.
75	10101534300	.	.	.	1	.	.	.	.	1	205	6	.	.	1	.	.	1	.	1	.	.
82	12745441280	.	.	.	.	.	.	1	.	.	283	7	.	1	1	6	.	.	1	1	.	.
105	32324909760	.	.	.	.	.	.	.	.	1	707	23	.	.	.	1	.	1	.	.	1	.
106	32514244608	.	.	.	.	1	.	.	.	.	734	20	1	.	.	25	1	.	.	.	.	1
114	45456904350	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1034	27	.	.	.	32	1	.	1	1	.	1
120	60609205800	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1364	41	.	.	.	17	.	.	.	.	1	1
125	68719476736	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1513	45	1	.	.	16	.	1	.	1	1	1
Θ_{11}		.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	2	.	3	−30	1	−18	.	7	−42
Θ_{12}		.	.	1	.	.	.	1	3	.	.	.	.	2	1	4	−25	.	−7	4	−1	−37
Θ_{13}		.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	1	.	.	1	.	−1	4	−2	.	−2	−7

	$\{\Lambda_i^4\}_{i=1}^{21}$																						Λ_{10}^5	Λ_{11}^5
1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2	1938	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
3	48620	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
4	554268	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
5	815100	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
7	1828332	.	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
12	2956096	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
14	20155200	.	.	1	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
15	22170720	.	.	.	.	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
25	145411200	.	.	.	.	.	.	.	.	.	4	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.
26	145411200	.	.	.	.	.	.	.	.	.	5	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
30	221707200	1	1	.	.	1	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
38	497306304	.	.	1	.	.	1	.	1	.	9	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
39	505076715	.	.	.	1	.	.	1	.	.	11	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
50	1289932800	.	.	.	.	.	1	.	.	1	28	2	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.	1	1
52	1418926080	.	.	.	.	.	.	.	1	.	38	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.
57	2270281728	.	.	.	.	1	.	.	.	.	54	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.
63	3338649600	.	1	.	1	.	.	.	.	.	60	1	1	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.
68	7488847872	.	.	.	.	.	.	.	1	.	184	2	.	1	.	1	.	.	1	.	.	.	1	1
69	7576150725	.	.	.	.	.	.	1	.	.	183	.	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.	.	.
75	10101534300	.	.	.	1	.	.	.	.	1	205	6	.	.	1	.	.	1	.	1	.	.	2	2
82	12745441280	.	.	.	.	.	.	1	.	.	283	5	.	1	1	.	.	.	1	1	.	.	2	2
105	32324909760	.	.	.	.	.	.	.	.	1	707	21	.	.	.	.	.	1	.	.	1	.	10	10
106	32514244608	.	.	.	.	1	.	.	.	.	734	12	1	.	.	1	1	.	.	.	.	1	6	6
114	45456904350	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1034	17	.	.	.	2	1	.	1	1	.	1	8	8
120	60609205800	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1364	32	.	.	.	2	.	.	.	.	1	1	16	16
125	68719476736	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1513	36	1	.	.	1	.	1	.	1	1	1	17	17

	$\{\Lambda_i^5\}_{i=1}^{21}$																					
1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2	1938	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
3	48620	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
4	554268	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
5	815100	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
7	1828332	.	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
12	2956096	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
14	20155200	.	.	1	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
15	22170720	.	.	.	.	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
25	145411200	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
26	145411200	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
30	221707200	1	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
38	497306304	.	.	1	.	.	1	.	1	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.
39	505076715	.	.	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.
50	1289932800	.	.	.	.	.	1	.	.	1	1	1	.	1	1	.	.	.	.	.	.	.
52	1418926080	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.
57	2270281728	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.
63	3338649600	.	1	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	1	.	.	.	.
68	7488847872	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	1	.	1	.	1	.	.	1	.	.	.
69	7576150725	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	1	.	.	.
75	10101534300	.	.	.	1	.	.	.	.	1	2	2	.	.	1	.	.	1	.	1	.	.
82	12745441280	.	.	.	.	.	.	1	.	.	2	2	.	1	1	.	.	.	1	1	.	.
105	32324909760	.	.	.	.	.	.	.	.	1	10	10	.	.	.	.	.	1	.	.	1	.
106	32514244608	.	.	.	.	1	.	.	.	.	6	6	1	.	.	1	1	.	.	.	.	1
114	45456904350	.	.	.	.	.	.	.	.	.	8	8	.	.	.	2	1	.	1	1	.	1
120	60609205800	.	.	.	.	.	.	.	.	.	16	16	.	.	.	2	.	.	.	.	1	1
125	68719476736	.	.	.	.	.	.	.	.	.	17	17	1	.	.	1	.	1	.	1	1	1

14. Literatur

[1] D. Barbasch, D. Vogan: Primitive ideals and orbital integrals in comples classical groups, Math. Ann. 259, 1982, 153-199.

[2] C. Benson, C. Curtis: On the degrees and rationality of certain characters of finite Chevalley groups, Trans. Am. Math. Soc. 165, 1972, 251-273. Corrections and additions, Trans. Am. Math. Soc. 202, 1975, 405-406.

[3] N. Bourbaki: Groupes et algebres de Lie, chapitres 4, 5 et 6, Masson, 1981.

[4] R. Brauer: Investigations on group characters, Ann. of Math. (2) 42, 1941, 936-958.

[5] R. Brauer, C. Nesbitt: On the modular representations of finite groups, University of Toronto Studies, Math. Ser. 4, 1937.

[6] K. Bremke: Hecke-Algebren mit ungleichen Parametern, Diplomarbeit, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen, 1992.

[7] K. Bremke: The decomposition numbers of Hecke algebras of type F_4 with unequal parameters, Manuscripta Math. 83, 1994.

[8] M. Broué, G. Malle: Théorémes de Sylow génériques pour les groupes réductifs sur les corps finis, Math. Ann. 292, 1992, 241-262.

[9] R. Carter: Simple groups of Lie type, Wiley, 1972.

[10] R. Carter: Finite groups of Lie type: conjugacy classes and characters, Wiley, 1985.

[11] B. Char, K. Geddes, G. Gonnet, B. Leong, M. Monagan, S. Watt: Maple V, language reference manual, Springer, 1991.

[12] H. Cohen: A course in computational algebraic number theory, Springer, 1993.

[13] J. Conway, R. Curtis, S. Norton, R. Parker, R. Wilson: Atlas of finite groups, Clarendon Press, 1985.

[14] C. Curtis, N. Iwahori, R. Kilmoyer: Hecke algebras and characters of parabolic type of finite groups with BN-pairs, Publ. Math. I.H.E.S. 40, 1971, 81-116.

[15] C. Curtis, I. Reiner: Representation theory of finite groups and associative algebras, Wiley, 1988.

[16] C. Curtis, I. Reiner: Methods of representation theory I, Wiley, 1981.

[17] C. Curtis, I. Reiner: Methods of representation theory II, Wiley, 1987.

[18] E. Dade: Blocks with cyclic defect groups, Ann. of Math. (2) 84, 1966, 20-48.

[19] R. Dipper: On quotients of Hom-functors and representations of general linear groups, J. Algebra 130, 1990, 235-259.

[20] R. Dipper, G. James: Representations of Hecke algebras of general linear groups, Proc. London Math. Soc. (3) 52, 1986, 20-52.

[21] R. Dipper, G. James: Blocks and idempotents of Hecke algebras of general linear groups, Proc. London Math. Soc. (3) 54, 1987, 57-82.

[22] W. Feit: The representation theory of finite groups, North-Holland, 1982.

[23] P. Fong: A note on splitting fields of representations of finite groups, Illinois J. Math. 7, 1963, 515-520.

[24] P. Fong, B. Srinivasan: Brauer trees in $GL(n, q)$, Math. Z. 187, 1984, 81-88.

[25] P. Fong, B. Srinivasan: Brauer trees in classical groups, J. Algebra 131, 1990, 179-225.

[26] J. Frame: The classes and representations of the groups of 27 lines and 28 bitangents, Annali Math. Pura App. 32, 1951.

[27] M. Geck: Brauer trees of Hecke algebras, Comm. Algebra 20(10), 1992, 2937-2973.

[28] M. Geck: The decomposition numbers of the Hecke algebra of type E_6, Math. Comp. 61, 1993, 889-899.

[29] M. Geck: On the character values of Iwahori-Hecke algebras of exceptional type, Proc. London Math. Soc. 68, 1994, 51-76.

[30] M. Geck: Beiträge zur Darstellungstheorie von Iwahori-Hecke-Algebren, Habilitationsschrift, RWTH Aachen, 1994.

[31] M. Geck, G. Hiss, F. Lübeck, G. Malle, G. Pfeiffer: CHEVIE—generic character tables for finite groups of Lie type, Weyl groups, and Hecke algebras, IWR Preprint 93-62, Universität Heidelberg, 1993.

[32] M. Geck, K. Lux: The decomposition numbers of the Hecke algebra of type F_4, Manuscripta Math. 70, 1991, 285-306.

[33] M. Geck, G. Pfeiffer: On the irreducible characters of Hecke algebras, Advances in Math. 102, 1993, 79-94.

[34] D. Goldschmidt: Lectures on character theory, Publish or Perish, 1980.

[35] P. Hilton, U. Stammbach: A course in homological algebra, Springer, 1970.

[36] A. Gyoja: On the existence of a W-graph for an irreducible representation of a Coxeter group, J. Algebra 86, 1984, 422-438.

[37] E. Hecke: Über Modulfunktionen und die Dirichletschen Reihen mit Eulerscher Produktentwicklung I, II, Math. Ann. 114, 1937, 1-28 und 316-351.

[38] G. Hiss: Zerlegungszahlen endlicher Gruppen vom Lie-Typ in nicht-definierender Charakteristik, Habilitationsschrift, RWTH Aachen, 1990.

[39] G. Hiss: Private Mitteilung.

[40] G. Hiss, C. Jansen, K. Lux, R. Parker: Computational modular character theory, in Vorbereitung.

[41] P. Hoefsmit: Representations of the Hecke algebras of finite groups with BN-pairs of classical type, Doktorarbeit, University of British Columbia, Vancouver, 1974.

[42] N. Iwahori: On the structure of the Hecke ring of a Chevalley group over a finite field, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 10, 1964, 215-236.

[43] G. James, A. Kerber: The representation theory of the symmetric group, Addison-Wesley, 1981.

[44] C. JANSEN, K. LUX, R. PARKER, R. WILSON: An atlas of Brauer characters, in Vorbereitung.

[45] D. KAZHDAN, G. LUSZTIG: Representations of Coxeter groups and Hecke algebras, Invent. Math. 53, 1979, 165-184.

[46] D. KNUTH: The art of computer programming, Bd. 3: sorting and searching, Addison-Wesley, 1973.

[47] A. KRIEG: Hecke algebras, Memoirs Am. Math. Soc. 435, 1990.

[48] B. KÜLSHAMMER: Lectures on block theory, London Mathematical Society Lecture Notes Series 161, Cambridge University Press, 1991.

[49] P. LANDROCK: Finite group algebras and their modules, Cambridge University Press, 1983.

[50] S. LINTON: Constructing matrix representations of finitely presented groups, J. Symb. Comp. 12, 1991, 427-438.

[51] S. LINTON: On vector enumeration, J. Linear Algebra and its Applications 192, 1993, 235-248.

[52] S. LINTON: Vector enumeration programs, manual, 1994.

[53] G. LUSZTIG: Left cells in Weyl groups, in: Lecture Notes in Mathematics 1024, Springer, 1983.

[54] G. LUSZTIG: Characters of reductive groups over a finite field, Annals of Math. Studies 107, Princeton University Press, 1984.

[55] K. LUX, J. MÜLLER, M. RINGE: Peakword condensation and submodule lattices: an application of the MeatAxe, J. Symb. Comp. 17, 1994, 529-544.

[56] K. LUX, H. PAHLINGS: Computational aspects of representation theory of finite groups, in: G. MICHLER, C. RINGEL: Representation theory of finite groups and finite-dimensional algebras, Birkhäuser, 1991, 37-64.

[57] J. MÜLLER: 5-modulare Zerlegungszahlen für die sporadische einfache Gruppe Co_3, Diplomarbeit, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen, 1991.

[58] W. Müller: Darstellungstheorie von endlichen Gruppen, Teubner, 1980.

[59] R. Parker: The computer calculation of modular characters, in: M. Atkinson: Computational group theory, Academic Press, 1984, 267-274.

[60] G. Pfeiffer: Charakterwerte von Iwahori-Hecke-Algebren von klassischem Typ, Doktorarbeit, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen, 1994.

[61] A. Ram: A Frobenius formula for the characters of the Hecke algebras, Invent. Math. 106, 1991, 461-488.

[62] M. Ringe: The C-MeatAxe, manual, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen, 1994.

[63] M. Schönert et. al: GAP—groups, algorithms and programming, manual, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen, 1994.

[64] I. Schur: Zur Theorie der einfachen transitiven Permutationsgruppen, Sitzungsberichte der Preuß. Akademie der Wissenschaften, Phys. Math. Klasse, 1933, 598-623, in: Gesammelte Werke, Bd. 3, 266-291, Springer, 1973.

[65] L. Solomon: The orders of the finite Chevalley groups, J. Algebra 3, 1966, 376-393.