Fakultät für Mathematik, Informatik und Naturwissenschaften der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen

Bachelorarbeit im Fach Mathematik

im März 2014

Hilbertpolynome von Moduln über nichtkommutativen G-Algebren

Andre Ranft

Lehrstuhl D für Mathematik

Erstgutachterin:	Zweitgutachterin:	Betreuer:
Prof. Dr. Eva Zerz	Prof. Dr. Gabriele Nebe	Dr. Viktor Levandovskyy
Lehrstuhl D für Mathematik	Lehrstuhl D für Mathematik	Lehrstuhl D für Mathematik
RWTH Aachen	RWTH Aachen	RWTH Aachen

Inhaltsverzeichnis

Danksagung

Hiermit möchte ich all jenen danken, die mich bei der Anfertigung meiner Bachelorarbeit unterstützt haben, insbesondere bei Johannes Hoffmann, Dr. Viktor Levandovskyy und Prof. Dr. Eva Zerz.

Einleitung

Ziel dieser Arbeit ist es, die Theorie der Gelfand-Kirillov-Dimension, der Hilbert-Poincaré-Reihe, der ersten und zweiten Hilbert-Reihe, des Hilbert-Polynoms sowie der Hilbertschen Multiplizität über G-Algebren zu entwickeln und schließlich Algorithmen zur Berechnung selbiger im Computeralgebrasystem SINGULAR zu implementieren.
Dazu wird zuerst der Begriff der G-Algebra eingeführt. Im Anschluss werden filtrierte und graduierte Algebren und Linksmoduln vorgestellt. Mit Hilfe einer Filtrierung von Linksmoduln von G-Algebren wird die vorgestellte Theorie zur Hilbert-Funktion und Gelfand-Kirillov-Dimension für G-Algebren spezialisiert und Zusammenhänge zwischen einer G-Algebra und dem kommutativen Polynomring herausgearbeitet. Im weiteren Verlauf wird die Hilbert-Poincaré-Reihe und das Hilbert-Polynom für G-Algebren definiert. Anschließend wird erklärt, wie sie mit der Hilbert-Poincaré-Reihe, dem Hilbert-Polynom und der Hilbertschen Multiplizität über dem kommutativen Polynomring in Beziehung stehen. Zum Abschluss werden die in SINGULAR implementierten Algorithmen vorgestellt.

1. Notation und grundlegende Begriffe

- K steht für einen Körper mit der Einheitengruppe $K^* = K \setminus \{0\}$.
- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ bezeichnet die Menge der natürlichen Zahlen.
- $\mathbb{Z}$ bezeichnet den Ring der ganzen Zahlen.
- $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ bezeichnen den Körper der rationalen beziehungsweise der reellen Zahlen, dabei ist $\mathbb{R}_+ := \{r \in \mathbb{R} \mid r \geq 0\}$.
- Für Variablen $x_1, \ldots, x_n$ und $\alpha := (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ verwenden wir die abkürzende Schreibweise: $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}$.
- $K[[x]] := \{\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} a_\alpha x^\alpha \mid a_\alpha \in K\}$ bezeichnet den Ring der formalen Potenzreihen über K mit folgender Addition und Multiplikation:

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} a_\alpha x^\alpha + \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} b_\alpha x^\alpha := \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} (a_\alpha + b_\alpha) x^\alpha,$$

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} a_\alpha x^\alpha \cdot \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} b_\alpha x^\alpha := \sum_{\gamma \in \mathbb{N}_0^n} \sum_{\alpha+\beta=\gamma} (a_\alpha b_\beta) x^\gamma.$$

- Für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ und $\omega \in \mathbb{R}_+^n$ definieren wir
  1) $|\alpha| := \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ sowie
  2) $|\alpha|_\omega := \langle \omega, \alpha \rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i \alpha_i$.

1.1. Ordnungen

Bemerkung 1.1. Eine totale Ordnung $\prec$ auf einer Menge nennt man *Wohlordnung*, wenn jede nichtleere Teilmenge der Menge ein kleinstes Element bezüglich der Ordnung besitzt.

Definition 1.2. Sei $<$ eine Wohlordnung auf $\mathbb{N}_0^n$ und $\omega \in \mathbb{R}_+^n$. Wir definieren eine *$\omega$-gewichtete Gradordnung* $<_\omega$ auf $\mathbb{N}_0^n$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ folgendermaßen:

$$\alpha <_\omega \beta \Leftrightarrow \begin{cases} |\alpha|_\omega < |\beta|_\omega \\ \text{oder} \\ |\alpha|_\omega = |\beta|_\omega \quad \text{und } \alpha < \beta. \end{cases}$$

Definition 1.3. Seien $n, m \in \mathbb{N}$. Wir definieren $\mathbb{N}_0^{n,m} := \mathbb{N}_0^n \times \{1, \ldots, m\}$. $\mathbb{N}_0^n$ lassen wir folgendermaßen auf $\mathbb{N}_0^{n,m}$ operieren: Für $(\alpha, i) \in \mathbb{N}_0^{n,m}$ und $\beta \in \mathbb{N}_0^n$ ist

$$\beta + (\alpha, i) = (\beta + \alpha, i).$$

Mit dieser Addition gilt dann auch $\beta + (0, i) = (\beta, i)$. Für eine totale Ordnung $<$ auf $\mathbb{N}_0^n$ sagen wir für $(\alpha, i), (\beta, j) \in \mathbb{N}_0^{n,m}$, dass $(\alpha, i) \leq_m (\beta, j)$ genau dann, wenn $i = j$ und $\alpha \leq \beta$ gilt.

Definition 1.4. Eine Modulordnung $<$ auf $\mathbb{N}_0^{n,m}$ ist eine totale Ordnung, die folgende Eigenschaften erfüllt:

1. Für alle $(\alpha, i) \in \mathbb{N}_0^{n,m}$ und $0 \neq \beta \in \mathbb{N}_0^n$ gilt $(\alpha, i) < \beta + (\alpha, i) = (\beta + \alpha, i)$ und
2. für $(\alpha, i), (\beta, j) \in \mathbb{N}_0^{n,m}$ und $\gamma \in \mathbb{N}_0^n$ mit $(\alpha, i) < (\beta, j)$ gilt $\gamma + (\alpha, i) < \gamma + (\beta, j)$.

Bsp. 1.5. Zwei simple Beispiele für solche Modulordnungen auf $\mathbb{N}_0^{n,m}$ sind die TOP-(term over position) und die POT-Ordnung (position over term). Für $(\alpha, i), (\beta, j) \in \mathbb{N}_0^{n,m}$ ist TOP definiert als:

$$(\alpha, i) < (\beta, j) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha < \beta \\ \text{oder} \\ \alpha = \beta \text{ und } i < j. \end{cases}$$

Wohingegen POT genau andersherum definiert ist:

$$(\alpha, i) < (\beta, j) \Leftrightarrow \begin{cases} i < j \\ \text{oder} \\ i = j \text{ und } \alpha < \beta. \end{cases}$$

2. G-Algebren

In diesem Kapitel sollen einige Grundlagen zu G-Algebren und GR-Algebren dargestellt werden. Es ist K stets ein Körper.

Definition 2.1 (Grundlegende Definitionen)**.**
Sei $T = T_n = K\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ die von $\{x_1 \ldots, x_n\}$ über K erzeugte, freie assoziative K-Algebra. Die *Monome* von T sind alle Wörter über der Menge $\{x_1, \ldots, x_n\}$:

$$\mathrm{Mon}(T) := \{x_{k_1}^{\alpha_1} x_{k_2}^{\alpha_2} \ldots x_{k_m}^{\alpha_m} \mid 1 \leq k_1, k_2, \ldots, k_m \leq n,\ \alpha_i \in \mathbb{N}_0\}.$$

Insbesondere ist $\mathrm{Mon}(T)$ eine K-Basis von T.
Die Menge der *Standardmonome* ist definiert als

$$\mathrm{Mon}_S(x_1, \ldots, x_n) := \{x_{k_1}^{\alpha_1} x_{k_2}^{\alpha_2} \ldots x_{k_m}^{\alpha_m} \mid 1 \leq k_1 < k_2 < \ldots < k_m \leq n,\ \alpha_i \in \mathbb{N}_0\} \subset \mathrm{Mon}(T).$$

Ab jetzt betrachten wir nur noch endlich erzeugte assoziative Algebren mit 1 und $K \subset A$. Darüber hinaus nehmen wir an, dass K zum Zentrum von A gehört (d.h. für alle $a \in A$ und $k \in K$ gilt $ak = ka$).

Definition 2.2. Sei A eine K-Algebra, die von den Variablen $x_1, \ldots, x_n$ erzeugt wird. Man sagt, dass A eine *Poincaré-Birkhoff-Witt-Basis* (PBW-Basis) hat, wenn $\mathrm{Mon}_S(x_1, \ldots, x_n)$ eine K-Basis von A ist.

Definition 2.3 (Monomordnung)**.**
Sei $<$ eine totale Wohlordnung auf $\mathbb{N}_0^n$ und A eine K-Algebra mit PBW-Basis, welche ein Integritätsbereich ist. Eine Ordnung $<=<_A$ nennt man Monomordnung auf A, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1) Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ impliziert $\alpha < \beta$ schon $x^\alpha <_A x^\beta$ und

2) für alle $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}_0^n$ mit $x^\alpha <_A x^\beta$ gilt $x^{\alpha+\gamma} <_A x^{\beta+\gamma}$.

Bemerkung 2.4. Analog zu (1.2) definiert man sich auch eine ω-gewichtete Monomordnung.

Definition 2.5. Jedes $f \in A \setminus \{0\}$ kann eindeutig geschrieben werden als $f = cx^\alpha + f'$ mit $c \in K^*$ und $x^{\alpha'} <_A x^\alpha$ für alle $0 \neq c'x^{\alpha'}$ von f'. Für solch ein f definieren wir

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}(f) &:= \{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \mid c_\alpha \neq 0\} \text{ als das \textit{Newtondiagramm} von } f,\\
\mathrm{lm}(f) &:= x^\alpha \text{ als das \textit{Leitmonom} von } f,\\
\mathrm{lc}(f) &:= c \text{ als den \textit{Leitkoeffizienten} von } f \text{ und}\\
\mathrm{le}(f) &:= \max \mathcal{N}(f) = \alpha \text{ als den \textit{Leitexponenten} von } f.
\end{aligned}$$

Definition 2.6. Betrachte nun die Algebra

$$A = K\langle x_1, \ldots, x_n \mid Q\rangle,$$

mit der Relationsmenge $Q := \{x_j x_i = c_{ij} \cdot x_i x_j + d_{ij},\ 1 \leq i < j \leq n\}$. Dabei sind die $c_{ij} \in K\setminus\{0\}$ und die $d_{ij} \in T_n$ für alle $1 \leq i < j \leq n$. Man nennt A eine *G-Algebra*, wenn folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:

1) Es existiert eine Monom-Wohlordnung $<$ auf $\mathbb{N}_0^n$ so, dass

$$\mathrm{lm}(d_{ij}) < x_i x_j \quad \text{für alle } i < j \text{ mit } d_{ij} \neq 0 \quad \text{und}$$

2) für alle $1 \leq i < j < k \leq n$ reduziert sich das Polynom

$$c_{ik}c_{jk} \cdot d_{ik}x_k - x_k d_{ij} + c_{jk} \cdot x_j d_{ik} - c_{ij} \cdot d_{ik}x_j + d_{jk}x_i - c_{ij}c_{ik} \cdot x_i d_{jk}$$

unter den Relationen von A zu 0. Die Matrizen $(c_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ und $(d_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ nennt man auch *Strukturmatrizen*. Man schreibt dann

$$A = K\langle x_1, \ldots, x_n \mid Q, \ <\rangle.$$

In der Literatur werden G-Algebren auch häufig *PBW-Algebren* (etwa in [3]) oder *Algebren von auflösbarem Typ* genannt.

Definition 2.7. Eine ω-gewichtete Ordnung $<_\omega$ mit $\omega \in \mathbb{R}_+^n$ nennen wir zulässig für eine G-Algebra $A = K\langle x_1, \ldots, x_n \mid Q, <_\omega\rangle$, wenn für alle $1 \leq i < j \leq n$ mit $d_{ij} \neq 0$ gilt, dass

$$\deg_\omega(d_{ij}) < \omega_i + \omega_j.$$

Dabei ist der ω-Grad $\deg_\omega$ für $0 \neq f \in A$ mit $f = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} c_\alpha x^\alpha$ definiert als

$$\deg_\omega(f) := \max\{|\alpha|_\omega \ ; \ \alpha \in \mathcal{N}(f)\}.$$

Bemerkung 2.8. Per Konstruktion haben G-Algebren eine PBW-Basis und sind Noethersche Integritätsbereiche (vgl. [7]). Somit kann man eine G-Algebra in den Variablen $x_1, \ldots, x_n$ auch als Verallgemeinerung eines Polynomringes in n Variablen betrachten.
Nun noch zu einigen Bezeichnungen:

- Falls $d_{ij} = 0$ für alle i, j, so nennt man die Algebra *quasi-kommutativ*.
- Falls alle $c_{ij} = 1$, so ist die G-Algebra vom *Lie-Typ*.
- Falls beides gilt, so ist die Algebra kommutativ.

Als Beispiel für G-Algebren vom *Lie-Typ* sind die Weyl-Algebren zu nennen:

Definition 2.9. Eine assoziative Algebra $A := K\langle x_1, \ldots, x_n, \partial_1, \ldots, \partial_n \mid Q, <\rangle$ mit einer zulässigen Ordnung $<$ und

$$Q := \{x_j x_i = x_i x_j, \ \partial_j \partial_i = \partial_i \partial_j, \ \partial_j x_i = x_i \partial_j + \delta_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n\},$$

wobei

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

das *Kronecker-Delta* bezeichnet, heißt *n-te Weyl-Algebra*.

Definition 2.10. Eine Algebra A nennt man *GR-Algebra* (*Gröbner-ready*), wenn es einen Automorphismus $\phi : A \to A$ und eine Wohlordnung $<_A$ gibt, sodass entweder $\phi(A)$ eine G-Algebra ist oder eine G-Algebra B und ein echtes zweiseitiges Ideal $I \subset B$ existiert, sodass $\phi(A) \cong B/I$.

2.1. Gröbnerbasen für Moduln von G-Algebren

Es bietet sich an, an dieser Stelle einige Aussagen zu Moduln über G-Algebren zu treffen. Sei in diesem Abschnitt $A = K\langle x_1, \dots, x_n \mid Q, <\rangle$ eine G-Algebra bezüglich einer totalen Ordnung $<$ auf $\mathbb{N}_0^n$ und einer Relationsmenge Q. Sei $<$ eine bezüglich dieser Ordnung definierte Modulordnung auf $\mathbb{N}_0^{n,m}$. Betrachte den freien A-Linksmodul A^m mit Standardbasis $e_1, \dots, e_m$. Es lässt sich jedes $f \in A^m$ darstellen als $f = \sum_{i=1}^m f_i e_i$ mit $f_i \in A$.
Betrachten wir nun für alle $(\alpha, i) \in \mathbb{N}_0^{n,m}$ das Element $x^{(\alpha,i)} = x^\alpha e_i \in A^m$. Da $\{x^\alpha \mid \alpha \in \mathbb{N}_0^n\}$ eine Basis von A ist, ist $\{x^{(\alpha,i)} \mid (\alpha, i) \in \mathbb{N}_0^{n,m}\}$ eine Basis von A^m. Dann können wir die $f \in A^m$ auch als $f = \sum_{(\alpha,i)\in\mathbb{N}_0^{n,m}} c_{(\alpha,i)} x^{(\alpha,i)}$ schreiben. Somit können wir unsere Definition für Leitmonome etc. aus (2.5) auch für $f \in A^m$ verwenden, wobei wir nun (α, i) statt α betrachten müssen:

Definition 2.11. Jedes $f \in A^m \setminus \{0\}$ kann eindeutig geschrieben werden als $f = cx^{(\alpha,i)} + f'$ mit $c \in K^*$ und $x^{(\alpha',j)} < x^{(\alpha,i)}$ für alle $0 \neq c_{(\alpha',j)} x^{(\alpha',j)}$ von f'. Für solch ein f definieren wir

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}(f) &:= \{(\alpha, i) \in \mathbb{N}_0^{n,m} \mid c_{(\alpha,i)} \neq 0\} \text{ als das } \textit{Newtondiagramm} \text{ von } f,\\
\mathrm{lm}(f) &:= x^{(\alpha,i)} \text{ als das } \textit{Leitmonom} \text{ von } f,\\
\mathrm{lc}(f) &:= c \text{ als den } \textit{Leitkoeffizienten} \text{ von } f,\\
\mathrm{le}(f) &:= \max \mathcal{N}(f) = (\alpha, i) \text{ als den } \textit{Leitexponenten} \text{ von } f \text{ und}\\
\mathrm{lcomp}(f) &:= \max\{j \mid (\alpha, j) \in \mathcal{N}(f)\} = i \text{ als die } \textit{Leitkomponente} \text{ von } f.
\end{aligned}$$

Folgender Satz stammt aus [3], dort ist auch der Beweis zu entnehmen.

Satz 2.12 ([3]).
Sei $F := \{f_1, \dots, f_t\} \subseteq A^m$ mit $f_i \neq 0$. Dann gibt es für alle $f \in A^m$ Vorfaktoren $h_1, \dots, h_t \in A$ und ein $r \in A^m$ so, dass

1. $f = \sum\limits_{i=1}^{t} h_i f_i + r$,
2. $r = 0$ *oder* $\mathcal{N}(r) \cap \bigcup\limits_{i=1}^{t} (\mathrm{le}(f_i) + \mathbb{N}_0^n) = \emptyset$ *und*
3. *falls* $r \neq 0$, *ist* $\mathrm{le}(r) \leq \mathrm{le}(f)$ *und für alle* $1 \leq i \leq t$ *ist entweder* $h_i = 0$ *oder*
$$\mathrm{le}(h_i) + \mathrm{le}(f_i) \leq \mathrm{le}(f).$$

Definition 2.13. Sei F eine Teilmenge von A^m. Wir definieren die *Exponentenmenge* von F als
$$\mathrm{Exp}(F) := \{\mathrm{le}(f) \mid 0 \neq f \in F\}.$$

Definition 2.14. Sei $0 \neq M$ ein Linksuntermodul von A^m und $G := \{g_1, \dots, g_t\}$ eine Teilmenge von M mit $g_i \neq 0$. Wir nennen G eine *Gröbnerbasis* von M, wenn

$$\mathrm{Exp}(M) = \bigcup_{i=1}^{t} (\mathrm{le}(g_i) + \mathbb{N}_0^n).$$

3. Filtration und Graduierungen

In diesem Kapitel werden graduierte Algebren und graduierte Moduln eingeführt und einige ihrer Eigenschaften dargestellt. Darüber hinaus werden filtrierte Algebren und Moduln vorgestellt.

3.1. Graduierte und filtrierte Algebren

Definition 3.1. Eine Algebra A über einen Körper K nennt man eine $\mathbb{N}_0$-graduierte K-Algebra, wenn für alle $n \in \mathbb{N}_0$ K-Untervektorräume A_n von A existieren, die Folgendes erfüllen:

1) $A = \bigoplus_{n\geq 0} A_n$ und

2) $A_n A_m \subseteq A_{n+m}$ für alle $m, n \geq 0$.

Insbesondere ist $1 \in A_0$, sodass $K \subseteq A_0$ und A_0 eine Teilalgebra von A ist. Falls $0 \neq a \in A_n$, so nennt man a *homogen* vom Grad n. Aufgrund der direkten Summe kann jedes Element $a \in A$ auf eindeutige Weise geschrieben werden als $a = a_{k_1} + \ldots + a_{k_s}$. Dabei gilt $0 \neq a_{k_j} \in A_{k_j}$ für alle $1 \leq j \leq s$. Die a_{k_j} nennt man *homogene Komponenten* von a.

Bemerkung 3.2. Wir schreiben ab sofort graduierte Algebra statt $\mathbb{N}_0$-graduierte Algebra.

Definition 3.3. Sei A eine graduierte Algebra. Ein Ideal I von A nennen wir *homogen*, wenn es eine Erzeugermenge gibt, die aus homogenen Elementen besteht.

Definition 3.4. Man nennt eine Algebra A über K *aufsteigend* $\mathbb{N}_0$*-filtriert*, wenn für alle $i \in \mathbb{N}_0$ ein Untervektorraum $F_iA \subseteq A$ existiert, so dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

1) $1 \in F_0A$,

2) $F_iA \subseteq F_jA$ für $i \leq j$,

3) $F_iA \cdot F_jA \subseteq F_{i+j}A$ und

4) $A = \bigcup_{i\geq 0} F_iA$.

Die Menge $FA := \{F_iA \mid i \in \mathbb{N}_0\}$ heißt *Filtrierung* von A.

Bemerkung 3.5. Ab sofort nennen wir $\mathbb{N}_0$-filtrierte Algebren einfach filtrierte Algebren.

Definition 3.6. Sei A eine filtrierte K-Algebra mit Filtrierung $FA := \{F_iA \mid i \in \mathbb{N}_0\}$. Man nennt FA *lokal endlich*, wenn für alle $s \in \mathbb{N}_0$ gilt, dass F_sA ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum ist.

Definition 3.7. Eine assoziierte graduierte Algebra $\mathrm{Gr}(A)$ einer filtrierten Algebra A ist definiert als

$$\mathrm{Gr}(A) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} G(A)_i \quad \text{mit } G(A)_i = F_iA/F_{i-1}A \text{ und } F_{-1}A = \{0\}$$

mit folgender induzierter Multiplikation:

$$(a_i + F_{i-1}A)(a_j + F_{j-1}A) = a_i a_j + F_{i+j-1}A.$$

Für eine kürzere Schreibweise verwenden wir nun für $a \in F_nA/F_{n-1}A$ das Symbol $\sigma(a) = a + F_{n-1}A$.

Satz 3.8. *Sei A eine filtrierte K-Algebra mit Filtrierung FA und assoziierter graduierter Algebra* $\mathrm{Gr}(A)$. *Wenn* $\mathrm{Gr}(A)$ *links Noethersch ist, so ist auch A links Noethersch.*

Für den Beweis müssen wir uns noch anschauen, was mit Idealen von A in $\mathrm{Gr}(A)$ passiert:

Bemerkung 3.9. Sei A eine filtrierte K-Algebra mit Filtration FA. Jedes Linksideal I von A lässt sich folgendermaßen mit einem graduierten Linksideal $\mathrm{Gr}(I)$ von $\mathrm{Gr}(A)$ in Verbindung setzen:

$$G(I)_n = [(I + A_{n-1}) \cap F_nA]/F_{n-1}A \subseteq F_nA/F_{n-1}A \quad \text{und} \quad \mathrm{Gr}(I) = \bigoplus_{n \geq 0} G(I)_n.$$

Für die Multiplikation von $\sigma(i) \in G(I)_n$ und $\sigma(a) \in G(A)_m$ folgt dann

$$\sigma(a)\sigma(r) = ar + F_{n+m-1}A \in [(I \cap F_{n+m-1}A) \cap F_{n+m}A]/F_{n+m-1}A.$$

Somit ist $\mathrm{Gr}(I)$ ein Linksideal von $\mathrm{Gr}(A)$.

Nun zum

Beweis: [von (3.8)].
Sei

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \ldots \subseteq I_n \subseteq \ldots$$

eine aufsteigende Kette von Linksidealen in A. Sei

$$\mathrm{Gr}(I_1) \subseteq \mathrm{Gr}(I_2) \subseteq \ldots \subseteq \mathrm{Gr}(I_n) \subseteq \ldots$$

die korrespondierende aufsteigende Kette von graduierten Linksidealen in $\mathrm{Gr}(A)$. Da $\mathrm{Gr}(A)$ links Noethersch ist, existieren Linksideale $I_j \subseteq I_{j+1}$ von A, für die gilt, dass $\mathrm{Gr}(I_j) = \mathrm{Gr}(I_{j+1})$. Für den Beweis reicht es zu zeigen, dass daraus $I_j = I_{j+1}$ folgt.
Betrachte dazu $0 \neq r \in I_{j+1}$ und definiere $m := \min\{n \in \mathbb{N}_0 \mid r \in F_nA\}$. Somit ist $r \notin F_{m-1}A$. Folglich ist $\sigma(r) = r + F_{m-1}A \in G(I_{j+1})_m = G(I_j)_m$. Nun wählen wir ein $r_m \in I_j$ so, dass $r - r_m \in F_{m-1}(I_{j+1}) := F_{m-1}A \cap I_{j+1}$. Falls nun $r - r_m = 0$, so sind wir fertig. Andernfalls wiederholen wir den obigen Schritt so häufig wie nötig, um r als endliche Summe von Elementen in I_j zu schreiben. Dies gelingt in einer endlichen Anzahl von Schritten, da wir den "Filtrations-Index" verkleinern. Somit ist $I_j = I_{j+1}$ wie gewünscht.

□

3.2. Die ω-Filtrierung einer G-Algebra

In diesem Abschnitt fixieren wir einen Körper K und betrachten die G-Algebra $A = K\langle x_1, \ldots, x_n \mid Q, <_\omega\rangle$ bezüglich einer Relationsmenge Q und einer zulässigen gewichteten Ordnung $<_\omega$ für $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \in \mathbb{N}_0^n$.

Bemerkung 3.10. Ab jetzt betrachten wir nur noch Gewichtsvektoren $\omega \in \mathbb{N}_0^n$.

Im Folgenden wollen wir uns einige Eigenschaften des ω-Grades aus (2.7) anschauen:

Lemma 3.11 (Eigenschaften von $\mathbf{deg}_{\boldsymbol{\omega}}$). *Sei $f \in A \setminus \{0\}$. Dann gilt*

1) $\deg_\omega(f) = \mid \mathrm{le}(f)\mid_\omega$, *2)* $\deg_\omega(f+g) \leq \max\{\deg_\omega(f),\ \deg_\omega(g)\}$ *für alle* $f, g \in A$ *mit* $f, g \neq 0$ *und* $f + g \neq 0$ *sowie*

3) $\deg_\omega(fg) = \deg_\omega(f) + \deg_\omega(g)$ *für alle* $0 \neq f, g \in A$.

Beweis: 1) Es gilt $\mathrm{le}(f) \geq_\omega \alpha$ für alle $\alpha \in \mathcal{N}(f)$. Somit ist $|\alpha|_\omega \leq_\omega |\mathrm{le}(f)|_\omega$. Da $\mathrm{le}(f) \in \mathcal{N}(f)$, folgt schließlich $\deg_\omega(f) = |\mathrm{le}(f)|_\omega$.

2) Mit 1) und Eigenschaften des Leitexponenten gilt

$$\begin{aligned}\deg_\omega(f+g) = |\mathrm{le}(f+g)|_\omega &\leq \max\{|\mathrm{le}(f)|_\omega, |\mathrm{le}(g)|_\omega\}\\ &= \max\{\deg_\omega(f), \deg_\omega(g)\}.\end{aligned}$$

3) Analog zum Beweis von 2) gilt

$$\begin{aligned}\deg_\omega(fg) = |\mathrm{le}(fg)|_\omega &= |\mathrm{le}(f)|_\omega + |\mathrm{le}(g)|_\omega\\ &= \deg_\omega(f) + \deg_\omega(g).\end{aligned}$$

□

Damit wir G-Algebren und filtrierte Algebren in Verbindung setzen können, definieren wir für $s \in \mathbb{N}_0$

$$F_s^\omega A := \{f \in A \mid |\alpha|_\omega \leq s, \quad \text{für alle } \alpha \in \mathcal{N}(f)\}. \tag{1}$$

Lemma 3.12. *Für alle* $f \in A$ *sind äquivalent:*

a) $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} c_\alpha x^\alpha \in F_s^\omega A$,

b) $|\mathrm{le}(f)|_\omega \leq s$.

Beweis: "*a)* $\Rightarrow$ *b)*": Für $f \in F_s^\omega A$ gilt per Definition $|\alpha|_\omega \leq s$ für alle $\alpha \in \mathcal{N}(f)$, also insbesondere auch für $\mathrm{le}(f)$.
"*b)* $\Rightarrow$ *a)*": Für alle $\alpha \in \mathcal{N}(f)$ gilt $\alpha \leq_\omega \mathrm{le}(f)$. Somit gilt insbesondere $|\alpha|_\omega \leq |\mathrm{le}(f)|_\omega \leq s$. Nach Definition ist somit $f \in F_s^\omega A$. □

Lemma 3.13. *Die Menge* $\{F_s^\omega A \mid s \in \mathbb{N}_0\}$ *ist eine Filtrierung von* A.

Beweis: Wir gehen die Eigenschaften aus der Definition 3.4 einzeln durch:

1) Es ist $|\mathrm{le}(1)|_\omega = 0$. Somit ist $1 \in F_0^\omega A$.

2) Für ein $f \in F_s^\omega A$ gilt $|\mathrm{le}(f)|_\omega \leq s < s+1$. Also ist auch $f \in F_{s+1}^\omega A$ und $F_s^\omega A \subseteq F_{s+1}^\omega A$.

3) Betrachte $f \in F_s^\omega A$ und $g \in F_t^\omega A$ mit $|\mathrm{le}(f)|_\omega \leq s$ und $|\mathrm{le}(g)|_\omega \leq t$. Für f und g folgt mit (3.12) aus

$$|\mathrm{le}(fg)|_\omega = |\mathrm{le}(f + \mathrm{le}(g))|_\omega = |\mathrm{le}(f)|_\omega + |\mathrm{le}(g)|_\omega \leq s + t,$$

dass $F_s^\omega A \cdot F_t^\omega A \subseteq F_{s+t}^\omega A$.

4) Einerseits gilt $F_s^\omega A \subseteq A$ für alle $s \in \mathbb{N}_0$. Andererseits gibt es für alle $f \in A$ ein $s \in \mathbb{N}_0$ so, dass $|\mathrm{le}(f)|_\omega \leq s$. Also ist $f \in F_s^\omega A$. Somit ist $A = \bigcup_{s \geq 0} F_s^\omega A$.

□

Bemerkung 3.14. Die zu $F_s^\omega A$ gehörende assoziierte graduierte Algebra nennen wir $\mathrm{Gr}^\omega(A)$:

$$\mathrm{Gr}^\omega(A) := \bigoplus_{i=0}^{\infty} G^\omega(A)_i \quad \text{mit } G^\omega(A)_i = F_i^\omega A / F_{i-1}^\omega A \text{ und } F_{-1}^\omega A = \{0\}.$$

Für $\omega = (1, \dots, 1) \in \mathbb{N}^n$ schreiben wir auch $F_s A$ und $\mathrm{Gr}(A)$ statt $F_s^\omega A$ beziehungsweise $\mathrm{Gr}^\omega(A)$.

Bsp. 3.15. Betrachte $A = K[x, y]$ und $\omega = (2, 3)$. Dann ist

$$F_s^\omega A := \{f \in A \mid |\alpha|_\omega \leq s, \quad \text{für alle } \alpha \in \mathcal{N}(f)\},$$

eine Filtrierung von A. Für die graduierte assoziierte Algebra (vgl. 3.14) gilt für alle $i \in \mathbb{N}_0$, dass $G^\omega(A)_i = \langle \{x^\alpha \in A \ ; \ |(\alpha)|_\omega = i\} \rangle$. Die ersten $G^\omega(A)_i$ haben die Form

$$\begin{gathered} G^\omega(A)_0 = K, \quad G^\omega(A)_1 = \emptyset, \quad G^\omega(A)_2 = Kx, \quad G^\omega(A)_3 = Ky, \\ G^\omega(A)_4 = Kx^2, \quad G^\omega(A)_5 = Kxy \quad \text{und} \quad G^\omega(A)_6 = Kx^3 \oplus Ky^2. \end{gathered}$$

3.3. Graduierte und filtrierte Moduln

In diesem Abschnitt werden nur Linksmoduln behandelt, die Definitionen und Aussagen lassen sich auch entsprechend für Rechtsmoduln umformulieren.

Definition 3.16. Sei $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$ eine graduierte K-Algebra. Eine ($\mathbb{N}_0$-)Graduierung eines A-Linksmoduls M ist eine Vektorraumzerlegung

$$M = \bigoplus_{n \geq 0} M_n \quad \text{so, dass } A_n M_m \subseteq M_{n+m} \quad \text{für alle } m, n \geq 0.$$

Ein graduierter A-Linksmodul M ist ein A-Linksmodul mit einer *festen* Graduierung.
Falls $0 \neq m \in M_n$, so nennt man m *homogen* vom Grad n. Für jedes $m \in M$ gibt es eine eindeutige endliche Darstellung $m = m_{k_1} + m_{k_2} + \ldots + m_{k_s}$ mit $0 \neq m_{k_j} \in M_{k_j}$ für alle $1 \leq j \leq s$. Die m_{k_j} werden *homogene Komponenten* von M genannt.

Definition 3.17. Sei A eine graduierte K-Algebra, M ein graduierter A-Linksmodul und N ein A-Linksuntermodul von M. Man nennt N *graduierter Untermodul*, wenn $N = \bigoplus_{n \geq 0}(M_n \cap N)$ oder äquivalent, wenn für jedes $n \in N$ alle homogenen Komponenten von n in N sind.

Bemerkung 3.18. Sei A eine graduierte K-Algebra und seien M und N graduierte A-Linksmoduln, dann ist M/N auch ein graduierter A-Linksmodul mit folgender Struktur:

$$M/N = \bigoplus_{n \geq 0} (M_n + N)/N.$$

Definition 3.19. Sei A eine graduierte K-Algebra und seien M und N graduierte A-Linksmoduln. Einen Homomorphismus $\phi : M \to N$ nennt man *graduiert*, wenn $\phi(M_n) \subseteq N_n$ für alle $n \geq 0$ gilt.

Definition 3.20. Sei A eine filtrierte K-Algebra mit Filtrierung FA. Eine *Filtrierung* auf einem A-Linksmodul M ist eine Menge $FM = \{F_n M \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ von Untervektorräumen von M mit folgenden Eigenschaften:

1) $F_iM \subseteq F_jM$ für $i \leq j$,

2) $(F_nA)(F_mM) \subseteq F_{n+m}M$ für alle $n, m \geq 0$ und

3) $M = \bigcup_{n \geq 0} F_nM$.

Einen Modul mit solch einer Filtrierung nennt man *filtrierten Modul.*

Definition 3.21. Sei A eine K-Algebra mit Filtrierung FA. Seien darüber hinaus M, N zwei filtrierte A-Linksmoduln mit Filtrierungen $FM := \{F_sM \mid s \in \mathbb{N}_0\}$ und $FN := \{F_sN \mid s \in \mathbb{N}_0\}$. Wir nennen einen Homomorphismus $\phi : M \to N$ *filtriert*, wenn $\phi(F_jM) \subseteq F_j(N)$ für alle $j \in \mathbb{N}_0$ gilt.

Bemerkung 3.22. Analog zu filtrierten Algebren lässt sich auch zu filtrierten Moduln ein assoziierter graduierter Modul finden:
Sei A eine filtrierte K-Algebra mit Filtrierung FA und M ein filtrierter A-Linksmodul mit Filtrierung FM, dann ergibt sich folgender Vektorraum:

$$\mathrm{Gr}(M) = \bigoplus_{n=1}^{\infty} F_nM/F_{n-1}M := \bigoplus_{n=1}^{\infty} G(M)_n \quad \text{mit } F_{-1}M = \{0\}.$$

Für eine wichtige Aussage über exakte Sequenzen von filtrierten Moduln ist folgende Definition hilfreich:

Definition 3.23. Sei A eine K-Algebra mit Filtrierung FA. Seien darüber hinaus M, N zwei filtrierte A-Linksmoduln mit Filtrierungen $FM := \{F_sM \mid s \in \mathbb{N}_0\}$ und $FN := \{F_sN \mid s \in \mathbb{N}_0\}$. Wir nennen einen filtrierten Homomorphismus $\phi : M \to N$ *strikt*, wenn für alle $j \in \mathbb{N}_0$ gilt, dass $\phi(F_jM) = \phi(M) \cap F_jN$.

Satz 3.24 ([10])**.**
Sei A eine filtrierte K-Algebra und sei

$$L \overset{\psi}{\to} M \overset{\phi}{\to} N$$

eine exakte Sequenz von filtrierten A-Linksmoduln und filtrierten Homomorphismen. Dann ist die Sequenz

$$\mathrm{Gr}(L) \overset{\mathrm{Gr}(\psi)}{\to} \mathrm{Gr}(M) \overset{\mathrm{Gr}(\phi)}{\to} \mathrm{Gr}(N)$$

genau dann exakt, wenn ϕ und ψ strikte filtrierte Homomorphismen sind.

3.4. Die ω-Filtrierung eines Moduls

Analog zur ω-Filtrierung einer G-Algebra fixieren wir in diesem Abschnitt auch einen Körper K und eine G-Algebra $A = K\langle x_1, \ldots, x_n \mid Q, <_\omega\rangle$ bezüglich einer Relationsmenge Q und einer zulässigen gewichteten Ordnung $<_\omega$ für $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \in \mathbb{N}_0^n$.

Definition 3.25. Wir definieren den ω-*Grad* für $0 \neq f \in A^m$ mit $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} c_\alpha x^{(\alpha,i)}$ als

$$\deg_\omega(f) := \max\{|\alpha|_\omega \mid (\alpha, i) \in \mathcal{N}(f)\}.$$

In Zukunft verwenden wir $|(\alpha, i)|_\omega := |\alpha|_\omega$ für $(\alpha, i) \in \mathcal{N}(f)$.

Mit einem ähnlichen Beweis wie bei (3.11) gilt dank Eigenschaften des Leitexponenten:

Lemma 3.26. *Sei A^m so wie oben definiert und $0 \neq f \in A^m$. Dann gilt*

1) $\deg_\omega(f) = \mid \operatorname{le}(f)|_\omega$,

2) $\deg_\omega(f+g) \leq \max\{\deg_\omega(f),\ \deg_\omega(g)\}$ *für alle $f, g \in A^m$ mit $f, g \neq 0$ und $f + g \neq 0$ sowie*

3) $\deg_\omega(fg) = \deg_\omega(f) + \deg_\omega(g)$ *für alle $0 \neq f \in A$ und $0 \neq g \in A^m$.*

Analog zu (3.13) und (3.12) gelten folgende zwei Aussagen:

Korollar 3.27. *Die Menge $\{F_s^\omega M \mid s \in \mathbb{N}_0\}$ ist eine Filtrierung einem A-Linksmodul M für*

$$F_s^\omega M := \{f \in M \mid |(\alpha, i)|_\omega \leq s, \quad \text{für alle } (\alpha, i) \in \mathcal{N}(f)\}. \tag{2}$$

Korollar 3.28. *Für alle $f \in M$ sind äquivalent:*

a) $f = \sum c_{(\alpha,i)} x^{(\alpha,i)} \in F_s^\omega M$,

b) $|\operatorname{le}(f)|_\omega \leq s$.

Bemerkung 3.29. Den zu $F_s^\omega M$ gehörende assoziierte graduierte $\operatorname{Gr}(A)$-Modul bezeichnen wir mit $\operatorname{Gr}^\omega(M)$:

$$\operatorname{Gr}^\omega(M) = \bigoplus_{n=1}^{\infty} F_n^\omega M / F_{n-1}^\omega M := \bigoplus_{n=1}^{\infty} G^\omega(M)_n \quad \text{mit } F_{-1}^\omega M = \{0\}.$$

Für $\omega = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{N}^n$ schreiben wir auch $F_s M$ und $\operatorname{Gr}(M)$ statt $F_s^\omega M$ beziehungsweise $\operatorname{Gr}^\omega(M)$.

Bsp. 3.30. Seien A und ω so wie in Beispiel 3.15. Wir wollen untersuchen, ob

$$I := \langle x^3 - y^2 \rangle \text{ und } J := \langle x + y \rangle$$

graduierte $\operatorname{Gr}^\omega(A)$-Untermoduln sind. Dazu müssen wir überprüfen, ob $I = \bigoplus_{n \geq 0}(G(A)_n \cap I)$ beziehungsweise ob $J = \bigoplus_{n \geq 0}(G(A)_n \cap J)$ gilt.
Zuerst zu I: Es ist $x^3 - y^2 \in Kx^3 \oplus Ky^2 = G(A)_6$. Somit ist $I = \bigoplus_{n \geq 0}(G(A)_n \cap I)$ und I ein graduierter $\operatorname{Gr}(A)$-Untermodul.
Für J gilt jedoch $x+y \notin G(A)_i$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$. Somit ist $G(A)_i \cap J = \emptyset$ und $J \neq \bigoplus_{n \geq 0}(G(A)_n \cap J)$ und J kein graduierter $\operatorname{Gr}(A)$-Untermodul.

4. Die Hilbert-Funktion und die Gelfand-Kirillov-Dimension

In diesem Kapitel werden die in Kapitel eins und zwei gelegten Grundlagen genutzt, um mit Hilfe der Hilbert-Funktion die Gelfand-Kirillov-Dimension für G-Algebren einzuführen. Dies geschieht weitgehend wie in [3]. Anschließend wird die Hilbert-Poincaré-Reihe eingeführt und mit ihrer Hilfe das Hilbert-Polynom definiert.

4.1. Die Gelfand-Kirillov-Dimension einer K-Algebra

In diesem Abschnitt setzen wir A als endlich erzeugte K-Algebra fest.

Definition 4.1. Man nennt einen endlich-dimensionalen K-Vektorraum $V \subseteq A$ mit 1 einen *erzeugenden Unterraum* von A, wenn er A als K-Algebra erzeugt.

Lemma 4.2. *Sei V ein erzeugender Unterraum von A. Die Menge $FA := \{V_s \mid s \in \mathbb{N}_0\}$ mit $V_0 := K$ und*

$$V_s := \left\{ \sum_{i=0}^{n} v_{i_1} \cdot \ldots \cdot v_{i_s} \mid v_{i_j} \in V \text{ für } 1 \leq j \leq s,\ n \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

für $s \geq 1$ beschreibt eine Filtrierung von A.

Beweis: Für den Beweis gehen wir die einzelnen Eigenschaften der Definition 3.4 durch:

1) Da $1 \in K$ ist $1 \in V_0$.

2) Seien $k, l \in \mathbb{N}_0$ mit $k < l$. Sei $w_k = \sum_{i=0}^{n_k} w_{i_1} \cdot \ldots \cdot w_{i_k} \in V_k$, dann ist, da $k < l$, insbesondere auch $w_k \in V_l$ indem man die überschüssigen Faktoren als 1 wählt und n_k beibehält.

3) Seien $k, l \in \mathbb{N}_0$ und $w_k = \sum_{i=0}^{n_k} w_{i_1} \cdot \ldots \cdot w_{i_k} \in V_k$ sowie $q_l = \sum_{i=0}^{n_l} q_{i_1} \cdot \ldots \cdot q_{i_l} \in V_l$. Dann ist

$$\begin{aligned} w_k \cdot q_l &= \left(\sum_{i=0}^{n_k} w_{i_1} \cdot \ldots \cdot w_{i_k} \right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{n_l} q_{i_1} \cdot \ldots \cdot q_{i_l} \right) \\ &= \sum_{i=0}^{n_k} \sum_{j=0}^{n_l} w_{i_1} \cdot \ldots \cdot w_{i_k} q_{j_1} \cdot \ldots \cdot q_{j_l} \\ &= \sum_{i=0}^{n_m} c_{i_1} \cdot \ldots \cdot c_{i_{k+l}} \text{ für entsprechende } c_{i_h} \text{ und } m = (n_k + 1) \cdot (n_l + 1). \end{aligned}$$

Somit ist $w_k \cdot q_l \in V_{l+k}$ wie gewollt.

4) Da V ein erzeugender Unterraum von A ist und in $\bigcup_{s \geq 0} V_s$ alle Linearkombinationen von Elementen in V enthalten sind, folgt sofort $A = \bigcup_{s \geq 0} V_s$.

□

Definition 4.3. Seien V und A so wie oben definiert. Die Funktion

$$HF_V : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0,\ s \mapsto \dim_K(V_s),$$

nennt man *Hilbert-Funktion* von A bezüglich V.

Definition 4.4. Eine positive Funktion $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_+^*$ nennt man *letztendlich monoton steigend*, wenn es ein $n_0 \in \mathbb{N}_0$ gibt, sodass $f(n) \leq f(n+1)$ für alle $n \geq n_0$.

Lemma 4.5. *Sei $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_+^*$ eine letztendlich monoton steigende Funktion und $D(f)$ die Menge von allen $a \in \mathbb{R}$, für welche es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ und ein $C = C(a) \in \mathbb{R}$ so gibt, dass $f(n) \leq Cn^a$ für alle $n \geq n_0$ gilt:*

$$D(f) := \{a \in \mathbb{R} \mid \exists n_0 \in \mathbb{N}, C \in \mathbb{R} : \forall n \geq n_0 : f(n) \leq Cn^a\}.$$

Für dieses $D(f)$ gilt

$$\inf(D(f)) = \limsup_{n\to\infty}(\log_n(f(n))).$$

Hierbei ist $\log_n$ der Logarithmus zur Basis n und $\inf(\emptyset) := \infty$.

Beweis: Sei $s := \limsup(\log_n(f(n)))$.
Wir zeigen zuerst $\inf(D(f)) \geq s$.
Wenn $D(f) = \emptyset$, dann gilt klarerweise $s \leq \inf(D(f))$. Sei nun $a \in D(f) \neq \emptyset$, also $f(n) \leq Cn^a$ für alle $n \geq n_0$ für entsprechendes C und n_0. Dann gilt mit der Monotonie des Logarithmus

$$\log_n(f(n)) \leq \log_n(Cn^a) = a + \log_n(C).$$

Insbesondere ist dann aber auch $s \leq \limsup(a + \log_n(C))$. Da $a \in D(f)$ beliebig gewählt wurde, gilt somit $s \leq \inf(D(f))$.
Nun zeigen wir $s \geq \inf(D(f))$. Für $s = \infty$ gilt die Ungleichung offensichtlich. Sei nun $s < \infty$. Für ein festes $\varepsilon > 0$ gilt dann $\log_n(f(n)) < s + \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. Somit ist $f(n) < n^{s+\varepsilon}$, woraus $s + \varepsilon \in D(f)$ folgt. Da ε beliebig größer 0 gewählt wurde, ist $s \geq \inf(D(f))$. □

Definition 4.6. Sei $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_+^*$ eine letztendlich monoton steigende Funktion. Wir definieren den *Grad des Anstiegs* von f als

$$d(f) := \inf(D(f)) \stackrel{(4.5)}{=} \limsup_{n\to\infty}(\log_n(f(n))) \ \in [0, \infty].$$

Wir sagen, dass f polynomiell beschränktes Wachstum hat, wenn $d(f)$ endlich ist. Dies gilt genau dann, wenn $D(f) \neq \emptyset$.

Lemma 4.7. *Seien $f, g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_+^*$ zwei letztendlich monoton steigende Funktionen. Dann gilt:*

1) *Wenn es $a, b \in \mathbb{N}$ mit $g(n) \leq f(an + b)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gibt, ist $d(g) \leq d(f)$,*

2) *es ist $d(f + g) = \sup\{d(f), d(g)\}$ und*

3) *wenn es ein Polynom $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ mit $f(n) = P(n)$ für ein $n \gg 0$ (insbesondere größer als n_0 von f) gibt, so ist $d(f) = \deg(P(x))$.*

Beweis: 1) Aus $g(n) \leq f(an+b)$ folgt insbesondere $D(f) \subseteq D(g)$. Somit ist

$$d(f) = \inf(D(f)) \geq \inf(D(g)) = d(g).$$

2) Zuerst zeigen wir, dass $D(f+g) = D(f) \cap D(g)$. Da f und g positiv sind, gilt $f(n) \leq (f+g)(n)$ und $g(n) \leq (f+g)(n)$. Somit gilt analog zum Beweis von 1), dass $D(f+g) \subseteq D(f) \cap D(g)$. Betrachten wir nun ein $a \in D(f) \cap D(g)$. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ so, dass $f(n) \leq C_f n^a$ und $g(n) \leq C_g n^a$ für $C_f, C_g > 0$. Folglich ist $(f+g)(n) \leq (C_f + C_g)n^a$, sprich $a \in D(f+g)$. Schließlich folgt aus dieser Gleichheit, dass

$$d(f+g) = \inf(D(f+g)) = \inf(D(f) \cap D(g)) = \sup\{\inf(D(f)), \inf(D(g))\} = \sup\{d(f), d(g)\}.$$

3) Sei $P(x) = a_0 + \ldots + a_d x^d$. Dann gilt mit 2), da in diesem Fall das Maximum wirklich existiert, dass

$$d(f) = \inf(D(f)) = \max\{D(a_0), \ldots, D(a_d n^d)\} = d.$$

□

Für die Definition der Gelfand-Kirillov-Dimension fehlt uns nun noch folgende Aussage:

Satz 4.8. *Sei A eine endlich erzeugte K-Algebra und seien V und V' zwei erzeugende Unterräume von A. Dann gilt*

$$d(HF_V) = d(HF_{V'}).$$

Beweis: Da V' ein erzeugender Unterraum von A ist, gibt es ein $a \in \mathbb{N}_0$ so, dass $V' \subseteq V_a$. Somit ist $HF_{V'}(s) \leq HF_V(as)$. Nach Lemma 4.7 1) gilt dann $d(HF_{V'}) \leq d(HF_V)$. Analog lässt sich auch $d(HF_{V'}) \geq d(HF_V)$ und somit die Gleichheit zeigen. □

Definition 4.9. Sei A eine endlich erzeugte K-Algebra mit einem endlich-dimensionalen erzeugenden Unterraum V. Die *Gelfand-Kirillov-Dimension* von A ist definiert als

$$\mathrm{GKdim}(A) := d(HF_V).$$

Bsp. 4.10. 1. Sei $A := K[x]$. Die Menge $V := \{1, x\}$ ist ein erzeugender Unterraum von A. Es ist $\dim_K(V_n) = n+1$. Somit ist $HF_V(n) = n+1$. Folglich ist

$$\mathrm{GKdim}(A) = \limsup(\log_n(n+1)) = 1.$$

2. Betrachten wir nun $A := K[x, y]$ mit erzeugendem Unterraum $V := \{1, x, y\}$. Es ist

$$\dim_K(V_n) = \binom{n+2}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 1.$$

Somit folgt

$$\mathrm{GKdim}(A) = \limsup(\log_n(\frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 1)) = 2.$$

Analog erhält man für $A := K[x_1, \ldots, x_n]$, dass $\mathrm{GKdim}(A) = n$ ist.

4.2. Die Gelfand-Kirillov-Dimension eines Linksmoduls einer K-Algebra

In diesem Abschnitt sei A eine endlich erzeugte K-Algebra und M ein endlich erzeugter A-Linksmodul.

Definition 4.11. Man nennt einen endlich-dimensionalen K-Untervektorraum U von M einen *erzeugenden Unterraum* von M, wenn $AU = M$.

Lemma 4.12. *Sei V ein erzeugender Unterraum von A. Die Menge $FM := \{V_sU \mid s \in \mathbb{N}_0\}$ mit V_s wie in (4.2) ist eine Filtrierung von M.*

Beweis: Für den Beweis gehen wir die einzelnen Eigenschaften der Definition 3.20 durch:

1) Seien $k, l \in \mathbb{N}_0$ mit $k < l$. Sei $w_k = (\sum_{i=0}^{n_k} w_{i_1} \cdot \ldots \cdot w_{i_k})u \in V_kU$, dann ist, da $k < l$, insbesondere auch $w_k \in V_lU$, indem man die überschüssigen Faktoren als 1 wählt und n_k beibehält.

2) Seien $k, l \in \mathbb{N}_0$ und $w_k = (\sum_{i=0}^{n_k} w_{i_1} \cdot \ldots \cdot w_{i_k})u_k \in V_kU$ sowie $q_l = (\sum_{i=0}^{n_l} q_{i_1} \cdot \ldots \cdot q_{i_l})u_l \in V_lU$. Dann ist

$$\begin{aligned} w_k \cdot q_l &= \left(\sum_{i=0}^{n_k} w_{i_1} \cdot \ldots \cdot w_{i_k}\right) u_k \cdot \left(\sum_{i=0}^{n_l} q_{i_1} \cdot \ldots \cdot q_{i_l}\right) u_l \\ &= \left(\sum_{i=0}^{n_k} \sum_{j=0}^{n_l} w_{i_1} \cdot \ldots \cdot w_{i_k} q_{j_1} \cdot \ldots \cdot q_{j_l}\right) u_k u_l \\ &= \left(\sum_{i=0}^{n_m} c_{i_1} \cdot \ldots \cdot c_{i_{k+l}}\right) u_h \text{ für entsprechende } c_{i_h}, u_h \text{ und } m = (n_k + 1) \cdot (n_l + 1). \end{aligned}$$

Infolgedessen ist $w_k \cdot q_l \in V_{l+k}U$ wie gewünscht.

3) Da V ein erzeugender Unterraum von A ist, gilt $A := \bigcup_{s \geq 0} V_s$. Somit ist auch

$$AU = \left(\bigcup_{s \geq 0} V_s\right) U = \bigcup_{s \geq 0} (V_sU).$$

□

Definition 4.13. Die *Hilbert-Funktion* von M bezüglich V und U ist definiert als

$$HF_{V,U} : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0, s \mapsto \dim_K(V_sU).$$

Satz 4.14. *Seien V und V' zwei erzeugende Unterräume von A sowie U und U' zwei erzeugende Unterräume von M. Dann gilt mit d wie in (4.6), dass*

$$d(HF_{V,U}) = d(HF_{V',U'})$$

.

Beweis: Da V und U erzeugende Unterräume sind, gibt es $a, b \in \mathbb{N}_0$ so, dass $V' \subseteq V_a$ und $U' \subseteq V_bU$. Somit ist $(V')U' \subseteq (V_{as+b})U$. Mit Lemma 4.7 1) folgt $d(HF_{V',U'}) \leq d(HF_{V,U})$. Analog erhält man die umgedrehte Ungleichung und somit die Gleichheit. □

Definition 4.15. Sei V ein erzeugender Unterraum von A und U ein erzeugender Unterraum von M. Die *Gelfand-Kirillov-Dimension* von M ist definiert als

$$\mathrm{GKdim}(M) = d(HF_{V,U}).$$

Zum Abschluss des Unterkapitels folgen zwei Aussagen, die wir für Aussagen über die Gelfand-Kirillov-Dimension über G-Algebren benötigen.

Satz 4.16. *Sei A eine endlich erzeugte graduierte K-Algebra und M ein endlich erzeugter graduierter A-Linksmodul. Dann gilt*

$$\mathrm{GKdim}(M) = d(HF_M),$$

wobei

$$HF_M(n) := \dim_K \left(\bigoplus_{i=0}^{n} M_i \right).$$

Beweis: Zuerst definieren wir die abkürzenden Schreibweisen

$$[M]^n := \bigoplus_{i=0}^{n} M_i \quad \text{und} \quad [A]^n := \bigoplus_{i=0}^{n} A_i.$$

Sei V ein erzeugender Unterraum von A und U ein erzeugender Unterraum von M, dann existiert ein $m \in \mathbb{N}_0$ so, dass $V \subseteq [A]^m$ und $U \subseteq [M]^m$. Somit ist

$$V_nU \subseteq [A]^{mn}U \overset{(3.16)}{\subseteq} [M]^{mn+n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Folglich ist die Ungleichung $d(HF_{V,U}) \leq d(HF_M)$ schon gezeigt.
Nun zur anderen Ungleichung: Da A und M endlich erzeugt sind, existiert ein $m \in \mathbb{N}_0$ so, dass A von $V := [A]^m$ und M von $U := [M]^m$ erzeugt wird. Die V_sU bilden dann nach (4.12) eine Filtrierung von M. Damit $d(HF_{U,V}) \geq d(HF_M)$ gilt, ist zu zeigen, dass $[M]^n \subseteq V_nU$ für alle $n > 0$ gilt. Dafür genügt es $M_n \subseteq V_nU$ zu zeigen. Da die V_sU eine Filtrierung von M erzeugen, existiert ein $r \in \mathbb{N}_0$ so, dass $M_n \subseteq V_rU$. Das heißt, dass jedes $0 \neq x \in M_n$ umgeschrieben werden kann als Summe von Monomen der Form $v_s \cdots v_1v_0$ mit homogenem $v_0 \in U$ und $v_1, \ldots, v_s \in V$, wobei $s \leq r$. Die auftretenden Monome können wir in der Form minimal wählen, dass wir $v_1v_0 \notin U = [M]^m$ und $v_{i+1}v_i \notin V = [A]^m$ für $1 \leq i \leq s-1$ annehmen können.
Mit den Grad-Begriffen aus (3.1) und (3.16) bedeutet dies, dass die (v_iv_{i+1}) für $1 \leq i < s$ einen Grad kleiner m haben. Da alle auftretenden v_i einen positiven Grad haben und x homogen vom Grad n ist, muss $s+1 \leq n$ gelten, denn sonst wäre der Grad eines Monoms größer als n. Somit sind die $v_0 \cdots v_s \in V_nU$ und es gilt $M_n \subseteq V_nU$ wie gewünscht. □

Satz 4.17. *Sei A eine lokal endlich filtrierte K-Algebra (vgl. (3.6)) mit der Eigenschaft, dass ihre assoziierte Algebra* $\mathrm{Gr}(A)$ *(3.7) auch endlich erzeugt ist. Sei M ein endlich erzeugter A-Linksmodul mit Filtrierung FM so, dass* $\mathrm{Gr}(M)$ *(siehe (3.22)) ein endlich erzeugter* $\mathrm{Gr}(A)$*-Modul ist. Dann gilt*

$$\mathrm{GKdim}(\mathrm{Gr}(M)) = \mathrm{GKdim}(M).$$

Beweis: Sei $\hat{V}$ ein erzeugender Unterraum von $\mathrm{Gr}(A)$ mit 1 und sei $\hat{U}$ ein erzeugender Unterraum von $\mathrm{Gr}(M)$. Es gibt erzeugende Unterräume V von A und U von M so, dass $\hat{U} \subseteq \mathrm{Gr}(U)$ und $\hat{V} \subseteq \mathrm{Gr}(V)$. Damit gilt

$$\hat{V}_n\hat{U} \subseteq \mathrm{Gr}(V)_n \,\mathrm{Gr}(U) \subseteq \mathrm{Gr}(V_n)\,\mathrm{Gr}(U) \subseteq \mathrm{Gr}(V_nU).$$

Somit ist

$$\dim_K(\hat{V}_n\hat{U}) \leq \dim_K(\mathrm{Gr}(V_nU)) \leq \dim_K(V_nU)$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$, sprich $d(HF_{V,U}) \geq d(HF_{\hat{V},\hat{U}}) = d(HF_{\mathrm{Gr}(M)})$.
Da $F_nM \cong F_n \,\mathrm{Gr}(M)$ als K-Vektorräume (Identifikation der Restklassen in $\mathrm{Gr}(M)$ mit den Elementen von M) für alle $n \in \mathbb{N}_0$, ist $HF_M(n) = HF_{\mathrm{Gr}(M)}(n)$.
Da V und U erzeugende Unterräume von A beziehungsweise M sind, existiert ein $p \in \mathbb{N}_0$ so, dass $V \subseteq F_pA$ und $U \subseteq F_pM$. Somit erhalten wir für alle $n \geq 1$

$$HF_{V,U}(n) \leq HF_M(2pn) = HF_{\mathrm{Gr}(M)}(2pn).$$

Also gilt $d(HF_{V,U}) \leq d(HF_{\mathrm{Gr}(M)})$. $\square$

4.3. Die Hilbert-Funktion von stabilen Teilmengen

In diesem Abschnitt werden einige Definitionen und Aussagen über stabile Untermengen von $\mathbb{N}_0^{n,m}$ (vgl. 1.3) vorgestellt, die im weiteren Verlauf bei der Berechnung der Gelfand-Kirillov-Dimension von Moduln über G-Algebren hilfreich sind. Die meisten Beweise sind [3] zu entnehmen (andere sind ausformuliert).

Definition 4.18. Sei $E \subseteq \mathbb{N}_0$ nichtleer. Dann heißt E *Monoideal* von $\mathbb{N}_0^n$, wenn $E + \mathbb{N}_0^n = E$. Ist B eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{N}_0^n$ so heißt

$$B + \mathbb{N}_0^n = \bigcup_{\beta \in B} (\beta + \mathbb{N}_0^n) = \{\beta + \gamma \mid \beta \in B, \gamma \in \mathbb{N}_0^n\}$$

das von B *erzeugte* Monoideal. Ist E ein Monoideal und gilt $E = B + \mathbb{N}_0^n$, so heißen die Elemente von B *Erzeuger* von E.

Definition 4.19. Sei $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$. Der *Träger* von α ist definiert als die Menge

$$\mathrm{supp}(\alpha) := \{i \in \{1, \ldots, n\} \mid \alpha_i \neq 0\}.$$

Definition 4.20. Für jedes $E \subseteq \mathbb{N}_0^n$ definieren wir

$$V(E) := \{\sigma \subseteq \{1, \ldots, n\} \mid \forall \alpha \in E : \sigma \cap \mathrm{supp}(\alpha) \neq \emptyset\}.$$

Lemma 4.21 ([3]).
Sei E ein echtes Monoideal von $\mathbb{N}_0^n$, erzeugt von $A = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_s\}$. Dann ist

$$V(E) = V(A).$$

Bsp. 4.22. Sei E das von $B := \{b_1, b_2, b_3\}$ erzeugte Monoideal, wobei

$$b_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \; b_2 := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ und } b_3 := \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dabei sind die Träger der b_i

$$\operatorname{supp}(b_1) = \{1, 3, 4\}, \; \operatorname{supp}(b_2) = \{1, 2, 4\} \text{ und } \operatorname{supp}(b_3) = \{1, 2, 4\}.$$

Somit ist

$$V(E) = V(B) = \operatorname{Pot}(\{1, 2, 3, 4\}) \setminus \{\{2\}, \{3\}, \emptyset\}.$$

Definition 4.23. Die *Dimension* eines Monoideals E von $\mathbb{N}_0^n$ ist definiert als

$$\dim(E) := \begin{cases} n & \text{falls } E = \emptyset, \\ 0 & \text{falls } E = \mathbb{N}_0^n, \\ n - \min\{|\sigma| \mid \sigma \in V(E)\} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bsp. 4.24. Für E und B aus Beispiel 4.22 ist

$$\dim(E) = 4 - 1 = 3.$$

Eine Möglichkeit, die Dimension mit Hilfe einer rekursiv definierten Funktion auszurechnen, ist wie folgt:

Definition 4.25. Sei E eine endliche Teilmenge von $\mathbb{N}_0^n$ und $N := \{A \in \operatorname{Pot}(\mathbb{N}_0^n) \mid A \text{ endlich}\}$. Definiere

$$d' : N \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, (B, i) \mapsto \begin{cases} i & \text{falls } B = \emptyset, \\ \max\limits_{j \in \operatorname{supp}(\alpha_1)} \{d'(B_j, i-1)\} & \text{falls } B = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_s\}, \end{cases}$$

wobei $B_j := \{\alpha \in B \mid j \notin \operatorname{supp}(\alpha)\}$.

Satz 4.26. *Sei E ein Monoideal von $\mathbb{N}_0^n$ und $B = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_s\}$ eine endliche Erzeugermenge von E. Dann gilt*

$$d'(B, n) = \dim(E).$$

Die Umsetzung dieses Satzes als Prozedur in SINGULAR befindet sich im letzten Kapitel.

Beweis: Wenn $B = \emptyset$ ist, so gilt die Gleichheit klarerweise.
Sei nun $B \neq \emptyset$ und folglich $V(E) = V(B) \neq \emptyset$. Wenn es ein $i \in \operatorname{supp}(\alpha_1)$ so gibt, dass $i \in \operatorname{supp}(\alpha)$ für alle $\alpha \in B$, dann ist, da $B_i = \emptyset$ gilt, $d'(B, n) = n - 1$ und $1 = |\{i\}| = \min\{|\sigma| \; ; \; \sigma \in V(E)\}$.
Existiert kein solches i, so ist $\min\{|\sigma| \; ; \; \sigma \in V(E)\} > 1$. In diesem Fall bestimmt man die B_j für alle $j \in \operatorname{supp}(\alpha_1)$. Betrachten wir nun B_j für ein festes j. Sei $\beta \in B_j$. Existiert ein $k \in \operatorname{supp}(\beta)$ so, dass $k \in \operatorname{supp}(\alpha)$ für alle $\alpha \in B_j$, so ist $\{j, k\}$ eine minimale Menge in V und $B_{j_k} = \emptyset$.
Somit gilt auch in diesem Fall Gleichheit.
Sollte es für alle $j \in \operatorname{supp}(\alpha_1)$ kein solches k geben, so wendet man das obige Verfahren erneut an.
Durch Iteration des Verfahrens berechnet folglich $d'(B, n)$ genau $n - \min\{|\sigma| \; ; \; \sigma \in V(E)\} = \dim(E)$. $\square$

Nun kommen wir zu einigen Aussagen über stabile Teilmengen.

Definition 4.27. Eine nichtleere Teilmenge E von $\mathbb{N}_0^{n,m}$ (vgl. 1.3) heißt *stabil*, wenn $E+\mathbb{N}_0^n = E$.

Definition 4.28. Sei E eine stabile Teilmenge von $\mathbb{N}_0^{n,m}$. Für $i \in \{1,\ldots,m\}$ definieren wir

$$\mathrm{Mon}_i(E) := \{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \mid (\alpha, i) \in E\}.$$

Korollar 4.29 ([3]).
Für eine stabile Teilmenge E von $\mathbb{N}_0^{n,m}$ sind die $\mathrm{Mon}_i(E)$ genau dann ein Monoideal von $\mathbb{N}_0^n$, wenn $\mathrm{Mon}_i(E) \neq 0$.

Definition 4.30. Die *Dimension* einer stabilen Teilmenge E von $\mathbb{N}_0^{n,m}$ ist definiert als

$$\dim(E) := \max\{\dim(\mathrm{Mon}_i(E)) \mid i \in \{1,\ldots,m\}\}.$$

Definition 4.31. Sei E eine stabile Teilmenge von $\mathbb{N}_0^{n,m}$ und $\omega \in \mathbb{N}^n$. Die Funktion

$$HF_E^\omega : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0, s \mapsto |\{(\alpha, i) \in \mathbb{N}_0^{n,m} \setminus E \ ; \ |(\alpha, i)|_\omega \leq s\}|$$

heißt *Hilbert-Funktion* von E bezüglich ω.

Bemerkung 4.32. In (4.31) ist $\omega \in \mathbb{N}^n$, denn wäre $\omega_i = 0$ für ein $i \in \{1,\ldots,n\}$, so könnte

$$|\{(\alpha, i) \in \mathbb{N}_0^{n,m} \setminus E \ ; \ |(\alpha, i)|_\omega \leq s\}| = \infty$$

gelten:

Bsp. 4.33. Sei

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{N}_0^2 \ \text{ und } \omega = (0,1).$$

Dann ist $(j,0) \in \{\alpha \in \mathbb{N}_0^2 \setminus E \ ; \ |\alpha|_\omega \leq s\}$ für alle $j,s \in \mathbb{N}_0$. Somit gilt für alle $s \in \mathbb{N}_0$, dass

$$|\{\alpha \in \mathbb{N}_0^2 \setminus E \ ; \ |\alpha|_\omega \leq s\}| = \infty.$$

Bemerkung 4.34. Für $\omega = (1,\ldots,1) \in \mathbb{N}_0^n$ benutzen wir die abkürzende Schreibweise HF_E statt HF_E^ω.

Lemma 4.35 ([3]).
Für eine stabile Teilmenge E von $\mathbb{N}_0^{n,m}$ gilt

$$d(HF_E^\omega) = d(HF_E).$$

Satz 4.36 ([3]).
Sei E eine stabile Teilmenge von $\mathbb{N}_0^{n,m}$.
Dann existiert eine eindeutig bestimmte minimale Menge $\{(\alpha_1, i_1), \ldots, (\alpha_s, i_s)\} \subseteq E$ derart, dass

$$E = \bigcup_{j=1}^{s} ((\alpha_j, i_j) + \mathbb{N}_0^{n,m}).$$

Lemma 4.37 ([3]).
Sei $E := \bigcup_{j=1}^{t} ((\alpha_j, i_j) + \mathbb{N}_0^{n,m})$ eine stabile Teilmenge von $\mathbb{N}_0^{n,m}$. Dann gilt

$$d(HF_E) = \dim(E).$$

4.4. Die Gelfand-Kirillov-Dimension über G-Algebren

Bemerkung 4.38. Sei $A = K\langle x_1, \dots, x_n \mid Q, <_\omega\rangle$ eine G-Algebra bezüglich einer Relationsmenge Q und einer zulässigen gewichteten Ordnung $<_\omega$ mit $\omega \in \mathbb{N}^n$. Sei darüber hinaus M ein endlich erzeugter A-Linksmodul. Da A Noethersch ist, ist M endlich präsentiert. Somit gibt es einen endlich erzeugten freien A-Linksmodul $A^m := Ae_1 \oplus \dots \oplus Ae_m$ und einen endlich erzeugten Untermodul N von A^m so, dass $M \cong A^m/N$.
Aus diesem Grund betrachten wir in diesem Kapitel nur Moduln der Form $M = A^m/N$.

Der Grund, warum wir nun nur noch Gewichtsvektoren ω mit $\omega_i > 0$ zulassen, lässt sich an folgendem Beispiel verdeutlichen:

Bsp. 4.39. Sei $A = K[x, y]$ und $\omega = (1, 0)$, dann ist mit

$$F_s^\omega A := \{f \in A \mid |\alpha|_\omega \leq s, \text{ für alle } \alpha \in \mathcal{N}(f)\}$$

eine Filtrierung von A gegeben (vgl. (3.13)). Jedoch ist $|(0, i)|_\omega = 0$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$ und somit ist

$$\dim_K(F_s^\omega A) = \infty$$

für alle $s \in \mathbb{N}_0$.

Korollar 4.40. *Seien A, M und N wie in (4.38) definiert. Betrachte den Unterverktorraum U von M, der von $e_1 + N, \dots, e_m + N$ erzeugt wird. Dann ist für einen erzeugenden Unterraum V von A (vgl. (4.1)) die Menge $\{V_sU \mid s \in \mathbb{N}_0\}$ eine Filtrierung von M.*

Beweis: Der Beweis verläuft analog zum Beweis von Lemma 4.12. □

Lemma 4.41. *Seien A, M, N, U wie in (4.40). Seien darüber hinaus $F_s^\omega A$ und $F_s^\omega M$ wie in (3.13) und (3.27). Dann gilt für alle $s \in \mathbb{N}_0$, dass*

$$F_s^\omega M = (F_s^\omega A)U.$$

Beweis: Sei $(f_1e_1 + N, \dots, f_me_m + N)^T \in (F_s^\omega A)U$ mit $f_i = f \cdot u_i$ für ein $f \in F_s^\omega A$ mit $|\mathrm{le}(f)|_\omega \leq s$ und $u_i \in K$, dann ist nach Definition von $F_s^\omega M$ auch $f \in F_s^\omega M$.
Sei umgekehrt $u + N \in F_s^\omega M$ mit $|\mathrm{le}(u)|_\omega \leq s$. Dann gilt nach Definition, dass $|\alpha|_\omega \leq s$ für alle $(\alpha, i) \in \mathcal{N}(f)$. Somit gilt für $u = u_1e_1 + \dots + u_me_m$, dass $|\mathrm{le}(u_i)|_\omega \leq s$ für alle $1 \leq i \leq m$. Also ist $u + N \in (F_s^\omega A)U$. □

Definition 4.42. Seien A, M, N, U wie in (4.40). Die Hilbert-Funktion von M bezüglich ω ist definiert als

$$HF_M^\omega : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 : s \mapsto \dim_K(F_s^\omega M).$$

Bemerkung 4.43. Für $\omega = (1, \dots, 1) \in \mathbb{N}_0^n$ benutzen wir die abkürzende Schreibweise HF_M statt HF_M^ω.

Satz 4.44. *Mit den vorherigen Bezeichnungen und* $\mathrm{Exp}(N)$ *wie in (2.13) gilt*

$$HF_M^\omega = HF_{\mathrm{Exp}(N)}^\omega.$$

Beweis: Sei $G := \{g_1, \ldots, g_t\}$ eine Gröbner-Basis von N und sei $f + N \in M$ mit $|\mathrm{le}(f)|_\omega \leq s$. Nach (2.12) gilt $f = q_1 g_1 + \ldots + q_t g_t + r$ mit $\mathrm{le}(r) \leq \mathrm{le}(f)$, $\mathcal{N}(r) \cap \mathrm{Exp}(N) = \emptyset$ und entsprechenden q_i. Somit lässt sich r schreiben als

$$r := \sum_{(\alpha,i) \notin \mathrm{Exp}(N)} c_{(\alpha,i)} x^{(\alpha,i)}.$$

Da $\mathrm{le}(r) \leq \mathrm{le}(f)$, gilt für alle $(\alpha, i) \in \mathcal{N}(r)$, dass $|(\alpha, i)|_\omega \leq s$. Für unser r gilt nun:

$$r = \sum_{\substack{(\alpha,i) \notin \mathrm{Exp}(N) \\ |(\alpha,i)|_\omega \leq s}} c_{(\alpha,i)} x^{(\alpha,i)}.$$

Nach Definition der Exponentenmenge folgt aus $(\alpha, i) \notin \mathrm{Exp}(N)$, dass $x^{(\alpha,i)} \notin N$. Betrachten wir nun

$$\begin{aligned} F_s^\omega M :=& \{f \in M \mid |\alpha|_\omega \leq s, \quad \text{für alle } (\alpha, i) \in \mathcal{N}(f)\} \\ =& \{f + N \mid f \in A^m \text{ und } |\mathrm{le}(f)|_\omega \leq s\}. \end{aligned}$$

Die Elemente der Menge $\{x^{(\alpha,i)} + N \mid |(\alpha, i)|_\omega \leq s \text{ mit } (\alpha, i) \notin \mathrm{Exp}(N)\}$ erzeugen $F_s^\omega M$. Nun zeigen wir die lineare Unabhängigkeit dieser Elemente. Sei

$$\sum_{\substack{(\alpha,i) \notin \mathrm{Exp}(N) \\ |(\alpha,i)|_\omega \leq s}} c_{(\alpha,i)} (x^{(\alpha,i)} + N) = 0.$$

Dann ist mit obiger Definition $r \in N$, wobei $\mathcal{N}(r) \cap \mathrm{Exp}(N) = \emptyset$. Wäre $r \neq 0$, so wäre $\mathrm{le}(r) \in \mathrm{Exp}(N)$, was einen Widerspruch darstellt. Somit ist $r = 0$ und $c_{(\alpha,i)} = 0$ für alle (α, i). Somit können wir statt M die stabile Teilmenge $\mathrm{Exp}(N)$ betrachten und es ist $HF_M^\omega = HF_{\mathrm{Exp}(N)}^\omega$.
□

Mit Satz 4.44 können wir die Berechnung der Hilbert-Funktion über G-Algebren auch folgendermaßen über dem kommutativen Polynomring $K[x_1, \ldots, x_n]$ durchführen:

Satz 4.45. *Seien A, M, N, U wie in (4.40). Sei darüber hinaus $\tilde{R} = K[x_1, \ldots, x_n]$. Für die Hilbert-Funktion von M gilt*

$$HF_M^\omega = HF_{\tilde{M}}^\omega,$$

wobei $HF_{\tilde{M}}^\omega$ die Hilbert-Funktion von $\tilde{M} := \tilde{R}^m / \tilde{N}$ über $\tilde{R}$ ist. Dabei ist $\tilde{N}$ das $\tilde{R}$-Erzeugnis der Menge $\{x^{(\alpha,i)} \mid (\alpha, i) \in \mathrm{Exp}(N)\}$.

Beweis: Der Beweis folgt direkt aus der Gleichheit

$$HF_{\mathrm{Exp}(N)}^\omega = HF_{\mathrm{Exp}(\tilde{N})}^\omega,$$

denn mit (4.44) ist

$$HF_{\mathrm{Exp}(\tilde{N})}^\omega = HF_{\tilde{M}}^\omega.$$

□

Satz 4.46. *Seien A, M, N, U wie in (4.40). Für die Gelfand-Kirillov-Dimension von M und beliebigem zulässigem $\omega \in \mathbb{N}^n$ gilt*

$$\mathrm{GKdim}(M) = d(HF_M^\omega).$$

Beweis: Sei $HF_{\mathrm{Gr}^\omega(M)}$ die Hilbert-Funktion des graduierten $\mathrm{Gr}^\omega(A)$-Linksmoduls $\mathrm{Gr}^\omega(M)$ (vgl. (3.14)), also des assoziierten graduierten Moduls von M bezüglich der gewichteter Filtrierung $F^\omega M$:

$$HF_{\mathrm{Gr}^\omega(M)} \overset{(4.16)}{=} \dim_K \left(\bigoplus_{j=0}^{s} G^\omega(M)_j \right).$$

Mit Satz 4.17 folgt

$$\mathrm{GKdim}\,(M) = \mathrm{GKdim}\,(\mathrm{Gr}^\omega(M)) = d\left(HF_{\mathrm{Gr}^\omega(M)}\right).$$

Nun ist noch $HF_M^\omega = HF_{\mathrm{Gr}^\omega(M)}$ zu zeigen. Sei dazu $s \in \mathbb{N}_0$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\dim_K \left(\bigoplus_{j=0}^{s} G^\omega(M)_j \right) &= \sum_{j=0}^{s} \dim_K \left(G^\omega(M)_j\right) \\
&= \sum_{j=0}^{s} \dim_K \left(\frac{F_j^\omega M}{F_{j-1}^\omega M} \right) \\
&= \sum_{j=0}^{s} \dim_K \left(F_j^\omega M\right) - \dim_K \left(F_{j-1}^\omega M\right) \\
&= \dim_K(F_s^\omega M) - \underbrace{\dim_K(F_{-1}M)}_{=0} \\
&= \dim_K(F_s^\omega M).
\end{aligned}$$

□

Aus dem Beweis von (4.46) folgt direkt folgende wichtige Aussage:

Satz 4.47. *Seien A, M, N, U wie in (4.40). Für die Hilbert-Funktion von M folgt*

$$HF_M^\omega = HF_{\mathrm{Gr}^\omega(M)}.$$

Nun wollen wir noch die zwei Sätze (4.46) und (4.44) in Verbindung bringen.

Satz 4.48. *Sei $A = K\langle x_1, \ldots, x_n \mid Q, <_\omega \}\rangle$ eine G-Algebra bezüglich einer Relationsmenge Q und einer zulässigen gewichteten Ordnung $<_\omega$ mit $\omega \in \mathbb{N}^n$ und sei N ein A-Linksuntermodul von A^m. Für $M := A^m/N$ gilt*

$$\mathrm{GKdim}(M) = \dim(\mathrm{Exp}(N)).$$

Beweis: Nach Definition 4.15 ist $\mathrm{GKdim}(M) = d(HF_{U,V})$ für entsprechende erzeugende Unterräume U und V. Mit vorherigen Aussagen gilt somit

$$\begin{aligned}
\mathrm{GKdim}(M) &\overset{4.15}{=} d(HF_{U,V}) \overset{4.46}{=} d(HF_M^\omega) \overset{4.44}{=} d(HF^\omega_{\mathrm{Exp}(N)}) \\
&\overset{4.35}{=} d(HF_{\mathrm{Exp}(N)}) \overset{4.35}{=} \dim(\mathrm{Exp}(N)).
\end{aligned}$$

□

Mit Hilfe von (4.48) und (4.26) können wir nun einen Algorithmus angeben, der die Gelfand-Kirillov-Dimension eines Moduls der Form A^m/N bestimmt:

Algorithmus 1 : Gelfand-Kirillov-Dimension

Eingabe : Menge von Erzeugern $\{f_1, \dots, f_s\}$ von $N \subseteq A^m$ als A-Linksmodul.
Ausgabe : $d = \mathrm{GKdim}(A^m/N)$.

```
Bestimme Links-Gröbnerbasis G = {g_1, ..., g_t} von N.
for i = 1 to m do
    E_i := {α ∈ N_0^n | ∃1 ≤ j ≤ t, (α, i) = le(g_j)}
    if E_i = ∅ then
        d_i := n
    else
        if 0 ∈ E_i then
            d_i := 0
        else
            d_i := dim(Exp(E_i))
        end
    end
end
return d := max{d_1, ..., d_m}
```

Ein schon in SINGULAR implementierter Algorithmus verwendet einen Zusammenhang zwischen Gelfand-Kirillov-Dimension und Krull-Dimension, der in [2] vorgestellt wird.

Definition 4.49. Die *Krull-Dimension* für einen kommutativen Ring $R \neq \{0\}$ ist definiert als

$$\mathrm{Krdim}(R) := \sup\{\text{Länge}(\mathcal{P}) \mid \mathcal{P} \text{ ist eine strikt aufsteigende Kette von Primidealen}\}$$

und für einen R-Modul M definiert als

$$\mathrm{Krdim}(M) := \mathrm{Krdim}(R/\operatorname{Ann}_R(M)).$$

Dabei wird die Menge

$$\operatorname{Ann}_R(M) := \{r \in R \mid rm = 0 \text{ für alle } m \in M\}$$

der *Annihilator* von M in R genannt.

Satz 4.50. *Sei $A = K\langle x_1, \dots, x_n \mid Q, <_\omega\rangle$ eine G-Algebra bezüglich einer Relationsmenge Q und einer zulässigen gewichteten Ordnung $<_\omega$ mit $\omega \in \mathbb{N}^n$ und sei N ein A-Linksuntermodul von A^m. Für $M := A^m/N$ gilt*

$$\mathrm{GKdim}_K(M) = \mathrm{Krdim}(K[x_1, \dots, x_n]^m/\langle\psi(L(N))\rangle) = \mathrm{Krdim}(\tilde{M}),$$

wobei

$$\psi : A^m \to K[x_1, \dots, x_n]^m, x^{(\alpha,i)} \mapsto x^{(\alpha,i)},$$

der natürliche Isomorphismus von Vektorräumen und $L(M)$ der Leitraum von M ist, also das K-Erzeugnis der Menge

$$\{x^{\alpha+\nu} \mid x^\alpha e_i = \mathrm{lm}(f) \text{ für ein } f \in M \text{ und } \nu \in \mathbb{N}_0^n\}.$$

Beweis: Es ist $\mathrm{Exp}(N) = \mathrm{Exp}(\psi(L(N)))$. Somit ist nach (4.48)

$$\mathrm{GKdim}(M) = \dim(\mathrm{Exp}(N)) = \dim(\mathrm{Exp}(\psi(L(N)))) = \mathrm{Krdim}(\tilde{M}).$$

□

Bsp. 4.51. Betrachte die G-Algebra $A = \mathbb{Q}\langle x, y, z \mid yx = xy - z, zx = xz + 2x, zy = yz - 2y\rangle$ bezüglich der graduiert-lexikographischen Ordnung $<$. Die Relationen haben folgende Matrixform:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & -z & 2x \\ 0 & 0 & -2y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Diese Algebra nennt man die universelle Einhüllende der Lie-Algebra $\mathfrak{sl}_2$.
Sei $I := {}_A\langle x^2y, z\rangle$ mit Links-Gröbnerbasis x^2y, z.
Es ist $\mathrm{Exp}(I) = ((2,1,0) + \mathbb{N}_0^3) \cup ((0,0,1) + \mathbb{N}_0^3)$ und $V(\mathrm{Exp}(I)) = \{\{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$. Somit ist mit (4.48)

$$\mathrm{GKdim}(A/I) = \dim(\mathrm{Exp}(I)) = 3 - 2 = 1.$$

4.5. Die Hilbert-Poincaré-Reihe

Nachdem wir nun einen Weg gefunden haben, die Gelfand-Kirillov-Dimension über G-Algebren zu berechnen, wollen wir uns nun noch der Herangehensweise über die Berechnung der Hilbert-Polynome widmen. Dazu verwenden wir zunächst eine etwas andere Definition der Hilbert-Funktion von Moduln, die über (4.16) mit der vorherigen Definition zusammenhängt.

Definition 4.52. Sei $A := \bigoplus_{n\geq 0} A_n$ eine Noethersche graduierte K-Algebra. Weiterhin sei $M := \bigoplus_{n\geq 0} M_n$ ein endlich erzeugter graduierter A-Linksmodul. Die *Hilbert-Funktion* H_M von M ist definiert als

$$H_M : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0, s \mapsto \dim_K(M_s).$$

Die formale Potenzreihe $HP_M : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}[[t]]$,

$$HP_M(t) := \sum_{s\in\mathbb{N}_0} H_M(s) \cdot t^s \in \mathbb{Z}[[t]],$$

nennt man *Hilbert-Poincaré-Reihe* von M.

Für spätere Aussagen benötigen wir noch den Begriff der $\mathbb{Z}$-Graduierung.

Definition 4.53. Eine Algebra A über einen Körper K nennt man eine $\mathbb{Z}$-graduierte K-Algebra, wenn für alle $z \in \mathbb{Z}$ K-Untervektorräume A_z von A existieren, die Folgendes erfüllen:

1) $A = \bigoplus_{z\in\mathbb{Z}} A_z$ und

2) $A_nA_m \subseteq A_{n+m}$ für alle $m, n \in \mathbb{Z}$.

Analog definieren wir die $\mathbb{Z}$-Graduierung eines Moduls:

Definition 4.54. Sei $A = \bigoplus_{n\geq 0} A_n$ eine $\mathbb{Z}$-graduierte K-Algebra. Eine $\mathbb{Z}$-Graduierung eines A-Linksmoduls M ist eine Vektorraumzerlegung

$$M = \bigoplus_{z\in Z} M_z \quad \text{so, dass } A_n M_m \subseteq M_{n+m} \quad \text{für alle } m, n \in \mathbb{Z}.$$

Ein $\mathbb{Z}$-graduierter A-Linksmodul M ist ein A-Linksmodul mit einer *festen* $\mathbb{Z}$-Graduierung.

Bemerkung 4.55. Eine ($\mathbb{N}_0$-)graduierte Algebra A können wir als $\mathbb{Z}$-graduierte Algebra auffassen, indem wir $A_z = \{0\}$ für $z < 0$ setzen.
Analog können wir einen ($\mathbb{N}_0$-)graduierten A-Modul M als $\mathbb{Z}$-graduierten Modul auffassen, indem wir $M_z = \{0\}$ für $z < 0$ setzen.

Definition 4.56. Sei $A := \bigoplus_{n\geq 0} A_n$ eine noethersche graduierte K-Algebra und $M := \bigoplus_{n\geq 0} M_n$ ein endlich erzeugter graduierter A-Linksmodul. Dann definiert man

$$M(d) := \bigoplus_{n\geq 0} M(d)_n \text{ mit } M(d)_n := M_{n+d},$$

wobei $M_m = \{0\}$ für $m < 0$.

Lemma 4.57. *Sei $A := \bigoplus_{n\geq 0} A_n$ eine noethersche graduierte K-Algebra und $M := \bigoplus_{n\geq 0} M_n$ ein endlich erzeugter graduierter A-Linksmodul. Dann gelten folgende Aussagen:*

1) Sei $N \subseteq M$ ein graduierter Untermodul. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$H_M(n) = H_N(n) + H_{M/N}(n),$$

mit induzierter kurzer exakter Sequenz

$$0 \to N \overset{i}{\hookrightarrow} M \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} M/N \to 0,$$

wobei $i : N \to M, n \mapsto m$ die Einbettung in M und $\pi : M \to M/N, m \mapsto [m]$, die Projektion auf M/N ist. Daraus folgt insbesondere

$$HP_M(t) = HP_N(t) + HP_{M/N}(t).$$

2) Sei $d \in \mathbb{Z}$. Es gilt

$$H_{M(d)}(n) = H_M(n + d).$$

Für die Hilbert-Poincaré-Reihe folgt dann

$$HP_{M(d)}(t) = t^{-d} HP_M(t).$$

3) Sei $d \in \mathbb{N}_0$ und $f \in A_d$. Betrachte den Homomorphismus von graduierten Linksmoduln $\phi : M(-d) \to M, m \mapsto m \cdot f$. Für ϕ gilt, dass $\mathrm{Ker}(\phi)$ *ein graduierter $M(-d)$-Untermodul und* $\mathrm{Coker}(\phi)$ *ein graduierter Faktormodul von M ist. Für die Hilbert-Funktion und die Hilbert-Poincaré-Reihe folgt*

$$H_M(n) - H_M(n - d) = H_{\mathrm{Coker}(\phi)}(n) - H_{\mathrm{Ker}(\phi)}(n - d)$$

und

$$HP_M(t) - t^d HP_M(t) = HP_{\mathrm{Coker}(\phi)}(t) - t^d HP_{\mathrm{Ker}(\phi)}(t).$$

Beweis: 1) Die Exaktheit der Sequenz folgt daher, dass N ein Untermodul von M ist. Sei $N := \bigoplus_{n\geq 0} N_n$ mit $N_n = M_n \cap N$. Somit ist

$$H_{M/N}(n) = \dim_K((M/N)_n) = \dim_K(M_n/N_n) = \dim_K(M_n) - \dim_K(N_n).$$

Daraus folgt

$$H_{M/N}(n) + H_N(n) = \dim_K(M_n) - \dim_K(N_n) + \dim_K(N_n) = \dim_K(M_n) = H_M(n).$$

2) Es gilt mit (4.55), dass

$$H_{M(d)}(n) = \dim_K(M(d)_n) = \dim_K(M_{n+d}) = H_M(n+d).$$

Für die Aussage über die Hilbert-Poincaré Reihe verwenden wir folgende Umformulierung:

$$HP_M(t) = \sum_{n\geq 0} H_M(n)\cdot t^n = \sum_{z\in\mathbb{Z}} H_M(z)\cdot t^z,$$

wobei $M_n = \{0\}$ für $n < 0$. Diese Umformulierung ist nötig, da es für $d > 0$ durchaus $n < 0$ geben kann mit $M(d)_n \neq \{0\}$. Somit gilt

$$\begin{aligned} t^{-d} HP_M(t) &= t^{-d}\sum_{z\in\mathbb{Z}} H_M(z)\cdot t^z \\ &= \sum_{z\in\mathbb{Z}} \dim_K(M_z)\cdot t^{z-d} \\ &= \sum_{z\in\mathbb{Z}} \dim_K(M(d)_{z-d})\cdot t^{z-d} \\ &= \sum_{z\in\mathbb{Z}} H_{M(d)}(z-d)\cdot t^{z-d} \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} H_{M(d)}(k)\cdot t^k = HP_{M(d)}(t). \end{aligned}$$

3) Es ist $\mathrm{Coker}(\phi) = M/\operatorname{im}(\phi)$ und $\ker(\phi) = \{m \in M(-d) \mid m\cdot f = 0\}$. Nach Konstruktion ist $\mathrm{Ker}(\phi) = \bigoplus_{n\geq 0} \mathrm{Ker}(\phi)\cap M(-d)_n$ und somit ist $\mathrm{Ker}(\phi)$ ein graduierter $M(-d)$-Untermodul. Darüber hinaus ist

$$\operatorname{im}(\phi) = M(-d)\cdot f = (\bigoplus_{n\geq 0} M(-d)_n)\cdot f = \bigoplus_{n\geq 0} M(-d)_n\cdot f$$

ein graduierter Untermodul von M, woraus folgt, dass

$$\mathrm{Coker}(\phi) = \bigoplus_{n\geq 0} (M/(M(-d)\cdot f))_n = \bigoplus_{n\geq 0} M_n/(M(-d)_n\cdot f)$$

ein graduierter Faktormodul von M ist. Mit 1) und 2) ist

$$\begin{aligned} H_{\mathrm{Coker}(\phi)}(n) - H_{\mathrm{Ker}(\phi)}(n-d) &= H_M(n) - H_{\operatorname{im}(\phi)}(n) - H_{\mathrm{Ker}(\phi)}(n-d) \\ &= H_M(n) - (\dim_K(M(-d)_n\cdot f) + \dim_K(M(-d)_n\cap \mathrm{Ker}(\phi)) \\ &= H_M(n) - \dim_K(M(-d)_n) = H_M(n) - H_M(n-d). \end{aligned}$$

Die Aussage über die Hilbert-Poincaré-Reihe folgt dann analog zum Beweis von 2).

□

Kommen wir nun zu einer Aussage, die es uns ermöglicht die Hilbert-Poincaré-Reihe für einen Spezialfall direkt zu bestimmen.

Lemma 4.58. *Sei A eine graduierte G-Algebra über K, die von $x_1, \dots, x_r$ erzeugt wird und I ein homogenes zweiseitiges Ideal von A (vgl. (3.3)). Sei darüber hinaus $f \in A$ ein homogenes Polynom vom Grad d und $\langle f \rangle$ das von f erzeugte Linksideal. Dann gilt*

$$HP_{A/I}(t) = HP_{A/\langle I,f \rangle}(t) + t^d HP_{A/(I:f)}(t),$$

wobei $(I : f) := \{a \in A \mid a \cdot f \in I\}$.

Beweis: Für den Beweis wollen wir Lemma 4.57 verwenden, dazu müssen wir eine entsprechende Homomorphismus ϕ definieren. Betrachte dafür $\phi : A/I \to A/I, m \mapsto m \cdot f$. Dann gilt mit (4.57) 3)

$$\begin{aligned} & HP_{A/I}(t) - t^d HP_{A/I}(t) = HP_{\mathrm{Coker}(\phi)}(t) - t^d HP_{\mathrm{Ker}(\phi)}(t) \\ \Leftrightarrow\ & HP_{A/I}(t) = HP_{\mathrm{Coker}(\phi)}(t) + t^d (HP_{A/I}(t) - HP_{\mathrm{Ker}(\phi)}(t)). \end{aligned}$$

Dabei ist

$$\mathrm{Coker}(\phi) = (A/I)/\operatorname{im}(\phi) = (A/I)/(Af/I) = (Af + A \cdot I)/I = {}_A\langle I, f \rangle / I$$

und

$$\mathrm{Ker}(\phi) = \{a \in A/I \mid a \cdot f \in I\} = \{a \in A/I \mid a \in (I : f)\}.$$

Daraus folgt mit (4.57) 1), dass

$$HP_{A/I}(t) - HP_{\ker(\phi)}(t) = HP_{A/(I:f)}(t)$$

gilt. Somit ist zusammenfassend

$$\begin{aligned} & HP_{A/I}(t) = HP_{\mathrm{Coker}(\phi)}(t) + t^d (HP_{A/I}(t) - HP_{\mathrm{Ker}(\phi)}(t)) \\ \Leftrightarrow\ & HP_{A/I}(t) = HP_{A/\langle I,f \rangle}(t) + t^d HP_{A/(I:f)}(t). \end{aligned}$$

□

4.6. Hilbert-Polynome über G-Algebren

Da G-Algebren im Allgemeinen nicht graduiert sind, benötigen wir noch eine etwas andere Definition der Hilbert-Poincaré-Reihe. Sei dazu in diesem Abschnitt $A = K\langle x_1, \dots, x_n \mid Q, <_\omega \rangle$ eine G-Algebra bezüglich einer Relationsmenge Q und einer gewichteten zulässigen Ordnung $<_\omega$ mit $\omega \in \mathbb{N}^n$ mit Filtrierung $FA := \{F_s^\omega A \mid s \in \mathbb{N}_0\}$. Sei zusätzlich M ein endlich erzeugter A-Linksmodul der Form $M = A^m/N$ für einen endlich erzeugten A^m-Untermodul N mit Filtrierung $FM := \{F_s^\omega M \mid s \in \mathbb{N}_0\}$. Damit wir Algorithmen verwenden können, die schon in Singular implementiert sind, benutzen wir Definitionen in Anlehnung an [5].

Definition 4.59. Die *Hilbert-Poincaré-Reihe* von M ist definiert als

$$HP_M^\omega(t) := \sum_{s \in \mathbb{N}_0} H_{\mathrm{Gr}^\omega(M)}(s) t^s = \sum_{s \in \mathbb{N}_0} (HF_M^\omega(s) - HF_M^\omega(s-1)) t^s \in \mathbb{Z}[[t]],$$

wobei $\mathrm{Gr}^\omega(M) = \bigoplus_{n \geq 0} G^\omega(M)_n$ der assoziierte graduierte Modul von M bezüglich $F_s^\omega M$ (vgl. (3.29)) ist.
Für $\omega = (1, \dots, 1)$ schreiben wir HP_M statt HP_M^ω.

Bemerkung 4.60. In der Literatur (zum Beispiel in [3] oder auch in [9]) wird die Hilbert-Poincaré-Reihe über die Dimension der Filtrierung definiert (vgl. (4.42)). Der Zusammenhang mit unserer Definition ist wie folgt:

$$HP_M^\omega(t) = \sum_{s\in\mathbb{N}_0} H_{\mathrm{Gr}^\omega(M)}(s)t^s = \sum_{s\in\mathbb{N}_0}(HF_M^\omega(s) - HF_M^\omega(s-1))t^s = (1-t)\sum_{s\in\mathbb{N}_0} HF_M^\omega(s)t^s.$$

Bemerkung 4.61. An dieser Stelle bietet es sich aus Übersichtsgründen an, die einzelnen Definitionen der Hilbert-Funktionen, die von M abhängig sind, zu vergleichen und ihre Zusammenhänge darzustellen.
Für $M = A^m/N$ mit Filtrierung $FM := \{F_s^\omega M \mid s \in \mathbb{N}_0\}$ ist die Hilbert-Funktion (vgl. (4.42)) definiert als

$$HF_M^\omega(n) = \dim_K(F_n^\omega M).$$

Die Definition der Hilbert-Funktion des graduierten assoziierten Moduls $\mathrm{Gr}^\omega(M)$ in Kapitel 4.2 (vgl.(4.16)) ist

$$HF^\omega_{\mathrm{Gr}^\omega(M)}(n) = \dim_K(\bigoplus_{i=0}^n G^\omega(M)_i).$$

Der Zusammenhang mit der Definition aus (4.52), $H_{\mathrm{Gr}^\omega(M)}(n) = \dim_K(G^\omega(M)_n)$, ist wie folgt:

$$HF^\omega_{\mathrm{Gr}^\omega(M)}(n) = \dim_K(\bigoplus_{i=0}^n G^\omega(M)_i) = \sum_{i=0}^n \dim_K(G(M)_i^\omega) = \sum_{i=0}^n H_{\mathrm{Gr}^\omega(M)}(i).$$

Die Hilbert-Funktion der Exponentenmenge $\mathrm{Exp}(N)$ (vgl. (2.13)), als stabile Teilmenge aufgefasst (siehe (4.31)), ist definiert als

$$HF^\omega_{\mathrm{Exp}(N)} = |\{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \setminus \mathrm{Exp}(N)\ ;\ |(\alpha, i)|_\omega \leq n\}|.$$

Die Zusammenhänge zwischen den einzelnen Hilbert-Funktionen sind folgendermaßen:

$$HF^\omega_{\mathrm{Exp}(N)}(n) \overset{(4.44)}{=} HF_M^\omega(n) \overset{(4.16)}{=} HF_{\mathrm{Gr}^\omega(M)}(n) = \bigoplus_{i=0}^n H_{\mathrm{Gr}^\omega(M)}(n).$$

Satz 4.62. *Sei* $\omega = (1, \ldots, 1)$. *Es gibt ein Polynom* $Q(t)$ *in* $\mathbb{Z}[t]$ *so, dass*

$$HP_M(t) = \frac{Q(t)}{(1-t)^n}.$$

Beweis: Sei $R = K[x_1, \ldots, x_n]$ der kommutative Polynomring. Sei darüber hinaus $\tilde{N}$ der R-Modul, der von $\{x^{(\alpha,i)} \mid (\alpha, i) \in \mathrm{Exp}(N)\}$ erzeugt wird, und $\tilde{M} := R^m/\tilde{N}$. Dann folgt aus (4.45), dass $H_{\mathrm{Gr}(M)} = H_{\mathrm{Gr}(\tilde{M})}$. Somit können wir den Beweis über dem kommutativen Ring R durchführen.
Wir beweisen die Aussage mithilfe einer Induktion über n, der Anzahl der Variablen.
IA: Sei $n = 0$. Dann ist R ein Körper und $\tilde{M}$ ein endlich dimensionaler K-Vektorraum. Somit existiert ein $r \in \mathbb{N}_0$ so, dass $G(\tilde{M})_s = \langle 0\rangle$ für alle $s \geq r$. Also ist für diese s auch $H_{G(\tilde{M})}(s) = 0$ und $HP_{\tilde{M}} \in \mathbb{Z}[t]$.
IV: Sei die Behauptung für $n < m$ gezeigt.

IS: Sei $n = m > 0$. Betrachten wir den Vektorraum-Homomorphismus $\phi_i : G(\tilde{M})_i \to G(\tilde{M})_{i+1}$ definiert als die Multiplikation mit x_1, sprich $\phi_i(s) = s \cdot x_1$. Dann ist folgende Sequenz exakt:

$$\mathrm{Ker}(\phi_{i-1}) \hookrightarrow G(\tilde{M})_{i-1} \overset{\phi_{i-1}}{\to} G(\tilde{M})_i \twoheadrightarrow \mathrm{Coker}(\phi_{i-1}). \tag{3}$$

Betrachten wir nun mit Hilfe von (4.55) den graduierten Homomorphismus von graduierten R-Moduln

$$\phi : \mathrm{Gr}(\tilde{M})(-1) \to \mathrm{Gr}(\tilde{M}), s \mapsto s \cdot x_1.$$

Mit (4.57) gilt dann

$$(1-t)HP_{\tilde{M}}(t) = HP_{\mathrm{Coker}(\phi)}(t) - tHP_{\mathrm{Ker}(\phi)}(t).$$

Jedoch ist $\mathrm{Ker}(\phi) = \bigoplus_{i\geq 0} \mathrm{Ker}(\phi_{i-1})$ und $\mathrm{Coker}(\phi) = \bigoplus_{i\geq 0} \mathrm{Coker}(\phi_{i-1})$. Aus der Exaktheit von (3) folgt, dass die Sequenz

$$\mathrm{Ker}(\phi) \hookrightarrow \mathrm{Gr}(\tilde{M})(-1) \overset{\phi}{\to} \mathrm{Gr}(\tilde{M}) \twoheadrightarrow \mathrm{Coker}(\phi)$$

auch exakt ist. Da

$$\mathrm{Ker}(\phi) \cdot x_1 = 0$$

und

$$\mathrm{Coker}(\phi) \cdot x_1 = \mathrm{Gr}(\tilde{M}) \cdot x_1 / \operatorname{im}(\phi) = \mathrm{Gr}(\tilde{M}) \cdot x_1 / \Big(\mathrm{Gr}(\tilde{M})(-1) \cdot x_1\Big) = 0,$$

lassen sich $\mathrm{Ker}(\phi)$ und $\mathrm{Coker}(\phi)$ in R als graduierte $R/\langle x_1\rangle \cong K[\bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_r]$-Moduln darstellen, wobei $\bar{x}_i = x_i \mod \langle x_1 \rangle$. Nach Induktionsvoraussetzung existieren somit $Q_1, Q_2 \in \mathbb{Z}[t]$ so, dass $HP_{\mathrm{Ker}(\phi)}(t) = \frac{Q_2(t)}{(1-t)^{(n-1)}}$ und $HP_{\mathrm{Coker}(\phi)}(t) = \frac{Q_1(t)}{(1-t)^{(n-1)}}$. Mit (4.57) ist dann somit

$$HP_M = HP_{\tilde{M}} = \frac{Q_1(t) - tQ_2(t)}{(1-t)^n}.$$

□

Lemma 4.63. *Sei nun wieder $\omega \in \mathbb{N}^n$. Dann gibt es ein Polynom $Q(t) \in \mathbb{Z}[t]$ so, dass*

$$HP^{\omega}_M(t) = \frac{Q(t)}{\prod_{i=1}^{n}(1-t^{\omega_i})},$$

wobei ω_i das Gewicht von x_i ist.

Beweis: Sei $R = K[x_1, \ldots, x_n]$ der kommutative Polynomring. Sei darüber hinaus $\tilde{N}$ der R-Modul, der von $\{x^{(\alpha,i)} \mid (\alpha, i) \in \mathrm{Exp}(N)\}$ erzeugt wird, und $\tilde{M} := R^m/\tilde{N}$. Dann folgt aus (4.45), dass $H_{\mathrm{Gr}^{\omega}(M)} = H_{\mathrm{Gr}^{\omega}(\tilde{M})}$. Somit können wir den Beweis über dem kommutativen Ring R durchführen.
Wenn wir mit Hilfe von (4.55) den graduierten Homomorphismus $\phi : \mathrm{Gr}^{\omega}(\tilde{M})(-\omega_1) \to \mathrm{Gr}^{\omega}(\tilde{M}), s \mapsto s \cdot x_1$ betrachten, so folgt der Beweis direkt aus dem Beweis von (4.62). □

Bemerkung 4.64. Mit den Notationen aus (4.63) können wir $HP_M^\omega(t)$ umschreiben als

$$HP_M^\omega(t) = \frac{Q(t)}{\prod\limits_{i=1}^{n}(1-t^{\omega_i})} = \frac{Q(t)}{(1-t)^n \cdot \Lambda(t)},$$

wobei

$$\Lambda(t) = \prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=0}^{\omega_i-1} t^j\right).$$

Für $\omega = (1,\dots,1)$ ist $\Lambda(t) = 1$. Für HP_M^ω erhalten wir durch Kürzen von Faktoren $(1-t)$ eine Darstellung

$$HP_M^\omega(t) = \frac{G(t)}{(1-t)^s \cdot \Lambda(t)} \text{ mit } 0 \leq s \leq r \text{ und } G(t) := \sum_{k=0}^{d} g_k t^k \in \mathbb{Z}[t]$$

wobei $g_d \neq 0$ und $G(1) \neq 0$. Also hat $HP_M^\omega(t)$ bei $t = 1$ einen Pol der Ordnung s.

Definition 4.65. Mit obigen Bezeichnungen nennen wir

1) das Polynom $Q(t)$ die *erste Hilbert-Reihe* von M,

2) das Polynom $G(t)$ die *zweite Hilbert-Reihe* von M und

3) P_M das *Hilbert-Polynom* von M. Dabei ist P_M wie folgt definiert:
   Sei d der Grad der zweiten Hilbert Reihe $G(t) = \sum\limits_{k=0}^{d} g_k t^k$ und s die Polstellenordnung von $HP_M^\omega(t)$ bei $t = 1$, dann ist

$$P_M(n) := \sum_{k=0}^{d} g_k \cdot \binom{s-1+n-k}{s-1} \in \mathbb{Q}[n],$$

   wobei $\binom{m}{l} := 0$ für $l < 0$.

Damit wir das Hilbert-Polynom in eine für uns angenehmere Form bringen können, benötigen wir noch folgende Hilfsaussage:

Lemma 4.66. *Sei $f \in \mathbb{Q}[t]$ ein Polynom von Grad m und $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $f(n) \in \mathbb{Z}$ für alle $n \geq n_0$. Dann existieren $a_\nu \in \mathbb{Z}$ so, dass*

$$f(n) = \sum_{\nu=0}^{m} a_\nu \binom{n}{\nu}.$$

Beweis: Wir führen den Beweis per Induktion über m.
IA: Für $m = 0$ ist f konstant. Da $f(n_0) \in \mathbb{Z}$, ist auch $f \in \mathbb{Z}$.
IV: Die Behauptung gelte für $m = l - 1$.
IS: Sei nun $m = l$. Betrachte $g(n) = f(n+1) - f(n)$. Es ist g ein Polynom von Grad $m - 1$

und $g(n) \in \mathbb{Z}$ für alle $n \geq n_0$. Somit existieren per Induktionsvoraussetzung $b_\nu \in \mathbb{Z}$ so, dass $g(n) = \sum_{\nu=0}^{m} b_\nu \binom{n}{\nu}$. Betrachten wir nun ein weiteres Hilfspolynom

$$h(n) := f(n) - \sum_{\nu=1}^{m} b_{\nu-1} \binom{n}{\nu}.$$

Dann gilt mit

$$\binom{n+1}{\nu} - \binom{n}{\nu} = \binom{n}{\nu-1}, \tag{4}$$

dass

$$\begin{aligned} h(n+1) - h(n) &= g(n) - \sum_{\nu=1}^{m} b_{\nu-1} \left(\binom{n+1}{\nu} - \binom{n}{\nu} \right) \\ &\overset{(4)}{=} g(n) - \sum_{\nu=1}^{m} b_{\nu-1} \binom{n}{\nu-1} = 0. \end{aligned}$$

Somit ist $h(n) = h(0) \in \mathbb{Z}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und wir können f schreiben als

$$f(n) = h(0) + \sum_{\nu=1}^{m} b_{\nu-1} \binom{n}{\nu} = \sum_{\nu=0}^{m} a_\nu \binom{n}{\nu},$$

wobei $a_0 := h(0)$ und $a_\nu := b_{\nu-1}$ für $\nu \geq 1$. □

Lemma 4.67. *Mit den Bezeichnungen aus (4.65) gelten folgende Eigenschaften für P_M:*

- *Für $n \geq d$ gilt $P_M(n) = H_{\mathrm{Gr}^\omega(M)}(n)$.*
- *Der Grad von P_M ist $s-1$.*
- *Es existieren $a_v \in \mathbb{Z}$ so, dass*

$$P_M(n) = \sum_{\nu=0}^{s-1} a_\nu \cdot \binom{n}{\nu} = \frac{a_{s-1}}{(s-1)!} \cdot n^{s-1} + \mathrm{l.\,o.\,t.},$$

wobei $a_{s-1} = G(1) > 0$ und l. o. t. *für Terme niedrigerer Ordnung in n steht.*

Beweis: Mit Hilfe der verallgemeinerten Geometrischen Reihe gilt

$$\frac{1}{(1-t)^s} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{s-1+\nu}{s-1} \cdot t^\nu.$$

Mit (4.62) folgt daraus

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} H_{\mathrm{Gr}^\omega(M)}(\nu) \cdot t^\nu = HP_M^\omega(t) = \frac{G(t)}{(1-t)^s} = \left(\sum_{k=0}^{d} g_k t^k \right) \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{s-1+\nu}{s-1} t^\nu.$$

Betrachten wir nun $n \geq d$. Dann muss aufgrund obiger Gleichheit gelten, dass

$$H_{\mathrm{Gr}^\omega(M)}(n)t^n = \sum_{\substack{k+\nu=n \\ 0\leq k\leq d \\ \nu\geq 0}} g_k \binom{s-1+\nu}{s-1} t^{\nu+k} = \sum_{\mu=0}^{d} g_\mu \binom{s-1+n-\mu}{s-1} t^n = P_M(n)t^n.$$

Zur Bestimmung des Leitkoeffizienten schauen wir uns die Binomialkoeffizienten genauer an:

$$\begin{aligned}\binom{s-1+n-\mu}{s-1} &= \frac{(n+s-1-\mu)!}{(s-1)!(n-\mu)!} \\ &= \frac{1}{(s-1)!}\underbrace{(n-\mu+s-1)(n-\mu+s-2)\dots(n-\mu+s-(s-1))}_{s-1 \text{ Faktoren}}\frac{(n-\mu)!}{(n-\mu)!} \\ &= \frac{1}{(s-1)!}n^{s-1} + \text{l. o. t.}.\end{aligned}$$

Somit ist der Leitterm von $P_M(n)$ gleich

$$\sum_{\mu=0}^{d} \frac{g_\mu}{(s-1)!} n^{s-1} = \frac{G(1)}{(s-1)!} n^{s-1}$$

und $\deg(P_M) = s-1$.
Aus $H_{\mathrm{Gr}^\omega(M)}(n) = P_M(n)$ für $n \geq d$ folgt mit (4.66), dass es $a_\nu \in \mathbb{Z}$ so gibt, dass $P_M(n) = \sum_{\nu=0}^{m-1} a_\nu \binom{n}{\nu}$. Da $P_M(n) = H_{\mathrm{Gr}^\omega(M)}(n) > 0$ für große n gilt, ist $a_{s-1} > 0$. □

Satz 4.68. *Es gilt*

$$\mathrm{GKdim}(M) = \deg(P_M) + 1.$$

Beweis: Es gilt mit (4.16), dass

$$\begin{aligned}\mathrm{GKdim}(M) \overset{(4.6)}{=} d(HF_M^\omega) &= \limsup_{n\to\infty} \log_n \left(\dim_K \left(\bigoplus_{i=0}^{n} G(M)_i \right)\right) \\ &= \limsup_{n\to\infty} \log_n \left(\sum_{i=0}^{n} \dim_K(G(M)_i) \right) \\ &= \limsup_{n\to\infty} \log_n \left(\sum_{i=0}^{n} H_{\mathrm{Gr}^\omega(M)}(i) \right).\end{aligned}$$

Nun gilt nach (4.67) für $n \geq g$, dass $P_M(n) = H_{\mathrm{Gr}^\omega(M)}(n)$, wobei g der Grad der zweiten Hilbert-Reihe ist. Somit gilt für große n, dass

$$\sum_{i=0}^{n} H_{\mathrm{Gr}^\omega(M)}(i) = \sum_{i=0}^{g-1} H_{\mathrm{Gr}^\omega(M)}(i) + \sum_{j=g}^{n} P_M(j).$$

Für die Polstellenordnung s von $HP_M^\omega(t)$ bei $t=1$ gilt jedoch

$$\begin{aligned}\sum_{j=g}^{n} P_M(j) &= \frac{G(1)}{(s-1)!} \cdot (n^{s-1} + (n-1)^{s-1} + (n-2)^{s-1} + \dots) + \mathcal{O}(n^{s-2}) \\ &= \frac{G(1)}{(s-1)!}(n-g)n^{s-1} + \mathcal{O}(n^{s-2})\end{aligned}$$

Infolgedessen gilt, da g fest ist,

$$\limsup_{n\to\infty} \log_n \left(\sum_{i=0}^{n} H_{\mathrm{Gr}^\omega(M)}(i) \right) = s = \deg(P_M) + 1.$$

$\square$

Bemerkung 4.69. Wenn man die Definition der Hilbert-Poincaré-Reihe aus (4.60) verwendet, so erhält man mit einer anderen Herangehensweise ein Polynom p mit folgenden Eigenschaften (vgl. Hilbert-Samuel-Polynom aus [3]):

- $\deg(p) = \mathrm{GKdim}(M)$ und
- für $n \gg 0$ gilt $p(n) = HF_M^\omega(n)$.

Wir führen nun noch eine weitere Kennzahl für Moduln ein:

Definition 4.70. Sei $P_M = \sum_{\nu=0}^{d} a_\nu n^\nu$ (siehe 4.65.), mit $a_d \neq 0$, das Hilbert-Polynom von M. Dann nennen wir

$$e(M) := d! a_d.$$

die *Hilbert-Multiplizität* von M oder kurz *Multiplizität* von M.

Bemerkung 4.71. Mit obigen Bezeichnungen und $HP_M^\omega(t) = \frac{G(t)}{(1-t)^s \cdot \Lambda(t)}$ folgt aus (4.67), dass $e(M) = G(1)$.

Lemma 4.72. *Sei M nun ein endlich erzeugter A-Modul mit einer Filtrierung $F_s^\omega M$. Wenn die Filtrierung von A fixiert wird, zum Beispiel als $F_s^\omega A$, dann ist für alle zulässigen Wahlen von $F_0^\omega M$ die Multiplizität $e(M)$ gleich.*

Beweis: Betrachten wir zwei Filtrierungen $\{F_s^\omega M \mid s \geq 0\}$ und $\{F'^\omega_s M \mid s \geq 0\}$ mit $F_0^\omega M \neq F'^\omega_0 M$. Dann gilt mit (4.67)

$$g(n) := P_M(n) = H_{\mathrm{Gr}^\omega(M)}(n) \quad \text{und} \quad f(n) := P'_M(n) = H_{\mathrm{Gr}^{\omega\prime}(M)}(n)$$

für $n \gg 0$. Da $F_s M$ und $F'_s M$ jeweils Filtrierungen von M erzeugen, existieren $m, m' \in \mathbb{N}_0$ so, dass $F_0 M \subseteq F'_{m'} M$ und $F'_0 M \subseteq F_m M$. Somit ist $F'_n M \subseteq F_{n+m} M$. Dann gilt für $n \gg 0$, dass $f(n) \leq g(n+m)$ und analog, dass $g(n) \leq f(n+m')$. Infolgedessen sind die Leitkoeffizienten der Polynome gleich und daher die Multiplizitäten gleich, da der Grad beider Polynome aufgrund von (4.68) gleich ist. $\square$

Satz 4.73. *Seien N und L zwei weitere endlich erzeugte A-Linksmoduln und sei die Filtrierung $FA = \{V_s \mid s \in \mathbb{N}_0\}$ bezüglich eines erzeugenden Unterraums V von A fest gewählt. Wenn es eine kurze exakte Sequenz*

$$0 \to L \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} N \to 0$$

gibt, so

1) gilt für die Hilbert-Polynome $P_M = P_L + P_N$,

2) gilt für die Gelfand-Kirillov-Dimension $\mathrm{GKdim}(M) = \sup\{\mathrm{GKdim}(L), \mathrm{GKdim}(N)\}$. *Sollten L und M beide nicht der Nullmodul sein, so gilt hier das Maximum statt des Supremums.*

3) trifft genau eine der drei folgenden Aussagen zu, entweder

(a) $\mathrm{GKdim}(L) < \mathrm{GKdim}(N) = \mathrm{GKdim}(M)$ *und* $e(M) = e(N)$,

(b) $\mathrm{GKdim}(N) < \mathrm{GKdim}(L) = \mathrm{GKdim}(M)$ *und* $e(M) = e(L)$ *oder*

(c) $\mathrm{GKdim}(L) = \mathrm{GKdim}(N) = \mathrm{GKdim}(M)$ *und* $e(M) = e(N) + e(L)$.

Beweis: 1) Wir müssen erzeugende Unterräume L_0, M_0 und N_0 so finden, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ die kurze Sequenz

$$0 \to F_nL \to F_nM \to F_nN \to 0$$

exakt ist, wobei die F_nL, F_nM, F_nN die Elemente der von L_0, M_0, N_0 induzierten Filtrierung darstellen (vgl. (4.12)). Da nach dem Homomorphiesatz $\mathrm{im}(i) \cong L/\operatorname{Ker}(i) = L$ gilt, können wir annehmen, dass L ein Untermodul von M ist und i die Einbettung von L in M darstellt. Sei M'_0 ein erzeugender Unterraum von M. Nach (4.12) erzeugen die $F'_sM := V_sM'_0$ eine Filtrierung von M. Da L ein Untermodul von M ist, erzeugen die $F'_sL = L \cap F'_sM$ eine Filtrierung von L. Darüber hinaus können wir aufgrund der Surjektivität von π folgern, dass die $F'_sN = \pi(F'_sM)$ eine Filtrierung von N erzeugen.
Nach (3.24) ist die Sequenz über graduierten Linksmoduln von A

$$0 \to \mathrm{Gr}(L) \to \mathrm{Gr}(M) \to \mathrm{Gr}(N) \to 0$$

exakt. Da M'_0 ein erzeugender Unterraum von M ist, ist $\mathrm{Gr}(M)$ auch endlich erzeugt von M'_0.
Da wir eine zulässige Ordnung verwenden, ist auch $\mathrm{Gr}(A)$ Noethersch. Somit ist auch $\mathrm{Gr}(L)$ endlich erzeugt. Mit (4.41) und entsprechender Wahl von L'_0 beziehungsweise M'_0 existiert ein $m \in \mathbb{N}_0$ so, dass $F'_{n+m}L = V_nF'_mL$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.
Setzen wir nun $L_0 = F'_mL, N_0 = F'_mN$ und $M_0 = F'_mM$ mit entsprechenden Filtrierungen $\{F_sL \mid s \in \mathbb{N}_0\}, \{F_sN \mid s \in \mathbb{N}_0\}$ und $\{F_sM \mid s \in \mathbb{N}_0\}$, so ist

$$F_n \cap L = F'_{m+n} \cap L = F'_{m+n}L = V_nF'_mL = L_n.$$

Demzufolge ist die kurze Sequenz

$$0 \to F_nL \to F_nM \to F_nN \to 0$$

exakt.
Aus der Exaktheit dieser Sequenz folgt, dass $HP_M(t) = HP_N(t) + HP_L(t)$. Infolgedessen gilt auch $P_M = P_N + P_L$.

2) Für $N = \{0\}$ oder $L = \{0\}$ ist $\mathrm{GKdim}(N) = -\infty$ beziehungsweise $\mathrm{GKdim}(L) = -\infty$. Somit muss in diesem Fall das Supremum betrachtet werden.
Sei nun $N \neq \{0\}$ und $L \neq \{0\}$. Dann ist $0 \leq \mathrm{GKdim}(N) < \infty$ und $0 \leq \mathrm{GKdim}(L) < \infty$.
Mit Satz 4.68 folgt

$$\begin{aligned}\mathrm{GKdim}(M) &= \deg(P_M) + 1 \overset{1)}{=} \deg(P_N + P_L) + 1 \\ &= \max\{\deg(P_N) + 1, \deg(P_L) + 1\} = \max\{\mathrm{GKdim}(N), \mathrm{GKdim}(L)\}.\end{aligned}$$

3) Folgt direkt aus 1):
Fangen wir mit c) an. Wenn die Gelfand-Kirillov-Dimensionen von L, M und N gleich sind, so sind mit (4.68) auch die Grade der Hilbert-Polynome gleich. Mit 1) gilt aber

$$\begin{aligned} e(M) &= \deg(P_M)! \cdot \mathrm{lc}(P_M) \overset{1)}{=} \deg(P_L + P_N)! \cdot \mathrm{lc}(P_N + P_L) \\ &= \deg(P_L)!(\mathrm{lc}(P_N) + \mathrm{lc}(P_L) = \deg(P_L)! \cdot \mathrm{lc}(P_L) + \cdot \deg(P_N)! \cdot \mathrm{lc}(P_N) \\ &= e(L) + e(N). \end{aligned}$$

Nun zu b). Da $\mathrm{GKdim}(N) < \mathrm{GKdim}(M) = \mathrm{GKdim}(L)$, ist $\deg(P_L) > \deg(P_N)$. Somit ist

$$\begin{aligned} &\deg(P_M) \overset{1)}{=} \deg(P_N + P_L) = \deg(P_L) \quad \text{und} \\ &\mathrm{lc}(P_M) \overset{1)}{=} \mathrm{lc}(P_N + P_L) = \mathrm{lc}(P_L). \end{aligned}$$

Nach Definition der Multiplizität ist infolgedessen $e(M) = e(L)$.
Fall a) ist analog zu Fall b).

□

Zwischen der Multiplizität eines Moduls $M := A/N$ und der Länge des Moduls gibt es einen interessanten Zusammenhang. Vorher benötigen wir noch einige Definitionen.

Definition 4.74. Man nennt einen Modul $\{0\} \subsetneq M$ *einfach*, wenn $\{0\}$ und M die einzigen Untermoduln von M sind.

Definition 4.75. Die Länge eines Moduls M, $\ell(M)$, ist gegeben durch die maximale Länge einer Kompositionsreihe

$$\{0\} = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \ldots \subsetneq M_n = M,$$

wobei jede Inklusion maximal ist. Dies bedeutet, dass M_{i+1}/M_i ein einfacher Modul ist.

Korollar 4.76. *Ein einfacher Modul $\{0\} \subsetneq M$ hat Länge $\ell(M) = 1$.*

Beweis: Es ist

$$\{0\} = M_0 \subsetneq M_1 = M$$

die Kompositionsreihe von M. Somit ist $\ell(M) = 1$. □

Lemma 4.77. *Sei A eine G-Algebra und $M = A^m/N$ ein endlich erzeugter A-Linksmodul. Falls für alle Untermoduln $\{0\} \subsetneq V \subsetneq W$ von M gilt, dass*

$$\mathrm{GKdim}(M) = \mathrm{GKdim}(W) = \mathrm{GKdim}(W/V),$$

dann ist $e(M) \geq \ell(M)$. Gilt $e(M) = 1$, so ist M einfach.

Beweis: Seien M_1 und M_2 zwei Untermoduln von M, wobei $0 \subsetneq M_1 \subsetneq M_2$. Dann ist die Sequenz

$$0 \to M_1 \to M_2 \to M_2/M_1 \to 0$$

exakt. Nach Satz 4.73 3)(c) ist

$$e(M_2) = e(M_1) + e(M_2/M_1).$$

Da $\{0\} \subsetneq M_1$ und $\{0\} \subsetneq M_2/M_1$, gilt $e(M_1) \geq 1$ und $e(M_2/M_1) \geq 1$. Somit ist $e(M_2) \geq 2$. Die Aussage des Satzes folgt durch iteratives Anwenden dieser Beobachtung.
Wenn $e(M) = 1$, so ist $\ell(M) \leq 1$. Da $\ell(M) \geq 1$ gilt, folgt somit, dass $\ell(M) = 1$. □

Folgerung 4.78. Sei A eine gegebene G-Algebra und $0 \leq d$ die kleinstmögliche Gelfand-Kirillov-Dimension von echten Linksmoduln über A. Sei M ein solcher Modul, also $\mathrm{GKdim}(M) = d$. Dieser Modul erfüllt die Bedingungen von Lemma 4.77. Denn für alle Untermoduln $\{0\} \subsetneq V \subsetneq W$ von M gilt $\mathrm{GKdim}(V) \leq \mathrm{GKdim}(M)$ und $\mathrm{GKdim}(W) \leq \mathrm{GKdim}(M)$. Da W und V auch A-Linksmoduln sind gilt $d = \mathrm{GKdim}(W) = \mathrm{GKdim}(V)$. Aus der Exaktheit der Sequenz

$$0 \to V \hookrightarrow W \twoheadrightarrow W/V \to 0$$

folgt, dass $\mathrm{GKdim}(W/V) \leq \mathrm{GKdim}(W) = \mathrm{GKdim}(V)$. Da W/V ein A-Linksmodul und $V \subsetneq W$ ist, gilt $\mathrm{GKdim}(W/V) = d$.

Bsp. 4.79. Für einen einfachen Modul M muss nicht $e(M) = 1$ gelten und nicht jeder Modul N mit $e(N) = 1$ ist einfach.
Betrachten wir dazu die G-Algebra $A = \mathbb{Q}\langle e, f, h \mid fe = ef - h, he = eh + 2e, hf = fg - 2f\rangle$ bezüglich der graduiert-lexikographischen Ordnung $<$.
Das Linksideal $I = \langle e, h-1, f^2\rangle$ ist maximal: Für ein echtes Ideal das I umfasst müsste gelten, dass die Exponenten der Erzeuger kleiner sind. Dies ist jedoch nur mit der Reduzierung des Exponenten von f^2 möglich, da sonst das resultierende Ideal schon ganz A erzeugen würde. Gäbe es ein solches echtes Ideal J, so hätte J die Form $J = \langle e, h-1, f+k\rangle \neq A$ für ein $k \in K$: Es ist

$$J \ni e(f+k) - fe = ef + ek - ef + h = h + ek.$$

Da $h-1, e \in J$, folgt, dass für alle $k \in K$ schon $1 \in J$ gilt.
Folglich erzeugt J für alle k schon ganz A und I ist maximal. Infolgedessen ist der Linksmodul A/I einfach. Aber es gilt $e(A/I) = 2$ (siehe Beispiel zu ncHilbertMultiplicity im folgenden Kapitel).
Als Folgerung erhalten wir, dass das Linksideal $I_1 := \langle e, h-1\rangle$ nicht maximal ist, da $I_1 \subsetneq I$. Jedoch ist aus [8] bekannt, dass das Linksideal $I_2 := \langle e, h+1\rangle$ maximal ist. Da Beide Ideale die gleiche Exponentenmenge

$$\mathrm{Exp}(I_1) = \mathrm{Exp}(I_2) = (1,0,0) + \mathbb{N}^3 \cup (0,0,1) + \mathbb{N}^3$$

besitzen, sind die Hilbert-Poincaré-Reihen und die Multiplizitäten von A/I_1 und A/I_2 gleich, obwohl A/I_2 einfach ist und A/I_1 nicht.
Darüber hinaus ist

$$\mathrm{Exp}(I) = (1,0,0) + \mathbb{N}^3 \cup (0,2,0) + \mathbb{N}^3 \cup (0,0,1) + \mathbb{N}^3.$$

Da $I_1 \supsetneq I$ und $\mathrm{GKdim}(A/I) = 0 < 1 = \mathrm{GKdim}(A/I_1) = \dim(\mathrm{Exp}(I_1))$ sind die Bedingungen von (4.77) nicht erfüllt. Aus dem Beispiel im Singular-Kapitel ist bekannt, dass

$$e(A/I_1) = e(A/I_2) = 1.$$

Somit gibt es auch nicht einfache Moduln mit einer Multiplizität von 1.

Nun wollen wir in einem Beispiel die obigen Konzepte demonstrieren:

Bsp. 4.80. Wir greifen das Beispiel aus (4.51) wieder auf:
Betrachte die G-Algebra $A = \mathbb{Q}\langle x, y, z \mid yx = xy - z, zx = xz + 2x, zy = yz - 2y\rangle$ bezüglich der graduiert-lexikographischen Ordnung $<$.

Sei $I := {}_A\langle x^2y, z\rangle$ mit Links-Gröbnerbasis x^2y, z. Wir wollen die Hilbert-Funktion, die Hilbert-Poincaré-Reihe, die Gelfand-Kirillov-Dimension und das Hilbert-Polynom von $M := A/I$ bestimmen. Dazu bestimmen wir zuerst die Standard-Filtrierung $M_s = F_sM := \{f \in A/I \mid |\alpha| \leq s, \forall \alpha \in \mathcal{N}(f)\}$ (vgl. (3.27)):

$$M_0 = \mathbb{Q},\ M_1 = M_0 \oplus \mathbb{Q}x \oplus \mathbb{Q}y,\ M_2 = M_1 \oplus \mathbb{Q}xy \oplus \mathbb{Q}x^2 \oplus \mathbb{Q}y^2,\ M_3 = M_2 \oplus \mathbb{Q}xy^2 \oplus \mathbb{Q}x^3 \oplus y^3.$$

Für $i > 3$ gilt $M_i = M_{i-1} \oplus \mathbb{Q}x^i \oplus \mathbb{Q}y^i \oplus \mathbb{Q}xy^{i-1}$, da alle sonstigen Polynome höheren Grades in I liegen.
Berechnen wir nun die assoziierte Graduierung $\mathrm{Gr}(M) = \bigoplus_{n\geq 0} G(M)_n = \bigoplus_{n\geq 0} M_n/M_{n-1}$:

$$G(M)_0 = \mathbb{Q},\ G(M)_1 = \mathbb{Q}x \oplus \mathbb{Q}y,\ G(M)_2 = \mathbb{Q}xy \oplus \mathbb{Q}x^2 \oplus \mathbb{Q}y^2,\ G(M)_3 = \mathbb{Q}xy^2.$$

Für $i > 3$ gilt $G(M)_i = \mathbb{Q}x^i \oplus \mathbb{Q}y^i \oplus \mathbb{Q}xy^{i-1}$.
Damit wir alle Hilbert-Funktionen vergleichen können, bestimmen wir nun noch $\mathrm{Exp}(I)$ und $\Gamma := \{\alpha \in \mathbb{N}_0^3 \setminus \mathrm{Exp}(I)\}$:

$$\mathrm{Exp}(I) = ((2,1,0) + \mathbb{N}_0^3) \cup ((0,0,1) + \mathbb{N}_0^3) \quad \text{und}$$
$$\Gamma = \{(0,0,0)\} \bigcup_{i=1}^{\infty} \{(i,0,0), (0,i,0), (1,i-1,0)\}.$$

Nun betrachten wir die einzelnen Hilbert-Funktionen:

i	$HF_M(i)$	$HF_{\mathrm{Exp}(I)}(i)$	$H_{\mathrm{Gr}(M)}(i)$
0	1	1	1
1	3	3	2
2	6	6	3
3	9	9	3
$i > 3$	$HF_M(i-1)+3$	$HF_{\mathrm{Exp}(I)}(i-1)+3$	3

Nun zur Gelfand-Kirillov-Dimension:

1) Nach Definition ist

$$\begin{aligned}\mathrm{GKdim}(M) &= d(HF_M) = \inf D(HF_M) \\ &= \inf\{a \in \mathbb{R} \mid \exists n_0 \in \mathbb{N}, C \in \mathbb{R} : \forall n \geq n_0 : HF_M(n) \leq Cn^a\}.\end{aligned}$$

Da $HF_M(i) = 3 \cdot i$ für $i > 3$, ist $\inf(D(HF_M)) = 1$.

2) Mit Satz 4.48 und

$$V(\mathrm{Exp}(I)) = \{\{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}.$$

gilt

$$\mathrm{GKdim}(M) = \dim(\mathrm{Exp}(I)) = 3 - \min\{|\sigma| \mid \sigma \in V(\mathrm{Exp}(I))\} = 3 - 2 = 1.$$

Für die Hilbert-Poincaré-Reihe und für die erste und zweite Hilbert-Reihe von M folgt somit

$$
\begin{aligned}
HP_M(t) &= 1 + 2t + 3t^2 + 3t^3 + \sum_{i=4}^{\infty} 3t^i = 3 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} t^i - t - 2 = 3 \cdot \frac{1}{(1-t)} - t - 2 \\
&= \frac{3 - t + t^2 - 2 + 2t}{1-t} = \frac{t^2 + t + 1}{1-t} = \frac{G(t)}{(1-t)^1} \\
&= \frac{(t^2 + t + 1)(1-t)^2}{(1-t)^3} = \frac{t^4 - t^3 - t^2 + t + 1}{(1-t)^3} = \frac{Q(t)}{(1-t)^3}.
\end{aligned}
$$

Das Hilbert-Polynom ist folglich

$$P_M(n) = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{0} = 3 = G(1).$$

Die Multiplizität ist $e(M) = G(1) = 3$.

5. Implementierungen in SINGULAR

In diesem Kapitel wird die Umsetzung der in dieser Arbeit behandelten Algorithmen in SINGULAR vorgestellt. Die Algorithmen benutzen Prozeduren aus dem SINGULAR-Paket PLURAL, welches die Arbeit mit G-Algebren ermöglicht und in [7] umfassend beschrieben ist. Die Beschreibung der Algorithmen erfolgt in englischer Sprache und im Format in Anlehnung an das SINGULAR-Manual [1].
In diesem Abschnitt ist A stets eine G-Algebra und $m \in \mathbb{N}$ so, dass A^m/M ein endlich präsentierter A-Modul ist.

5.1. mondim

This algorithm computes the dimension of a monoideal via (4.26).

Usage:	mondim(B,i); B is list of elements of $\mathbb{N}_0^i$
Return:	int
Purpose:	computes the dimension of the monoideal generated by B
Keywords:	monoideal, dimension

Example:

```
> LIB "nchilbert.lib";
> ring A = 0,(x,y,z),dp;
> list I =[1,0,1],[0,1,1]; // corresponds to the monomial ideal <xz,yz>
> mondim(I,3);
2
```

5.2. GKExp

This algorithm computes the Gelfand Kirillov dimension via (4.48).

Usage:	GKExp(M); M is an ideal/module
Return:	int
Purpose:	computes the Gelfand Kirillov dimension of A^m/M
Assume:	basering is a G-Algebra
Note:	for the zero module, -1 is returned
See also:	GKdim, dim(Plural)

Example:

```
> LIB "ncalg.lib";
> LIB "nchilbert.lib";
> ring R=0,(e,f,h),dp;
> matrix D[3][3]=0;
> D[1,2]=-h;
> D[1,3]=2*e;
> D[2,3]=-2*f;
> def A=nc_algebra(1,D); setring A;
> ideal I = e,h-1; I = std(I);
> print(matrix(I));
h-1,e
> GKExp(I); // computes GKdim(A/I)
1
> ideal J = I, f^2; J = std(J);
```

```
> print(matrix(J));
h-1,e,f2
> GKExp(J);
0
> matrix M[2][4] =
.  e,h-1,0,0,
.  0,0,e,h+1;
> module G = std(M);
> print(G);
h-1,0,  e,0,
0,  h+1,0,e
> GKExp(G);
1
```

5.3. ncHilb

This algorithm computes the first and second Hilbert series by using the result (4.45) and the already implemented methods for commutative computation.

Usage:	ncHilb(M, j); M is a module, j is an int
Return:	intvec
Assume:	M is given via a Groebner basis, j must be 1 or 2 the weights of the ring variables must be positive
Note:	computes the first (if $j = 1$) or second (if $j = 2$) Hilbert series of A^m/M as an intvec the procedure works analogously to the commutative procedure hilb. If the returned vector has the form $v = (v_0, v_1, ..., v_d, 0)$, then the Hilbert series is $v_0 t^0 + v_1 t^2 + ... + v_d t^d$.
See also:	hilb

Example:

```
> LIB "ncalg.lib";
> LIB "nchilbert.lib";
> ring R=0,(e,f,h),dp;
> matrix D[3][3]=0;
> D[1,2]=-h;
> D[1,3]=2*e;
> D[2,3]=-2*f;
> def A=nc_algebra(1,D); setring A;
> ideal I = e,h-1; I = std(I);
> ncHilb(I,1); // first Hilbert series of A/I
1,-2,1,0
> ncHilb(I,2); // second Hilbert series of A/I
1,0
> ideal J = I, f^2; J = std(J);
> ncHilb(J,2);
1,1,0
// now with weights 1,2,3
> ring r = 0,(e,f,h),wp(1,2,3);
> matrix D[3][3]; D[1,2]=-h; D[1,3]=2*e;D[2,3]=-2*f;
> def R = nc_algebra(1,D); setring R;
> ideal I = imap(A,I); I = std(I);
> ncHilb(I,1); // first weighted Hilbert series of R/I
1,-1,0,-1,1,0
> ncHilb(I,2); // second weighted Hilbert series of R/I
1,1,1,0
> matrix M[2][5] =
```

```
. e,h-1,f^2, 0,0,
. 0,0,0, e,h+1;
> module G = std(M);
> print(G);
e,0,h-1,0,  f2,
0,e,0,  h+1,0
> ncHilb(G,1); // first weighted Hilbert series of R^2/G
1,-1,0,-1,0,1,0,1,-1,0
> ncHilb(G,2); // second weighted Hilbert series of R^2/G
1,2,3,3,2,1,0
```

5.4. ncHilbertSeries

This algorithm returns the first and second Hilbert series computed via ncHilb as a polynom.

Usage:	ncHilbertSeries(M, j); M is a module, j is an int
Return:	ring
Purpose:	computes the first (if $j = 1$) or second (if $j = 2$) Hilbert series of A^m/M as a polynom
Assume:	M is given via a Groebner basis
Note:	j must be 1 or 2, the weights of the ring variables must be positive the procedure returns an univariate ring and a polynomial called @codencHS in it

Example:

```
> LIB "ncalg.lib";
> LIB "nchilbert.lib";
> ring R=0,(e,f,h),dp;
> matrix D[3][3]=0;
> D[1,2]=-h;
> D[1,3]=2*e;
> D[2,3]=-2*f;
> def A=nc_algebra(1,D); setring A;
> ideal I = e,h-1; I = std(I);
> ncHilb(I,1);
1,-2,1,0
> def r = ncHilbertSeries(I,1); setring r;
> ncHS; // first Hilbert series of A/I
t2-2t+1
> setring A;
> ncHilb(I,2);
1,0
> def s= ncHilbertSeries(I,2);setring s;
> ncHS; // second Hilbert series of A/I
1
// now with weights 1,2,3
> ring r = 0,(e,f,h),wp(1,2,3);
> matrix D[3][3]; D[1,2]=-h; D[1,3]=2*e;D[2,3]=-2*f;
> def R = nc_algebra(1,D); setring R;
> matrix M[2][5] =
. e,h-1,f^2, 0,0,
. 0,0,0, e,h+1;
> module G = std(M);
> print(G);
e,0,h-1,0,  f2,
0,e,0,  h+1,0
> ncHilb(G,1);
```

```
1,-1,0,-1,0,1,0,1,-1,0
> def r= ncHilbertSeries(G,1);  setring r;
> ncHS;// first weighted Hilbert series of R^2/G
-t8+t7+t5-t3-t+1
> setring R;
> ncHilb(G,2);
1,2,3,3,2,1,0
> def s=ncHilbertSeries(G,2); setring s;
> ncHS;// second weighted Hilbert series of R^2/G
t5+2t4+3t3+3t2+2t+1
```

5.5. ncHilbertPolynomial

This algorithm computes the Hilbert polynomial by using definition 4.65.

Usage:	ncHilbertPolynomial(M); M is a module
Return:	ring
Purpose:	computes the Hilbert polynomial of A^m/M
Assume:	M is given via a Groebner basis
Note:	the weights of the ring variables must be positive the procedure returns an univariate ring and a polynomial called ncHP in it.
See also:	hilbPoly in poly.lib

Example:

```
> LIB "ncalg.lib"
> LIB "nchilbert.lib";
> ring R=0,(e,f,h),dp;
> matrix D[3][3]=0;
> D[1,2]=-h;
> D[1,3]=2*e;
> D[2,3]=-2*f;
> def A=nc_algebra(1,D); setring A;
> ideal I = h^4,e*f*h^3,e^2*f^2*h^2+2*e*f*h^2; I = std(I);
> dim(I);
2
> def r = ncHilbertPolynomial(I); setring r;
> ncHP;
2t+7
kill r;
// now consider admissible weights 1,2,3
> ring r = 0,(e,f,h),wp(1,2,3);
> matrix D[3][3]; D[1,2]=-h; D[1,3]=2*e;D[2,3]=-2*f;
> def R = nc_algebra(1,D); setring R;
> ideal I = imap(A,I);
> I = std(I);
> dim(I);
2
> def r = ncHilbertPolynomial(I); setring r;
// ** redefining r **
> ncHP;
6t+18
```

5.6. ncHilbertMultiplicity

This algorithm computes the multiplicity by using (4.71).

Usage:	ncHilbertMultiplicity(M); M is a module
Return:	int
Purpose:	computes the (Hilbert) multiplicity of A^m/M
Assume:	M is given via a Groebner basis
Note:	the weights of the ring variables must be positive

Example:

```
> LIB "ncalg.lib"
> LIB "nchilbert.lib";
> ring R=0,(e,f,h),dp;
> matrix D[3][3]=0;
> D[1,2]=-h;
> D[1,3]=2*e;
> D[2,3]=-2*f;
> def A=nc_algebra(1,D); setring A;
> ideal I = e,h-1; I = std(I);
> ncHilbertMultiplicity(I); // multiplicity of A/I
1
> ideal J = I, f^2; J = std(J);
> ncHilbertMultiplicity(J);
2
  // now with weights 1,2,3
> ring r = 0,(e,f,h),wp(1,2,3);
> matrix D[3][3]; D[1,2]=-h; D[1,3]=2*e;D[2,3]=-2*f;
> def R = nc_algebra(1,D); setring R;
> ideal I = imap(A,I); I = std(I);
> ncHilbertMultiplicity(I);
3
> matrix M[2][5] =
. e,h-1,f^2, 0,0,
. 0,0,0, e,h+1;
> module G = std(M);
> print(G);
. e,0,h-1,0,  f2,
. 0,e,0,  h+1,0
> ncHilbertMultiplicity(G);
12
```

5.7. Example

Consider the G-algebra A given by $A = \mathbb{Q}\langle e,f,h \mid fe = ef - h, he = eh + 2e, hf = fg - 2f\rangle$ according to the degree reverse lexicographical order $<$.
Let $I := \langle e, h-1\rangle$. Then a left Gröbner basis is given by:

```
> std(I);
h-1,e
```

The Gelfand Kirillov dimension of A/I is 1:

```
> GKExp(I);
1
```

For the first Hilbert series $Q(t)$ we get:

```
> def r = ncHilbertSeries(I,1); setring r;
> ncHS;
t^2-2t+1
```

The second Hilbert series $G(t)$ is given by:

```
> def s = ncHilbertSeries(I,2); setring s;
> ncHS;
1
```

The Hilbert polynomial is:

```
> def r = ncHilbertPolynomial(I); setring r;
> ncHP;
1
```

Therefore the multiplicity is 1:

```
> ncHilbertMultiplicity(I);
1
```

From the computed information we conclude that

$$HP_{A/I}(t) = \frac{t^2 - 2t + 1}{(1-t)^3} = \frac{1}{1-t}.$$

6. Anhang

Literatur

[1] `http://www.singular.uni-kl.de/index.php/singular-manual.html`.

[2] W. D. Andres. *Noncommutative Computer Algebra with Applications in Algebraic Analysis*. Dissertation, RWTH Aachen University, 2014.

[3] J. L. Bueso, J. Gómez-Torrecillas, A. Verschoren. *Algorithmic Methods in Non-commutative Algebra.* Kluwer Academic Publishers, 2003.

[4] S. C. Coutinho. *A Primer of Algebraic D-modules.* Cambridge University Press, 1995.

[5] G.-M. Greuel, G. Pfister. *A Singular introduction to commutative algebra.* Springer, 2007.

[6] J. Hoffmann. *Dimensionen in der algebraischen Geometrie.* Seminararbeit, RWTH Aachen University, 2013.

[7] V. Levandovskyy. *Non-commutative Computer Algebra for polynomial algebras: Gröbner bases, applications and implementation.* Dissertation, Universität Kaiserslautern, 2005.

[8] H. Li. *Noncommutative Gröbner Bases and Filtered-Graded Transfer.* Springer, 2002.

[9] M. Lorenz. *Gelfand-Kirillov Dimension And Poincaré Series.* Cuadernos de Algebra 7. Universidad de Granada, 1988.

[10] J.C. McConnel, J.C. Robson. *Noncommutative Noetherian Rings.* American Mathematical Society, 2001.

[11] K. Voelkel. *Das Hilbert-Polynom und die Gelfand-Kirillov-Dimension von A_n-Moduln.* Seminararbeit, Universität Freiburg, 2009. `http://blog.konradvoelkel.de/wp-content/uploads/vortrag_hilbert_polynom.pdf`.

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichere ich an Eides statt und durch meine Unterschrift, dass die vorliegende Arbeit von mir selbstständig, ohne fremde Hilfe angefertigt worden ist. Inhalte und Passagen, die aus fremden Quellen stammen und direkt oder indirekt übernommen worden sind, wurden als solche kenntlich gemacht. Ferner versichere ich, dass ich keine andere, außer der im Literaturverzeichnis angegebenen Literatur verwendet habe. Diese Versicherung bezieht sich sowohl auf Textinhalte als auch auf alle enthaltenden Abbildungen, Skizzen und Tabellen. Die Arbeit wurde bisher keiner Prüfungsbehörde vorgelegt und auch noch nicht veröffentlicht.

Aachen, den 04.03.2014