Theta-Reihen mit sphärischen Koeffizienten

Vortrag zum Seminar zu Gitter und Codes, 16.05.2011

Marc Haßler

Inhaltsverzeichnis

Das Ziel dieses Vortrags ist es ein Theta-Reihen mit sphärischen Koeffizienten vorzustellen. Hierfür wird zuerst grundlegend auf sphärische Polynome eingegangen, danach wird die Theta-Reihe mit sphärischen Koeffizienten definiert und dargestellt, welche Veränderungen im Bezug auf die von Herrn Lobbert vorgestellten Theta-Reihen entstehen.

§1 Rückblick Theta-Reihen

Wir wollen nun auf Grund der Übersichtlichkeit und Verständlichkeit zuerst einige Themen von Herrn Löbbert wieder aufgreifen, die wir in weiteren Verlauf brauchen werden.

(1.1) Definition (Theta-Funktion)
Zu einem Gitter $\Gamma \in R^n$ heißt

$$\vartheta_\Gamma(\tau) := \sum_{x\in\Gamma} q^{\frac{1}{2}x\cdot x}, \qquad q := e^{2\pi i\tau},\ \tau \in \mathbb{H}$$

Theta Funktion des Gitters. ◇

(1.2) Definition (Poisson Summenformel)
Sei $\Gamma \in \mathbb{R}^n$ volles Gitter und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion mit den Eigenschaften:

$(V1)$ $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, dx < \infty$
$(V2)$ Die Reihe $\sum_{x\in\Gamma} |f(x+u)|$ konvergiert kompakt gleichmäßig in $u \in \mathbb{R}^n$
$(V3)$ Die Reihe $\sum_{y\in\Gamma^*} \hat{f}(y)$ ist absolut konvergent.

Wobei $\hat{f}$ die Fourier Transformation von f bezeichnet.

Dann gilt:

$$\sum_{x\in\Gamma} f(x) = \frac{1}{vol(\mathbb{R}^n/\Gamma)} \sum_{y\in\Gamma^*} \hat{f}(y)$$
◇

§2 sphärische Polynome

— Definition —

(2.1) Definition (sphärisches Polynom)
Ein Polynom $P \in \mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$ heißt *sphärisch* genau dann, wenn $\Delta P = 0$, wobei

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i^2}$$

den Laplace Operator bezeichnet.
Ein Polynom heißt *sphärisch vom Grad r*, wenn das Polynom sphärisch ist und homogen vom Grad r ◇

— Aufbau sphärischer Polynome vom Grad r —

(2.2) Korollar
Ein Polynom $P \in \mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$ ist genau dann sphärisch vom Grad r, wenn P eine Linearkombination von Funktionen der Form $(\xi \cdot x)^r$ ist, wobei $\xi \in \mathbb{C}^n$ mit $\xi^2 = 0$ falls $r \geq 2$ ◇

Beweis (vgl. Ebeling theorem 3.1)
„ $\Leftarrow$ “
Sei $P = (\xi \cdot x)^r$ mit $\xi \in \mathbb{C}^n$, $\xi^2 = 0$.
Dann gilt:

$$\Delta P = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i^2} \left(\sum_j \xi_j x_j \right)^r = r(r-1) \left(\sum_i \xi_i^2 \right) (\xi \cdot x)^{r-2} = 0$$

„ $\Rightarrow$ “
Für diese Richtung betrachten wir das innere Produkt von Funktionen $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$(f, g) = \int_K f(x)\overline{g(x)}dx$$

mit $K = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \sum x_i^2 \leq 1 \right\}$, $dx = dx_1 ... dx_n$.
Angenommen $P \in \mathbb{C}[x_1 ... x_n]$ sei ein sphärisches Polynom vom Grad r , welches (bzgl. des inneren Produktes) orthogonal zu allen Funktionen der Form $(\xi \cdot x)^r$ ist, $\xi \in \mathbb{C}^n$ und $\xi^2 = 0$ wenn $r \geq 2$.

Wir zeigen nun, dass dann $P = 0$ gilt.
Hierzu benötigen wir vier Gleichungen. Sei f ein homogenes Polynom vom Grad r in $x_1, ..., x_n$.Dann gilt:

$$(1) \qquad \sum_i \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \cdot x_i = rf(x)$$

Sei $\omega_i := (-1)^{i-1} dx_1...\widehat{dx_i}...dx_n$, $\omega := \sum x_i \omega_i$. Dann ist $dx = dx_i \omega_i$.
Integrieren von Gleichung (1) und Anwenden von Stoke's Theorem liefert:

$$(2) \qquad r \int_{\partial K} f\omega = \int_{\partial K} \left(\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot x_i \right) \omega = \int_K \Delta f(x) dx$$

wobei $\partial K = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum x_i^2 = 1 \right\}$ den Rand von K bezeichnet. Die dritte Gleichung ist

$$(3) \qquad \int_K \Delta f(x) dx = r(r+n) \int_K f(x) dx$$

Diese erhält man aus (2) und Stoke's Theorem:

$$\int_{\partial K} f\omega = \int_{\partial K} \sum_i f x_i \omega_i = \int_K \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} (f x_i)\, dx = (r+n) \int_K f(x) dx$$

Und als letztes benötigen wir:

$$(4) \qquad \Delta (fg) = f\Delta g + g\Delta f + 2 \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_i}$$

Nun sei $g = (\xi \cdot x)^r$ mit $\xi^2 = 04$ und $r \geq 2$. (Der Fall $r = 1$ ist trivial).
Dann sind sowohl g als auch die partiellen Ableitungen von g sphärisch, dies gilt auch für P und die partiellen Ableitungen von P.
Aus den Gleichungen (3) und (4) folgt:

$$0 = \int_K P(x) \overline{g(x)} dx = const. \int_K \Delta(Pg)(x) dx = const. \int_K \sum_{i_1, \ldots i_r} \frac{\partial P(x)}{\partial x_i} \frac{\partial g(x)}{\partial x_i} dx$$
$$= ... = const. \int_K \sum_i \frac{\partial^r P(x)}{\partial x_i ... \partial x_r} \frac{\partial^r g(x)}{\partial x_i ... \partial x_r} dx.$$

Iteriert man nun (1), so erhält man:

$$\begin{aligned} r!P &= \sum_{i_1,\ldots i_r} \frac{\partial^r P}{\partial x_i \ldots \partial x_r} x_{i_1} \ldots x_{i_r}, \\ r!\xi_{i_1} \ldots \xi_{i_r} &= \frac{\partial^r g}{\partial x_i \ldots \partial x_r} \end{aligned}$$

Also führt die obige Gleichung dazu, dass $P(\xi) = 0$, wenn $\xi^2 = 0$. Somit teilt $\delta(x) = x^2 = \sum x_i^2$ das Polynom P(x) und ex existiert ein Polynom $f(x)$ mit $P(x) = \delta(x) f(x)$. (2) und (3) führen nun zu (beachte: $\delta \equiv 1$ auf dem Rand von K):

$$\begin{aligned} \int_K f(x)\overline{f(x)}dx &= const. \int_{\partial K} f\overline{f}\omega \\ &= const. \int_{\partial K} \delta f\overline{f}\omega \\ &= const. \int_K P(x)\overline{f(x)}dx. \end{aligned}$$

Wenn wir nun zeigen, dass das Polynom P orthogonal zu allen homogenen Polynomen vom Grad $< r$ ist. Dann gilt:

$$\int_K f(x)\overline{f(x)}dx = const. \int_K P(x)\overline{f(x)}dx = 0$$

Also $f = 0$ und damit auch $P = 0$.
Sei f also ein homogenes Polynom mit Grad $< r$, dann gilt durch (3) und (4):

$$\begin{aligned} \int_K P(x)\overline{f(x)}dx &= const. \int_K \Delta(Pf)(x)dx \\ &= const. \int_K P(x)\Delta f(x)dx \\ &= const. \int_K P(x)\Delta^2 f(x)dx \\ &= \ldots \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Also ist das Polynom P orthogonal zu allen homogenen Polynomen vom Grad $< r$ und somit ist $P = 0$.

§ 3 Theta-Reihen mit sphärischen Koeffizienten

— *Fourier Transformationen* —

Zu Beginn ohne Beweis ein paar Funktionen mit ihren Fourier Transformationen, um die Poisson Summenformel anwenden zu können.
(vgl. Ebeling - Chapter 3)

$f(x) = e^{\pi i \left(\frac{-1}{\tau}\right) x^2}$ $\hat{f}(y) = \left(\sqrt{\frac{\tau}{i}}\right)^n e^{\pi i \tau y^2}$	$(\tau \in \mathbb{H})$
$f(x) = e^{\pi i \left(\frac{-1}{\tau}\right)(x+z)^2}$ $\hat{f}(y) = \left(\sqrt{\frac{\tau}{i}}\right)^n e^{2\pi i y \cdot z} e^{\pi i \tau y^2}$	$(\tau \in \mathbb{H}, z \in \mathbb{R}^n)$
$f(x) = P(x) e^{-\pi x^2}$ $\hat{f}(y) = P\left(\frac{-1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial y1}, ..., \frac{-1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial yn}\right) e^{-\pi y^2}$	$(P \in \mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$
$f(x) = (\xi \cdot x)^r e^{-\pi x^2}$ $\hat{f}(y) = \left(\frac{\xi \cdot x}{i}\right)^r e^{-\pi y^2}$	$(\xi \in \mathbb{C}^n, \xi^2 = 0$für $r \geq 2)$
$f(x) = (\xi \cdot (x+z))^r e^{\pi i \left(\frac{-1}{\tau}\right)(x+z)^2}$ $\hat{f}(y) = \left(\sqrt{\frac{\tau}{i}}\right)^{n+2r} \left(\frac{\xi \cdot x}{i}\right)^r e^{2\pi i y \cdot z} e^{\pi i \tau y^2}$	τ, ξ, z wie oben

(3.1) Definition (Theta-Reihe mit sphärischen Koeffizienten)
Sei $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ ein Gitter, $z \in \mathbb{R}^n$, P ein sphärisches Polynom vom Grad r und $\tau \in \mathbb{H}$. Dann definieren wir:

$$\vartheta_{z+\Gamma,P}(\tau) := \sum_{x \in z+\Gamma} P(x) q^{\frac{1}{2}x^2} = \sum_{x \in \Gamma} P(x+z) q^{\frac{1}{2}(x+z)^2} \qquad q := e^{2\pi i \tau}$$

$\diamond$

Die Funktion $\vartheta_{z+\Gamma,P}(\tau)$ ist holomorph auf $\mathbb{H}$. Auf Grund der Definition folgt $\vartheta_{z_1+\Gamma,P}(\tau) = \vartheta_{z_2+\Gamma,P}(\tau)$, wenn $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^n$ mit $z_1 \equiv z_2 (\mathrm{mod}\ \Gamma)$.

(3.2) Korollar
Es gilt die Identität:

$$\vartheta_{z+\Gamma,P}\left(\frac{-1}{\tau}\right) = \left(\sqrt{\frac{\tau}{i}}\right)^{n+2r} i^{-r} \frac{1}{vol(\mathbb{R}^n/\Gamma)} \sum_{y \in \Gamma^*} P(y) e^{2\pi i y \cdot z} q^{\frac{1}{2}y^2}$$

$\diamond$

Beweis
Wegen Korollar (2.2) lässt sich $\vartheta_{z+\Gamma,P}(\tau)$ schreiben als endliche Summe der Form:

$$\sum_{x\in\Gamma} (\xi\cdot(x+z))^r e^{\pi i\tau(x+z)^2} \qquad \text{mit } \xi\in\mathbb{C}^n, \xi^2=0 \text{ für } r\geq 2$$

Nun gilt laut Poisson Summenformel und der aus der Tabelle bekannten Fourier Transformation:

$$\sum_{x\in\Gamma} (\xi\cdot(x+z))^r e^{\pi i(-\frac{1}{\tau})(x+z)^2}$$
$$= \left(\sqrt{\frac{\tau}{i}}\right)^{n+2r} i^{-r}\frac{1}{vol(\mathbb{R}^n/\Gamma)}\sum_{y\in\Gamma^*}(\xi\cdot y)^r e^{2\pi i y\cdot z}e^{\pi i\tau y^2}.$$

□

Nun machen wir einige Annahmen die bis zum Ende des Seminarthemas gelten werden: $\Gamma\subset\mathbb{R}^n$ ein gerades, ganzes Gitter, n ist gerade. P ist ein sphärisches Polynom vom Grad r, $k:=\frac{n}{2}+r$ und $v(\Gamma):=vol(\mathbb{R}^n/\Gamma)$.
Beachte: $\Gamma\subset\Gamma^*$ und aus $y_1,y_2\in\Gamma^*$ mit $y_1\equiv y_2(\text{mod }\Gamma)$ folgt $y_1\cdot x\equiv y_2\cdot x(\text{mod }\mathbb{Z})$ für alle $x\in\Gamma$ und $y_1^2\equiv y_2^2(\text{mod }2\mathbb{Z})$.
Nun haben wir folgende Formeln für $p\in\Gamma^*$:

$$\vartheta_{p+\Gamma,P}(\tau+1)=e^{\pi i p^2}\vartheta_{p+\Gamma,P}(\tau) \qquad (T1)$$
$$\vartheta_{p+\Gamma,P}\left(\frac{-1}{\tau}\right)=\frac{1}{v(\Gamma)}\left(\frac{\tau}{i}\right)^k i^{-r}\sum_{\sigma\in\Gamma^*/\Gamma}e^{2\pi i\sigma p}\vartheta_{p+\Gamma,P}(\tau) \qquad (T2)$$

Die Gruppe $SL_2(\mathbb{Z})$ operiert auf $\mathbb{H}$ und den Funktionen $f:\mathbb{H}\to\mathbb{C}$ durch die Funktion $f|_kA$ definiert als:

$$(f|_kA)(\tau):=f(A\tau)(c\tau+d)^{-k}$$

mit $\tau\in\mathbb{H}$ und $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in SL_2(\mathbb{Z})$.
$(T1)$ und $(T2)$ beschreiben die Veränderungen von $\vartheta_{p+\Gamma,P}$ bezüglich den Erzeugern S,T der $SL_2(\mathbb{Z})$.

(3.3) Lemma
Sei $p\in\Gamma^*$, $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in SL_2(\mathbb{Z})$, dann gilt:

$$\vartheta_{p+\Gamma,P}|_kA=\frac{1}{v(\Gamma)c^{n/2}i^{k+r}}\sum_{\sigma\in\Gamma^*/\Gamma}\left(e^{-\pi i b(d\sigma^2+2\sigma p)}\sum_{\substack{\lambda\in\Gamma^*/c\Gamma\\ \lambda\equiv p+d\sigma(\Gamma)}}e^{\pi i\frac{a}{c}\lambda^2}\right)\vartheta_{\sigma+\Gamma,P}$$

für $c \neq 0$ und

$$\vartheta_{p+\Gamma,P}|_k A = \frac{1}{d^{n/2}} e^{\pi i a b p^2} \vartheta_{ap+\Gamma,P}$$

für $c = 0$. ◇

Beweis
Für $c = 0$ ergibt sich die Behauptung aus der Definition als eine Verallgemeinerung von $(T1)$:

$$\begin{aligned}
(\vartheta_{p+\Gamma,P}|_k A)(\tau) &= d^{-k} \vartheta_{p+\Gamma,P}(A\tau) \\
&= d^{-k} \vartheta_{p+\Gamma,P}(a^2\tau + ab) && \text{da } a = d^{-1} \\
&= d^{-k} \sum_{x \in p+\Gamma} P(x) e^{\pi i (a^2\tau + ab) x^2} \\
&= d^{-k} e^{\pi i a b p^2} \sum_{x \in p+\Gamma} P(x) e^{\pi i \tau (ax)^2} \\
&= d^{-k} e^{\pi i a b p^2} a^{-r} \sum_{x \in ap+\Gamma} P(x) e^{\pi i \tau (x)^2} \\
&= d^{-\frac{n}{2}} e^{\pi i a b p^2} \vartheta_{ap+\Gamma,P}(\tau)
\end{aligned}$$

Für den Fall $c \neq 0$ vgl. Ebeling Proposition 3.2, hier jedoch die Beweisskizze dazu: O.b.d.A. nimmt man an, dass $c > 0$, da

$$\vartheta_{p+\Gamma,P}|_k A = \vartheta_{p+\Gamma,P}|_k \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Bigg|_k \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$$

Da aus $y_1, y_2 \in \Gamma^*$, $y_1 \equiv y_2 (\mathrm{mod}\ c\Gamma)$ folgt, dass $y_1^2 \equiv y_2^2 (\mathrm{mod}\ 2c\mathbb{Z})$ ist, können wir schreiben:

$$\vartheta_{p+\Gamma,P} = \sum_{\substack{\lambda \in \Gamma^*/c\Gamma \\ \lambda \equiv p(\Gamma)}} \vartheta_{\lambda+c\Gamma,P}$$

Verwendet man nun, dass $\frac{a\tau+b}{c\tau+d} = \frac{a}{c} - \frac{1}{c(c\tau+d)}$ gilt und wendet dann die Formeln $(T1)$ und $(T2)$ auf

$$\vartheta_{\lambda+c\Gamma,P}\left(\frac{a}{c} - \frac{1}{c(c\tau+d)}\right)$$

□

an bekommt man nach einigem Einsetzen und Umschreiben das gewünschte Ergebnis.

Im weiteren Verlauf wollen wir nun die Koeffizienten der Formel aus Lemma (3.3) für $c \neq 0$ weiter betrachten, um am Ende für bestimmte Teilmengen von der $SL_2(\mathbb{Z})$ eine leichtere Formel zu bekommen.

Sei

$$S := \sum_{\substack{\lambda \in \Gamma^*/c\Gamma \\ \lambda \equiv p + d\sigma (\Gamma)}} e^{\pi i \frac{a}{c} \lambda^2}$$

Ersetzt man nun λ durch $\lambda + c\mu$, wobei $\mu \in \Gamma^*$, $c\mu \in \Gamma$, so erhält man

$$\begin{aligned} S &= \sum_{\substack{\lambda \in \Gamma^*/c\Gamma \\ \lambda \equiv p + d\sigma (\Gamma)}} e^{\pi i \frac{a}{c} (\lambda + c\mu)^2} \\ &= e^{\pi i a c \mu^2} \sum_{\lambda \ldots} e^{\pi i (\frac{a}{c} \lambda^2 + 2a\lambda\mu)} \\ &= e^{\pi i (ac\mu^2 + 2a(p + d\sigma)\mu)} \sum_{\lambda \ldots} e^{\pi i \frac{a}{c} \lambda^2} \\ &= e^{\pi i (ac\mu^2 + 2a(p + d\sigma)\mu)} \cdot S. \end{aligned}$$

Also ist $S \neq 0$ nur dann, wenn:

$$e^{\pi i (ac\mu^2 + 2a(p + d\sigma)\mu)} = 1$$

für alle $\mu \in \Gamma^*$ mit $c\mu \in \Gamma$.

— *Das Level eines Gitters* —

(3.4) Definition
Das Minimum aller $N \in \mathbb{N}$ mit $N\mu^2 \in 2\mathbb{Z}$ für alle $\mu \in \Gamma^*$ heißt das *Level von* Γ ◇

(3.5) Lemma
Sei N das Level von Γ, dann gilt $N\Gamma^* \subset \Gamma$. ◇

Beweis
Sei $(e_1, ..., e_n)$ eine Basis von Γ und A sei die Matrix $((e_i \cdot e_j))$.
Wir zeigen das NA^{-1} eine ganzzahlige Matrix ist.
Sei $(e_1^*, ..., e_n^*)$ die Dualbasis von $(e_1, ..., e_n)$. Dann gilt:

$$N(e_i^* \cdot e_j^*) = \frac{1}{2} N\left((e_i^* + e_j^*)^2 - (e_i^*)^2 - (e_j^*)^2\right),$$

und somit durch die Definition von N ist $N(e_i^* \cdot e_j^*) \in \mathbb{Z}$ für alle $1 \leq i, j \leq n$ also ist $NA^{-1} = \left((Ne_i^* \cdot e_j^*)\right)$ eine ganzzahlige Matrix.
Es gilt:

$$Ne_i^* = \sum_{j=1}^{n} Nb_{ij}ej$$

mit $B = ((b_{ij})) = A^{-1}$. Also ist $NB = NA^{-1}$ ganzzahlige Matrix und $Ne_i^* \in \Gamma$ für alle $1 \leq i \leq n$. Also ist $N\Gamma^* \subset \Gamma$. □

Sei nun N das Level von Γ und $N|c$, dann kann ist S genau dann nicht Null, wenn $a(p + d\sigma)\mu \in \mathbb{Z}$ für alle $\mu \in \Gamma^*$ (siehe Oben).
Dies ist jedoch äquivalent dazu, dass $a(p + d\sigma) \in \Gamma^{**} = \Gamma$. Dies bedeutet aber das $ap + \sigma \in \Gamma$, da $bc\sigma \in \Gamma$ laut Lemma (3.5).
Also haben wir $\vartheta_{ap+\Gamma,P} = (-1)^r \vartheta_{-ap+\Gamma,P}$ und deshalb gilt folgendes Korollar.

(3.6) Korollar
Sei $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ (n gerade) ein gerades, ganzes Gitter mit Level N, $p \in \Gamma^*$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ und $N|c$.
Dann gilt:

$$\vartheta_{p+\Gamma,P}|_k A = \epsilon(A) e^{\pi i a b p^2} \vartheta_{ap+\Gamma,P}$$

mit:

$$\epsilon(A) = \frac{1}{v(\Gamma)(ic)^{n/2}} \sum_{\lambda \in \Gamma / c\Gamma} e^{\pi i \frac{a}{c} \lambda^2} \qquad \text{für } c \neq 0$$

$$\epsilon(A) = d^{-n/2} \qquad \text{für } c = 0$$

◇

Betrachten wir nun folgende Untergruppen der $SL_2(\mathbb{Z})$:

$$\Gamma_0(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \mid N|c \right\}$$
$$\Gamma_1(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \mid a \equiv d \equiv 1(N), c \equiv 0(N) \right\}$$
$$\Gamma(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \mid \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (N) \right\}$$

Insbesondere gilt also laut Korollar (3.6)

$$\vartheta_{\Gamma,P}|_k A = \epsilon(A)\vartheta_{\Gamma,P}$$

für alle $A \in \Gamma_0(N)$.
$\epsilon : \Gamma_0(N) \to \mathbb{C}^*$ ist ein Gruppenhomomorphismus und wird *Charakter* von $\Gamma_0(N)$ genannt.
Wir wollen uns nun ein wenig mehr mit $\epsilon(A)$ beschäftigen.

(3.7) Korollar
Sei $A \in \Gamma_0(N)$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $d, c \neq 0$.
Dann gilt:

$$\epsilon(A) = d^{-n/2} \sum_{\lambda \in \Gamma / d\Gamma} e^{\pi i \frac{b}{d} \lambda^2}.$$

◇

Beweis (vgl. Ebeling Corollary (3.1))
Wir schreiben

$$\vartheta_{\Gamma,P}|_k A = \vartheta_{\Gamma,P}|_k \left(A \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \right) \Big|_k \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

□

und wenden zweimal die Transformationsformel lemma (3.3) an.

(3.8) Lemma
Sei $A \in \Gamma_0(N)$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Dann gilt:

$$\epsilon \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \epsilon \begin{pmatrix} a & b+la \\ c & d+lc \end{pmatrix}$$

für alle $l \in \mathbb{Z}$ ◇

Beweis
Dies folgt direkt aus Korollar (3.6).

(3.9) Lemma
Sei $A \in \Gamma_0(N)$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $d, c \neq = 0$. Dann gilt:

$$G(b,d) := \sum_{\lambda \in \Gamma/d\Gamma} e^{\pi i \frac{b}{d} \lambda^2} \qquad \text{für } d \neq 0$$

ist eine rationale Zahl.
Insbesondere ist $G(b,d) = G(1,d)$ und somit nur abhängig von d. ◇

Beweis
Da Γ gerades Gitter ist, ist $G(b,d)$ eine Summe von d-ten Einheitswurzeln und liegt deshalb im Körper $\mathbb{Q}(\xi)$ mit $\xi = e^{2\pi i/d}$.
Laut Korollar (3.7) gilt:

$$G(b,d) = d^{n/2}\epsilon(A) \overset{\text{Lemma(3.8)}}{=} d^{n/2}(d+lc)^{-n/2} \sum_{\lambda \in \Gamma/(d+lc)\Gamma} e^{\pi i \frac{b+la}{d+lc} \lambda^2}$$

für alle $l \in \mathbb{Z}$. Also liegt $G(b,d)$ auch im Körper $\mathbb{Q}(\xi_l)$ mit $\xi_l = e^{2\pi i/(d+lc)}$ für alle l.
Es existiert ein $l \in \mathbb{Z}$ so, dass d und $d + lc$ Teilerfremd sind (da c und d Teilerfremd).
Für dieses l gilt jedoch $\mathbb{Q}(\xi) \cap \mathbb{Q}(\xi_l) = \mathbb{Q}$ und damit $G(b,d) \in \mathbb{Q}$.
Insbesondere ist $G(b,d)$ jedoch invariant unter allen Automorphismen von $\mathbb{Q}(\xi)$.
Verwendet man den Automorphismus $\xi \to \xi^b$ sieht man, dass $G(b,d) = G(1,d)$. □

Wir wissen nun, dass $\epsilon(A)$ für $A \in \Gamma_0(N)$ nur von d abhängig ist (siehe Korollar (3.7) und Lemma (3.9)).
Durch Lemma (3.8) wissen wir sogar das $\epsilon(A)$ nur von den Kongruenzklassen d mod N abhängt.
somit bekommen wir $\epsilon(A) = 1$ für alle $A \in \Gamma_1(N)$.
Da $\epsilon(A)$ außerdem eine rationale Zahl ist und via

$$\Gamma_0(N)/\Gamma_1(N) \overset{\cong}{\to} (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$$

$$A \longmapsto d \bmod N$$

zu einem Charakter von $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$ wird, welchen wir mit χ bezeichnen.
Wir betrachten zum Schluss $\chi(d)(= \chi(d \bmod N))$ für eine ganze Zahl d.
Es reicht aus den fall $\chi(p)$ für $p \neq 2$ prim und teilefremd zu N zu betrachten.
Wähle nun also t und u so, dass $pt - uN = 1$ gilt.
Durch anwenden von Korollar (3.6) auf

$$A = \begin{pmatrix} p & 1 \\ uN & t \end{pmatrix}$$

erhält man (da $\chi(t) = \chi(p)$)

$$\begin{aligned} \chi(p)v(\Gamma)(iuN)^{n/2} &= \sum_{\lambda \in \Gamma/uN\Gamma} e^{\pi i \frac{p}{uN}\lambda^2} \\ &\equiv \left(\sum_{\lambda \in \Gamma/uN\Gamma} e^{\pi i \frac{\lambda^2}{uN}} \right)^p (\bmod p) \\ &\equiv \left(\epsilon(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ uN & pt \end{pmatrix})v(\Gamma)(iuN)^{n/2} \right)^p (\bmod p) \end{aligned}$$

mit $\epsilon(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ uN & pt \end{pmatrix}) = 1$, $v(\Gamma) = disc(\Gamma)^{1/2}$ (disc ist die diskriminanten von Γ).
Außerdem gilt $p \nmid disc(\Gamma)$ und damit

$$\begin{aligned} \chi(p) &\equiv \left(v(\Gamma)(iuN)^{n/2} \right)^{p-1} (\bmod p) \\ &\equiv \left(disc(\Gamma)(-1)^{n/2} \right)^{\frac{p-1}{2}} (\bmod p) \end{aligned}$$

Setze nun $\Delta = (-1)^{n/2} disc(\Gamma)$ und es ergibt sich:

$$\chi(p) \equiv \Delta^{\frac{p-1}{2}} (\bmod p) \equiv \left(\frac{\Delta}{p} \right) \qquad \text{(Legendre Symbol)}$$

Daraus folgt nun
(3.10) Satz

$$\begin{aligned} \vartheta_{p+\Gamma,P}|_k A &= \vartheta_{p+\Gamma,P} & &\text{für } A \in \Gamma(N) \\ \vartheta_{\Gamma,P}|_k A &= \left(\frac{\Delta}{d} \right) \vartheta_{\Gamma,P} & &\text{für } A \in \Gamma_0(N) \end{aligned}$$

◇