Die Algebra der Modulformen

Sergio Christian Siccha

20. Juni 2011

Inhaltsverzeichnis

1 Wiederholung

Es werden folgende Definitionen und Sätze benutzt die in vorherigen Vorträgen vorgekommen sind:

Definition 1.1 (Wurzel)**:** *Ein Element $x \in \Gamma$ eines Gitters heißt Wurzel wenn $(x,x) = 2$ ist.*

Definition 1.2 (Theta-Reihe eines Gitters)**:** *Zu einem Gitter $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ definieren wir die Theta-Funktion $\vartheta_\Gamma : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ des Gitters als*

$$\vartheta_\Gamma(\tau) := \sum_{x \in \Gamma} q^{\frac{1}{2}xx}, \quad q := e^{2\pi i \tau}.$$

Zu einem geraden Gitter Γ gibt der Koeffizient zu q^1 der Theta-Funktion die Anzahl Wurzeln von Γ an.

Definition 1.3 (Modulgruppe)**:** *$G := SL_2(\mathbb{Z}) / \{\pm 1\}$ heißt Modulgruppe, G operiert auf $\mathbb{H}$ durch gebrochen-lineare Transformationen.*

Satz 1.4 (Fundamentalbereich)**:** *$D = \left\{ \tau \in \mathbb{H} \;\middle|\; |\tau| \geq 1 \; , \; |Re\ \tau| \leq \frac{1}{2} \right\} \subset \mathbb{H}$ ist ein Fundamentalbereich für die Operation von G auf $\mathbb{H}$.*

Beispiel 1.5: *Äquivalente Gitter:*
Betrachte in $\mathbb{C}$ die Gitter $\langle 1, \zeta_8 \rangle$ und $\langle 1, \zeta_8^3 \rangle$ bzw. $\langle 1, 7i \rangle$ und $\langle 1, \frac{1}{7}i \rangle$. Sowohl erstere werden durch die Modulsubstitution $\tau \longmapsto -\frac{1}{\tau}$ aufeinander abgebildet als auch letztere.

Definition 1.6 (Modulform)**:** *Sei $k \in 2\mathbb{N}$, eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ nennt man (ganze) Modulform vom Gewicht k, falls gilt:*

(1) $f(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}) = (c\tau + d)^k f(\tau)$ für alle $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$,

(2) f lässt sich in $q = e^{2\pi i \tau}$ in eine Potenzreihe entwickeln, d.h. f ist holomorph in $i\infty$.

Eine Modulform mit Nullstelle in $i\infty$ nennt man Spitzenform, d.h. die Fourierentwicklung um $i\infty$ mit Parameter q hat Koeffizienten $a_0 = 0$.

Satz 1.7: *Sei $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ ein gerades, unimodulares Gitter. Dann gilt*

(1) $n \equiv 0 \pmod 8$

(2) ϑ_Γ ist eine ganze Modulform vom Gewicht $\frac{n}{2}$

Ziel des Vortrags

Wir werden die Modulformen als Algebra auffassen und ihre Struktur untersuchen. Zunächst werden wir zu jeder geraden Zahl ≥ 4 eine Modulform konstruieren, dazu untersuchen wir die sogenannten Eisentein-Reihen. Als Resultat werden wir dann den folgenden Satz erhalten:

Satz 3.10: *Die Algebra M der Modulformen ist als Algebra isomorph zum Polynomring $\mathbb{C}[E_4, E_6]$.*

Daraus erhalten wir dann, mithilfe der Klassifikation aller Wurzelgitter und durch betrachten der Theta-Reihen, folgendes Korollar:

Korollar 3.11: *Sei Γ ein gerades unimodulares Gitter im $\mathbb{R}^8$. Dann ist Γ isomorph zu $\mathbb{E}_8$.*

2 Die Eisenstein-Reihen

Definition 2.1 (Eisenstein-Reihe)**:** *Sei $k \in \mathbb{Z}$, k gerade, $k > 2$. Die Reihe*

$$G_k(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau) = \sum_{\substack{(m,n)\in\mathbb{Z}^2 \\ (m,n)\neq 0}} \frac{1}{(m\tau + n)^k}$$

heißt Eisenstein-Reihe zum Gitter $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$ von Ordnung k. Man schreibt auch $G_k(\tau)$.

Satz 2.2: *Die Eisenstein-Reihe $G_k(\tau)$ ist eine ganze Modulform vom Gewicht k.*

<u>Beweis:</u>
G_k ist offensichtlich invariant unter der Substitution $\tau \longmapsto \tau + 1$. Außerdem gilt

$$\tau^k G_k(\tau) = \sum_{\substack{(m,n)\in\mathbb{Z}^2 \\ (m,n)\neq 0}} \frac{\tau^k}{(m\tau + n)^k} = G_k\left(\frac{1}{\tau}\right) = G_k\left(-\frac{1}{\tau}\right).$$

Die anderen Eigenschaften werden wir mithilfe einiger Hilfslemmata beweisen.

□

Lemma 2.3: *Sei Γ ein Gitter in $\mathbb{C}$, für $\sigma > 2$ konvergiert die Reihe*

$$\sum_{\substack{\gamma\in\Gamma \\ \gamma\neq 0}} \frac{1}{|\gamma|^\sigma}.$$

<u>Beweis:</u>
Sei $(\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{C}^2$ eine Basis von Γ, für $m \in \mathbb{N}$ sei P_m das Parallelogram mit den Ecken $\pm m\omega_1, \pm m\omega_2$. Dann ist $|P_m \cap L| = 8m$. Sei $r = \min_{\tau\in P_1} |\tau|$, dann erhalten wir $mr = \min_{\tau\in P_m} |\tau|$ und es gilt

$$\sum_{\gamma\in P_m\cap\Gamma} \frac{1}{|\gamma|^\sigma} \leq 8m \frac{1}{(mr)^\sigma}.$$

Also wird die Reihe

$$\sum_{\substack{\gamma\in\Gamma \\ \gamma\neq 0}} \frac{1}{|\gamma|^\sigma} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{P_m\cap\Gamma} \frac{1}{|\gamma|^\sigma}$$

majorisiert durch die Reihe

$$\sum_{m=1}^{\infty} (8m) \frac{1}{(mr)\sigma} = r^{-\sigma} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{\sigma-1}}.$$

Diese Reihe konvergiert für $\sigma > 2$.

□

Lemma 2.4: *G_k ist holomorph in der oberen Halbebene $\mathbb{H}$.*

<u>Beweis:</u>
Wir betrachten zunächst den Fall dass τ in dem Fundamentalbereich einthalten ist. Dann gilt

$$|m\tau + n|^2 = m^2\tau\overline{\tau} + 2mn\mathrm{Re}\tau + n^2 \geq m^2 - mn + n^2 = |m\eta + n|^2.$$

Daraus folgt $|m\tau + n|^{-k}$ für gerade $k \geq 2$. Nach dem Lemma 2.3 konvergiert die Eisensteinreihe für $k > 2$. Auf jeder kompakten Teilmenge des Fundamentalbereichs D konvergiert die Reihe G_k also gleichmäßig. Analog kann man, indem man $G_k(g^{-1}\tau)$ für $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})/\{\pm 1\}$ betrachtet, folgern dass dies für alle transformierten gD von D gilt. Diese überdecken $\mathbb{H}$, also ist G_k Grenzfunktion einer Folge von holomorphen Funktionen die auf $\mathbb{H}$ kompakt gleichmäßig konvergiert. Also ist G_k holomorph auf $\mathbb{H}$.

$\square$

Um Satz 2.2 zu beweisen bleibt noch zu zeigen dass G_k eine Potenzreihenentwicklung in $q = e^{2\pi i\tau}$ besitzt, d.h. dass G_k holomorph in $i\infty$ ist. Dazu benötigen wir die *Riemannsche* ζ*−Funktion*.

Lemma 2.5: *Sei* $\sigma_l(r) := \sum_{n|r} n^l$ *die Summe der l-ten Potenzen der Teiler von r. Man erhält*

$$G_k(\tau) = 2\zeta(k) + \frac{2(2\pi i)^k}{(k-1)!}\sum_{r=1}^{\infty}\sigma_{k-1}(r)q^r.$$

<u>Beweis:</u>
Wir betrachten die auf der oberen Halbebene holomorphe Funktion $\tau \longmapsto \pi\text{cotg}\pi\tau$ mit Polstellen gerade in $\mathbb{Z}$. Für das Residuum in 0 erhalten wir

$$\lim_{\tau\to 0}\tau\cdot\pi\text{cotg}\pi\tau = 1.$$

Da cotg 1-periodisch ist ist $\forall\tau\in\mathbb{Z}$ das Residuum gleich 1. Als Mittag-Lefflersche Partialbruchentwicklung[1] erhalten wir dann

$$\pi\text{cotg}\pi\tau = \frac{1}{\tau} + \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\tau-m}+\frac{1}{\tau+m}\right).$$

Andererseits gilt

$$\pi\text{cotg}\pi\tau = \pi i\frac{e^{i\pi\tau}+e^{-i\pi\tau}}{e^{i\pi\tau}-e^{i\pi\tau}} = \pi i\frac{e^{i\pi\tau}+1}{e^{i\pi\tau}-1} = \pi i\frac{q+1}{q-1} = \pi i\left(1-2\cdot\frac{1}{1-q}\right) = \pi i\left(1-2\sum_{d=0}^{\infty}q^d\right).$$

Gleichsetzen ergibt:

$$\frac{1}{\tau} + \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\tau-m}+\frac{1}{\tau+m}\right) = \pi i\left(1-2\sum_{d=0}^{\infty}q^d\right).$$

Differenziert man beide Seiten nun $(k-1)$-mal erhält man (für $k\geq 2$) den Teil der Identität für $n=1$ in der Summe:

$$(-1)^{k-1}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{(k-1)!}{(\tau+m)^k} = (-1)(2\pi i)^k\sum_{d=0}^{\infty}d^{k-1}q^d.$$

Für gerade k gilt also

$$G_k(\tau) = \sum_{\substack{(m,n)\in\mathbb{Z}^2\\(m,n)\neq(0,0)}}\frac{1}{(n\tau+m)^k} = 2\zeta(k) + 2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(n\tau+m)^k}.$$

Ersetzt man in der obigen Identität τ durch $n\tau$ erhält man beim Differenzieren $(q^d)' = d\cdot 2\pi i\cdot q^d$ statt $q' = 2\pi i q$. Insgesamt ergibt sich dann

$$G_k(\tau) = 2\zeta(k) + \frac{2(2\pi i)^k}{(k-1)!}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{d=0}^{\infty}d^{k-1}q^{nd}$$

$$\overset{\text{sortieren nach } r=n\cdot d}{=} 2\zeta(k) + \frac{2(2\pi i)^k}{(k-1)!}\sum_{r=1}^{\infty}\sigma_{k-1}(r)q^r.$$

[1][S. 222 Satz 3.1, Funktionentheorie I, Freitag, Springer-Verlag]

□

Aus den Lemmata 2.3 (Konvergenz), 2.4 (Holomorphie) und 2.5 (PRE in $i\infty$) folgt nun der Satz 2.2, d.h. jede Eisenstein-Reihe ist für $k \geq 4$ eine Modulform vom Gewicht k.

Definition 2.6: *Die normierte Eisenstein-Reihe ist*

$$E_k(\tau) := \frac{1}{2\zeta(k)} G_k(\tau).$$

Aus der Funktionentheorie kennt man einen Zusammenhang zwischen den Bernoulli-Zahlen B_n und Werten der Riemannschen $\zeta-$Funktion. Die Bernoulli-Zahlen treten als Koeffizienten einer PRE auf:

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_k \frac{z^n}{n!}.$$

Man erhält dann *(ohne Beweis[2])*:

Lemma 2.7: *Für $k \in 2\mathbb{Z}, k \geq 2$ gilt*

$$\zeta(k) = -\frac{(2\pi i)^k}{2 \cdot k!} B_k.$$

Hieraus folgt direkt das

Korollar 2.8:

$$E_k(\tau) = 1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{r=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(r) q^r.$$

Wir erhalten so mithilfe der Bernoulli-Zahlen explizite Darstellungen der Eisenstein-Reihen. Z.B. gilt $B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2},\ B_k = 0$ für alle weiteren ungeraden $k,\ B_2 = \frac{1}{6}, B_4 = -\frac{1}{30}, B_6 = \frac{1}{42}$. Wir erhalten dann:

$$E_4(\tau) \;=\; 1 + 240 \sum_{r=1}^{\infty} \sigma_3(r) q^r, \text{ und } \; E_6(\tau) \;=\; 1 - 504 \sum_{r=1}^{\infty} \sigma_5(r) q^r.$$

Wir wissen nun dass $E_4(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}) = (c\tau+d)^4 E_4(\tau)$ für alle $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$ gilt. Dann sind E_4^3 und E_6^2 Modulformen vom Gewicht 12, d.h. $E_4^3 - E_6^2$ ist ebenfalls eine Modulform vom Gewicht 12. Da der Koeffizient $a_0 = 0$ in der PRE um $q = e^{2\pi i\tau}$ ist, ist $E_4^3 - E_6^2$ eine nicht-triviale Spitzenform. Um die PRE der erhaltenen Spitzenform zu normieren berechnen wir nun den führenden Koeffizienten:

$$(3 \cdot 240 + 2 \cdot 540)q = 1728q.$$

Die normierte Spitzenform $\Delta := \frac{1}{1728}(E_4^3 - E_6^2)$ - auch Diskriminante genannt - werden wir später gebrauchen um die Struktur der Algebra der Modulformen zu untersuchen. Die Diskriminante Δ tritt auch bei der Betrachtung elliptischer Funktionen bzw. Kurven auf.

3 Die Algebra der Modulformen

Definition 3.1: *Sei M_k der $\mathbb{C}$-Vektorraum der Modulformen von Gewicht k. Dann heißt $M := \bigoplus_{k=0}^{\infty} M_k$ die -durch das Gewicht- graduierte Algebra der Modulformen, die Multiplikation von Modulformen definiert eine Abbildung $M_k \times M_l \longrightarrow M_{k+l}$.*

[2] für einen Beweis siehe [S.187 Satz 7.14 (Euler), Funktionentheorie I, Freitag, Springer-Verlag]

Bemerkung 3.2: *M ist wohldefiniert denn durch das Verhalten unter Modulsubstitutionen ist das Gewicht jeder nicht-trivialen Modulform eindeutig festgelegt, d.h. die Summe ist direkt.*

Bemerkung 3.3: *Sei M_k^0 der $\mathbb{C}$-Vektorraum der Spitzenformen von Gewicht k. Dann ist M_k^0 der Kern der Linearform $M_k \longrightarrow \mathbb{C},\ f \longmapsto f(i\infty)$. Also gilt dim $M_k/M_k^0 \leq 1$. Da außerdem für $k \in 2\mathbb{N},\ k \geq 4$ gilt dass die normierte Eisensteinreihe E_k ein Element von M_k mit $E_k(i\infty) = 1 \neq 0$ ist, erhalten wir für ebendiese k*

$$M_k = M_k^0 \oplus \mathbb{C}E_k.$$

Wir werden nun die Anzahl Nullstellen und das Verhalten in $i\infty$ der Modulformen betrachten, um die Struktur von M_k zu untersuchen und letzten Endes Satz 3.10 zu beweisen.

Definition 3.4: *Sei $f \neq 0$ eine holomorphe Funktion von $\mathbb{H}$ nach $\mathbb{C}$, $p \in \mathbb{H}/G$, $\widetilde{p} \in \mathbb{H}$ ein Vertreter von p, hierbei ist G die Modulgruppe (siehe Definition 1.3). Sei zusätzlich $\nu_{\widetilde{p}}(f)$ die Ordnung (der Nullstelle) von f in $\widetilde{p}$, dann definieren wir $\nu_p(f) := \nu_{\widetilde{p}}(f)$. Außerdem sei $\nu_{i\infty}(f) = r$ der Index des kleinsten Koeffizienten $a_r \neq 0$ in der PRE von f um $q = e^{2\pi i\tau}$*

$$f(\tau) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i q^i$$

Wir bezeichnen ab jetzt mit e_p die Ordnung des Stabilisators $Stab_G(\widetilde{p})$ eines Vertreters von p.

Bemerkung 3.5: *$\nu_p(f)$ ist wohldefiniert. Es ist $e_p = 2$ falls $p = [i]$, $e_p = 3$ falls $p = [\eta]$ und $e_p = 1$ sonst.*

Beweis:
Die Aussagen über die Mächtigkeiten der Stabilisatoren sind bekannt aus dem Vortrag 'Thetafunktionen als Modulformen'[3] vom 18.04. von Christian Löbbert. Für $p \neq i\infty$ und $g \in G$ gilt für passende $k \in \mathbb{N},\ c, d \in \mathbb{Z}$

$$f(\tau) = (c\tau + d)^{-k}\ \ f(g\tau)\,.$$

Die Ordnung von f in p kann sich also höchstens für $p \in \mathbb{Q}$ ändern, Vertreter von p sind aber Elemente von $\mathbb{H}$.

$\square$

Satz 3.6: *Sei $f \neq 0$ eine Modulform vom Gewicht k. Dann gilt:*

$$\nu_{i\infty}(f) + \sum_{p\in\mathbb{H}/G} \frac{1}{e_p}\nu_p(f) = \nu_{i\infty}(f) + \frac{1}{2}\nu_i(f) + \frac{1}{3}\nu_\eta(f) + \sum_{\substack{p\in\mathbb{H}/G \\ p\neq[i],[\eta]}} \nu_p(f) = \frac{k}{12}.$$

Bemerkung 3.7: *Wir benutzen für den Beweis von 3.6 den Satz vom Argumentprinzip aus der Funktionentheorie und die Tatsache dass f nur eine endliche Anzahl Nullstellen in $\mathbb{H}/G$ hat. Nämlich ist f holomorph und kann somit in einer kompakten Teilmenge M des Fundamentalbereichs D nicht unendlich viele Nullstellen haben, sonst wäre $f \equiv 0$. In dem Komplement $D \setminus M$ kann f dann auch nur endlich viele Nullstellen besitzen. Andernfalls hätte die Fourier-Transformierte um $i\infty$ unendlich viele Nullstellen in einem Kompaktum um 0 und wäre somit identisch 0.*

Beweis:
Der Satz vom Argumentprinzip liefert uns dass Integrieren der logarithmischen Ableitung einer Funktion entlang des Randes eines Gebiets die Null- und Polstellen in ebendiesem Gebiet zählt. Sei nun D_ρ die kompakte Teilmenge des Fundamentalbereichs D mit Im$\tau \leq e^{2\pi\rho}$ und ρ so gewählt dass D_ρ Vertreter von allen Nullstellen von f in $\mathbb{H}/G$ enthält. Außerdem sei $\mathcal{C}$ der mathematisch positiv orientierte Rand von D_ρ (siehe Abbildung 1). Wir betrachten zunächst den Fall dass f

[3] Satz 2.(ii)

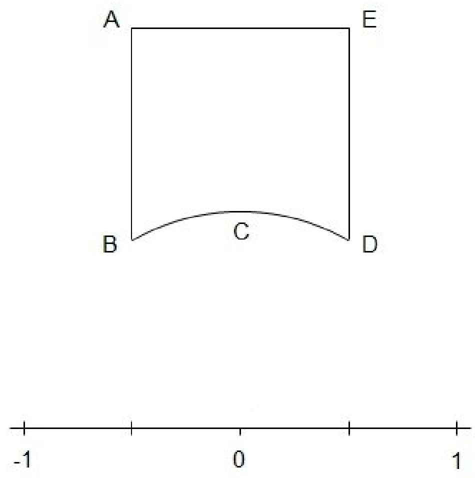

Abbildung 1: Die Kurve $\mathcal{C}$

keine Nullstellen auf $\mathcal{C}$ besitzt. Nach dem Satz vom Argumentprinzip gilt dann

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}} \frac{f'(\tau)}{f(\tau)} d\tau = \sum_{p\in\mathbb{H}/G} \nu_p(f).$$

Ferner gilt

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{f'(\tau)}{f(\tau)} d\tau = \int_A^B \frac{f'(\tau)}{f(\tau)} d\tau + \int_B^C \frac{f'(\tau)}{f(\tau)} d\tau + \int_C^D \frac{f'(\tau)}{f(\tau)} d\tau + \int_D^E \frac{f'(\tau)}{f(\tau)} d\tau + \int_E^A \frac{f'(\tau)}{f(\tau)} d\tau.$$

Da f periodisch ist heben sich auf der rechten Seite der erste und vierte Integrand gegeneinander weg. Die Transformation $S := \tau \longmapsto -\frac{1}{\tau} \in G$ bildet den Bogen BC auf den Bogen DC ab und da f eine Modulform vom Gewicht k ist gilt $f(S\tau) = (-\tau)^k f(\tau) = \tau^k f(\tau)$. Daraus folgt $f'(S\tau) = (\tau^k f(\tau))' = k\tau^{k-1} f(\tau) + \tau^k f'(\tau)$, für die logarithmische Ableitung gilt also

$$\frac{f'(S\tau)}{f(S\tau)} = k \cdot \frac{1}{\tau} + \frac{f'(\tau)}{f(\tau)}.$$

Für die Integrale erhalten wir also

$$\begin{aligned}
\int_B^C \frac{f'(\tau)}{f(\tau)} d\tau + \int_C^D \frac{f'(\tau)}{f(\tau)} d\tau &= \int_B^C \left(\frac{f'(\tau)}{f(\tau)} - \frac{f'(S\tau)}{f(S\tau)} \right) d\tau \\
&= -\int_B^C \frac{k}{\tau} d\tau \\
&= 2\pi i \frac{k}{12}.
\end{aligned}$$

Das Integral entlang der Geraden EA berechnen wir indem wir die 'Koordinatentransformation' $q = e^{2\pi i\tau}$ betrachten. Die Gerade EA wird unter dieser Transformation auf einen negativ orientierten Kreis um die Null geschickt. Da D_ρ so gewählt war dass D_ρ alle Nullstellen von f enthält kommt als einzige Nullstelle in dem Kreis um Null die Null selbst infrage. Also ist

$$\int_E^A \frac{f'(\tau)}{f(\tau)} d\tau = -2\pi i \nu_{i\infty}(f).$$

Wir erhalten
$$\sum_{p\in\mathbb{H}/G} \nu_p(f) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}} \frac{f'(\tau)}{f(\tau)}d\tau = \frac{1}{2\pi i}\left(2\pi i\ \frac{k}{12} - 2\pi i\ \nu_{i\infty}(f)\right).$$
Also gilt
$$\nu_{i\infty}(f) + \sum_{p\in\mathbb{H}/G} \nu_p(f) = \frac{k}{12}$$
für den Fall dass sich auf $\mathcal{C}$ keine Nullstellen von f befinden.

Falls sich auf dem Rand $\mathcal{C}$ von D_ρ Nullstellen von f befinden modifizieren wir den Rand von $\mathcal{C}$ indem wir um die Nullstellen von f kleine Kreise mit gleichen Radien r einfügen (siehe Abbildung 2). Wir berechnen dann den Hauptwert des Integrals entlang $\mathcal{C}$ indem wir die Radien dieser Kreise gegen Null laufen lassen.

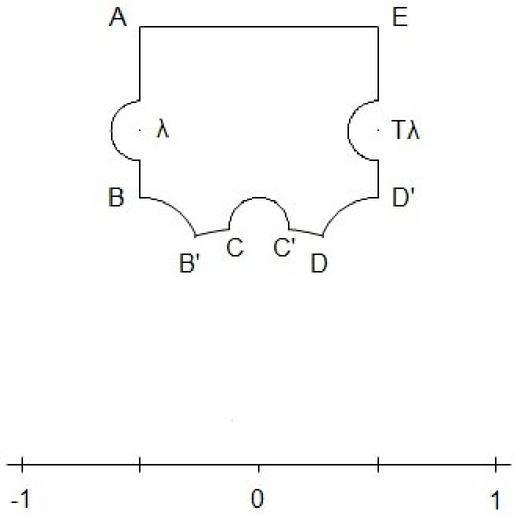

Abbildung 2: Die angepasste Kurve $\mathcal{C}$

Befindet sich eine Nullstelle von f in η so läuft der Winkel des negativ orientierten Kreisbogens BB' gegen $\frac{\pi}{3}$ für r gegen 0. Sei nun ω ein ebenfalls negativ orientierter hinreichend kleiner Kreis um η. Für das Integral entlang von BB' gilt dann
$$\int_B^{B'} \frac{f'(\tau)}{f(\tau)}d\tau \longrightarrow \frac{1}{6}\int_\omega \frac{f'(\tau)}{f(\tau)}d\tau = -\frac{2\pi i}{6}\nu_\eta(f),\ \text{für } r \longrightarrow 0.$$
Da $f(\eta) = 0$ ist auch $f(-\overline{\eta}) = 0$ und wir erhalten zu dem ebenfalls negativ orientierten Kreisbogen DD' um $-\overline{\eta}$ analog den gleichen Grenzwert.
Befindet sich eine Nullstelle von f in i so läuft der Winkel des negativ orientierten Kreisbogens CC' um i gegen $\frac{\pi}{2}$ für r gegen 0. Sei nun ω wieder ein negativ orientierter hinreichend kleiner Kreis um i. Für das Integral entlang von CC' gilt dann
$$\int_C^{C'} \frac{f'(\tau)}{f(\tau)}d\tau \longrightarrow \frac{1}{2}\int_\omega \frac{f'(\tau)}{f(\tau)}d\tau = -\frac{2\pi i}{2}\nu_i(f),\ \text{für } r \longrightarrow 0.$$
Zuletzt betrachten wir den Fall dass f zusätzliche Nullstellen hat die nicht η, $-\overline{\eta}$ oder i sind. Sei also λ eine dieser Nullstellen Œ so dass mit $T := \tau \longmapsto \tau + 1 \in G$ ebenfalls $T\lambda$ eine Nullstelle von f ist die auf $\mathcal{C}$ liegt. Die Werte von f auf den entgegengesetzt orientierten Halbkreisen um λ und $T\lambda$ sind gleich, d.h. also dass die Integrale entlang von diesen beiden Kreisbögen sich gegenseitig

aufheben. Wir erhalten wenn wir alles zusammensetzen insgesamt die sogenannte $\frac{k}{12}$-Formel. □

Bemerkung 3.8: *Aus Satz 3.6 folgt direkt dass Modulformen vom Gewicht 4, 6 und 12 genau eine Nullstelle von Ordnung 1 in η, in i bzw. in $i\infty$ haben.*

Korollar 3.9: *(1) Es gilt $M_k = 0$ für k ungerade, für $k < 0$ und für $k = 2$.*

(2) Es gilt $M_0 = \mathbb{C}$, $M_0^0 = 0$, und für $k = 4,\ 6,\ 8,\ 10$ ist $M_k^0 = 0$ und $M_k = \mathbb{C}E_k$.

(3) Die Multiplikation mit $\Delta = \frac{1}{1728}(E_4^3 - E_6^2)$ definiert einen Isomorphismus von M_{k-12} nach M_k^0.

Beweis:
Sei $f \in M_k,\ f \neq 0$, wir betrachten dann die Aussage des Satzes 3.6

$$\nu_{i\infty}(f) + \frac{1}{2}\nu_i(f) + \frac{1}{3}\nu_\eta(f) + \sum_{\substack{p \in \mathbb{H}/G \\ p \neq [i],[\eta]}} \nu_p(f) = \frac{k}{12}.$$

zu (1)*:* Da alle Summanden der linken Seite ≥ 0 und ganz sind gibt es nicht-triviale Modulformen nur für $k > 0$ und kann man direkt sehen dass der Fall $k = 2$ unmöglich ist.

zu (3)*:* Für $f = \Delta,\ k = 12$ folgt aus der $\frac{k}{12}$-Formel dass Δ genau eine Nullstelle - nämlich die in $i\infty$ - hat. Die Multiplikation mit Δ ist also injektiv.
Um die Surjektivität zu zeigen sei $f \in M_k^0$ beliebig, dann ist $g = \frac{f}{\Delta}$ das Urbild von f. Bleibt zu zeigen dass $g \in M_{k-12}$ gilt, g muss also holomorph in $\mathbb{H}$ sein bzw. darf keine Polstellen haben. Dazu gilt

$$\nu_p(g) = \nu_p(f) - \nu_p(\Delta) = \begin{cases} \nu_p(f) & \text{falls } p \neq i\infty, \\ \nu_p(f) - 1 & \text{falls } p = i\infty. \end{cases}$$

Da gefordert war dass $\nu_{i\infty}(f) \geq 1$ ist also g wiederum eine holomorphe Abbildung, die Multiplikation mit Δ ist also surjektiv.

zu (2)*:* Ist $k \leq 10$ gilt $k - 12 < 0$, also ist $M_k^0 = 0$ und $\dim M_k \leq 1$. Außerdem sind E_k nicht-triviale Elemente von M_k. □

Als Folgerung aus diesem Korollar ergeben sich nicht-triviale analytische Identitäten, z.B.

$$E_4^2 = E_8 \text{ bzw. } 3 \cdot G_4^2 = 7 \cdot G_8.$$

Jetzt haben wir alle Werkzeuge beisammen um den angestrebten Satz zu beweisen.

Satz 3.10: *Die Algebra M der Modulformen ist als Algebra isomorph zum Polynomring $\mathbb{C}[E_4, E_6]$.*

Beweis:
Wir gehen in zwei Schritten vor: zunächst beweisen wir dass E_4 und E_6 die Algebra der Modulformen erzeugen, danach werden wir beweisen dass die Algebra der Modulformen isomorph zum Polynomring in E_4, E_6 ist also dass E_4 und E_6 algebraisch unabhängig sind. Um zu beweisen dass M von E_4 und E_6 erzeugt wird beweisen wir dass jeder Vektorraum M_k von Monomen in E_4 und E_6 erzeugt wird.
Schritt 1:
Seien $k \in 2\mathbb{N}$, $f \in M_k$.
Für $k \leq 6$ folgt die Aussage direkt nach dem Korollar 3.9.
Für $k \geq 8$ beweisen wir die Aussage per Induktion. Offensichtlich lassen sich zu jedem $k \in 2\mathbb{N}$, $k \geq 8$ α, $\beta \in \mathbb{N}_0$ finden s.d. $4\alpha + 6\beta = k$. Dann ist $g = E_4^\alpha E_6^\beta$ eine Modulform vom Gewicht k die keine Nullstelle in $i\infty$ hat. Dann existiert ein $\lambda \in \mathbb{C}$ s.d. $f - \lambda g$ eine Nullstelle in $i\infty$ hat, also eine Spitzenform ist. Für $k \leq 10$ gibt es keine nicht-trivialen Spitzenformen, also ist $f - \lambda g \equiv 0$. D.h. $f = \lambda g$ und $M_k = \langle g \rangle$. Für $k \geq 12$ existiert nach Korollar 3.9 ein $h \in M_{k-12}$ mit $f - \lambda g = h \cdot \Delta$ und wir erhalten unseren Induktionsschritt.

<u>*Schritt 2:*</u>
Es bleibt zu zeigen dass E_4 und E_6 algebraisch unabhängig sind. Angenommen es gibt ein nicht-triviales Polynom $P \in \mathbb{C}[X, Y]$ s.d. $P(E_4, E_6) \equiv 0$, o.B.d.A. habe P minimalen Grad. Den Monomen in P weisen wir einen gewichteten Grad d so zu dass diese den Modulformen von Gewicht d entsprechen (X Grad 4, Y Grad 6). Da M die direkte Summe der Vektorräume M_k ist müssen alle Monome in P den gleichen gewichteten Grad $k \in \mathbb{N}_0$ haben.
Wir können jetzt beweisen dass E_4 jedes Monom in P teilt und erhalten so einen Widerspruch zur Minimalität von P. Sonst wäre P von der Gestalt dass

$$P(E_4, E_6) = cE_6^\alpha + E_4\widetilde{P}(E_4, E_6) \equiv 0$$

gilt für $c \in \mathbb{C}^*$, $\alpha \in \mathbb{N}$ und $\widetilde{P}$ ein nicht-triviales Polynom von gewichtetem Grad $k - 4$. Allerdings ist $E_4(\eta) = 0$ und $E_6(\eta) \neq q0$ nach Bemerkung 3.8. Widerspruch.

□

Korollar 3.11: *Sei Γ ein gerades unimodulares Gitter im $\mathbb{R}^8$, dann ist Γ isomorph zu $\mathbb{E}_8$.*

<u>*Beweis:*</u>
Sei ϑ_Γ die Theta-Reihe von Γ. Nach Satz 1.7 gilt dass ϑ_Γ eine ganze Modulform vom Gewicht 4 ist. Nach Satz 3.9 gilt $M_4 = \mathbb{C}E_4$, da ϑ_Γ konstanten Anteil 1 hat folgt also $\vartheta_\Gamma = E_4$. Der Koeffizient von q in ϑ_Γ ist also nach der Bemerkung zu Korollar 2.8 gleich 240, Γ besitzt also 240 Wurzeln. Diese Wurzeln erzeugen ein Wurzeluntergitter von Rang ≤ 8 von Γ. Nach der Klassifizierung aller Wurzelgitter von Rang ≤ 8 (Vortrag 'Wurzelgitter und Spiegelungsgruppen'[4] vom 11.04 von Sascha Düerkop) muss dieses Wurzelgitter vom Isomorphietyp $\mathbb{E}_8$ sein, andere Wurzelgitter haben weniger als 240 Wurzeln. Insgesamt erhalten wir Γ ein ein zu $\mathbb{E}_8$ isomorphes Untergitter enthält, Γ ist also isomorph zu $\mathbb{E}_8$.

□

[4]Satz 2.8

4 Literatur

Funktionentheorie I, Eberhard Freitag & Rolf Busam, Springer-Verlag

Lattices and Codes, Wolfgang Ebeling, Vieweg-Verlag