5. Übung Algebraische Zahlentheorie II

Prof. Dr. Nebe **(WS 11/12)**

Aufgabe 13. Sei $\mathcal{A}$ eine $\mathbb{Q}$-Algebra, $\mathcal{A} := \langle \alpha, \tau \rangle_{\mathbb{Q}-Alg.}$ mit $\alpha^4 + 4\alpha^2 + 2 = 0, \tau^4 = 2, \tau\alpha\tau^{-1} = 3\alpha + \alpha^3$.
Schreiben Sie $\mathcal{A}$ als $\mathbb{Q}$-Teilalgebra von $\mathbb{Q}[a]^{4\times 4}$, mit $a^4 + 4a^2 + 2 = 0$.
Zeigen Sie $\mathcal{A} \cong \mathbb{Q}^{4\times 4}$.
(Hinweis: $\mathbb{Q}[a] \to \mathbb{Q}[a] : a \mapsto 3a + a^3$ erzeugt $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}[a]/\mathbb{Q})$ und $N(a) = 2$.)

Aufgabe 14. Sei $K := \mathbb{Q}[\sqrt{-7}]$. Bestimmen Sie eine zentrale K-Divisionsalgebra D mit Hasse Invarianten $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$ an den beiden Primstellen über 2 und 0 an allen anderen Stellen. Bestimmen Sie D^{op}.
Hinweis: $\mathbb{Q}[\zeta_7]$ ist ein maximaler Teilkörper von D.
Ist $[D]$ im Bild von $\mathrm{Br}(\mathbb{Q}) \to \mathrm{Br}(K)$?

Aufgabe 15. Sei $\mathcal{A}$ eine $\mathbb{Q}$-Algebra, $\mathcal{A} := \langle \alpha, \tau \rangle_{\mathbb{Q}-Alg.}$ mit $\alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 = 0, \tau^4 = 2, \tau\alpha\tau^{-1} = \alpha^2$.

(i) Bestimmen Sie Matrizen in $\mathbb{Q}[\zeta_5]^{4\times 4}$ (ζ_5 bezeichne eine primitive 5-te Einheitswurzel), welche die Relationen von α und τ erfüllen und eine zu $\mathcal{A}$ isomorphe $\mathbb{Q}$-Teilalgebra von $\mathbb{Q}[\zeta_5]^{4\times 4}$ erzeugen. Zeigen Sie, daß $\mathcal{A}$ zentral einfache $\mathbb{Q}$-Algebra ist.

(ii) Zeigen Sie: $\mathbb{Q}_2 \otimes_{\mathbb{Q}} \mathcal{A}$ hat Schurindex 4 und bestimmen Sie die Hasseinvariante von $\mathbb{Q}_2 \otimes_{\mathbb{Q}} \mathcal{A}$.
(Hinweis: $\mathbb{Q}_2[\alpha]$ ist unverzweigt über $\mathbb{Q}_2$.)

(iii) Sei $\Lambda := \mathbb{Z}[\alpha, \tau] \leq \mathcal{A}$. Bestimmen Sie die Diskriminante von Λ bzgl. der reduzierten Spur.

(iv) Folgern Sie aus (iii) dass $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Q}} \mathcal{A} \cong \mathbb{Q}_p^{4\times 4}$ für alle Primzahlen $p \neq 2, 5$. und dass $\mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda$ die Maximalordnung in $\mathbb{Q}_2 \otimes_{\mathbb{Q}} \mathcal{A}$ ist.

(v) Geben Sie einen Epimorphismus $\mathbb{Z}_5 \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda \to \mathbb{F}_{5^4}$ an und schließen Sie mit (iii), daß $\mathbb{Q}_5 \otimes_{\mathbb{Q}} \mathcal{A}$ eine Divisionsalgebra ist.
(Hinweis: $\tau \mapsto 2^{\frac{1}{4}}, \alpha \mapsto 1$.)

(vi) Bestimmen Sie die Hasseinvariante von $\mathbb{Q}_5 \otimes_{\mathbb{Q}} \mathcal{A}$.
(Hinweis: $\pi_{\mathcal{A}} := \alpha - 1$ erzeugt das maximale Ideal $J(\mathbb{Z}_5 \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda)$ von $\mathbb{Z}_5 \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda$, und $\mathbb{Q}_5[\tau]$ ist ein über $\mathbb{Q}_5$ unverzweigter maximaler Teilkörper von $\mathbb{Q}_5 \otimes_{\mathbb{Q}} \mathcal{A}$. Berechnen Sie die Potenz des Frobeniusautomorphismus, welche $\pi_{\mathcal{A}}$ auf $\mathbb{Z}_5 \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda / J(\mathbb{Z}_5 \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda) \cong \mathbb{F}_5 \otimes_{\mathbb{Z}_5} \mathbb{Z}_5[\tau] \cong \mathbb{F}_{5^4}$ induziert.)

(vii) Zeigen Sie $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathcal{A} \cong \mathbb{R}^{4\times 4}$.

Abgabe: Freitag, den 25.11.2011, in der Vorlesung 10:00 Uhr im Hörsaal III.