6. Übung Algebraische Zahlentheorie II

Prof. Dr. Nebe **(WS 11/12)**

Aufgabe 16. Ein **Absolutbetrag** eines Schiefkörpers K ist eine Funktion $|\cdot| : K \to \mathbb{R}$ mit
(i) $|x| \geq 0$ und $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$. (ii) $|xy| = |x||y|$. (iii) $|x + y| \leq |x| + |y|$.
Zwei Beträge $|\cdot|_1$ und $|\cdot|_2$ heissen **äquivalent**, wenn sie dieselbe Topologie definieren.
(a) Zeigen Sie: $|\cdot|_1$ und $|\cdot|_2$ sind genau dann äquivalent, wenn es ein $s \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt mit $|x|_1 = |x|_2^s$ für alle $x \in K$.
(b) Zeigen Sie: $|\cdot|_1$ und $|\cdot|_2$ sind genau dann äquivalent, wenn für alle $x \in K$ gilt $|x|_1 < 1 \Rightarrow |x|_2 < 1$.
(c) (Der schwache Approximationssatz) Sind $|\cdot|_i$ paarweise inäquivalente Beträge von K $(i = 1, \dots, n)$ und $a_1, \dots, a_n \in K$ gegeben, so gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $x \in K$ mit $|x - a_i|_i < \epsilon$ für alle $i = 1, \dots, n$.
(Hinweis: Kap. II Abschnitt 3 in Neukirch, algebraische Zahlentheorie.)
(d) Verschiedene Stellen eines algebraischen Zahlkörpers K definieren inäquivalente Beträge.
(e) Der (sehr) starke Approximationssatz sagt aus, dass für globale Körper K unter der Voraussetzung von (c) und der zusätzlichen Annahme, dass $|\cdot|_0$ eine von $|\cdot|_1, \dots, |\cdot|_n$ verschiedene Stelle von K gegeben ist, ein $x \in K$ gefunden werden kann, das $|x - a_i|_i < \epsilon$ erfüllt für alle $i = 1, \dots, n$ und $|x|_k \leq 1$ für alle Stellen $|\cdot|_k \neq |\cdot|_i$ $(i = 0, \dots, n)$, also x ganz ist bei allen anderen Stellen (ausser einer vorgegebenen $|\cdot|_0$).

Aufgabe 17. (Steinitzinvariante) R sei ein Dedekindbereich, J_i, I_k gebrochene Ideale. Dann gilt:

$$J_1 \oplus \ldots \oplus J_n \cong I_1 \oplus \ldots \oplus I_m \Leftrightarrow n = m \text{ und } J_1 \cdots J_n \cong I_1 \cdots I_m$$

in der Idealklassengruppe von R. Folgern Sie, dass die multiplikative Idealklassengruppe von R und die additive Idealklassengruppe von R isomorph sind.

Aufgabe 18. Sei L/K eine endliche Erweiterung algebraischer Zahlkörper, $R = \mathbb{Z}_K$, $S = \mathbb{Z}_L$. Sei Λ eine Maximalordnung in einer zentral einfachen L-Algebra A. Für ein Primideal $P \trianglelefteq R$ sei $PS = P_1^{e_1} \cdots P_d^{e_d}$. Sei $\wp_i$ das Primideal von Λ das $P_i\Lambda$ enthält. Dann ist $P_i\Lambda = \wp_i^{m_i}$ wobei $\hat{A}_{P_i} = D_i^{k_i \times k_i}$ und $[D_i : L_{P_i}] = m_i^2$. Weiter ist $P\Lambda = \prod_{i=1}^{d} \wp_i^{e_i m_i}$ und

$$\Lambda^{\#} := \{a \in A \mid trace(a\Lambda) \subseteq S\} = \prod_{P_i \trianglelefteq_{max} S} \wp_i^{1-m_i}\Lambda$$

Abgabe: Freitag, den 2.12.2011, in der Vorlesung 10:00 Uhr im Hörsaal III.