# 2. Übung algebraische Zahlentheorie

**Prof. Dr. Nebe** **(SS 2016)**

Sei $K$ ein algebraischer Zahlkörper und $n = [K : \mathbf{Q}]$.

**Definition**

- Eine Ordnung in $K$ ist ein Teilring von $K$ der auch ein Gitter in $(K, S_{K/\mathbf{Q}})$ ist.
- Zu einem Gitter $I$ in $K$ sei $\mathcal{O}(I) := \{a \in K \mid aI \subseteq I\}$ die zugehörige Ordnung.
- Zu einer Ordnung $R$ in $K$ und einer Primzahl $p$ bezeichne
$$J_p(R) := \{a \in R \mid a^m \in pR \text{ für ein } m \geq 0\}$$
das $p$-Radikal von $R$.

**Aufgabe 1.** Zeigen Sie:

1. Der Ring der ganzen Zahlen $\mathbf{Z}_K$ ist eine Ordnung und enthält jede Ordnung von $K$.
(Man sagt $\mathbf{Z}_K$ ist die Maximalordnung von $K$.)
2. Jedes von (0) verschiedene Ideal einer Ordnung in $K$ ist ein Gitter.
3. Ist $I$ ein Gitter in $K$ so ist $\mathcal{O}(I)$ eine Ordnung in $K$.

**Aufgabe 2.** Im Folgenden sei $R$ eine Ordnung in $K$ und $p$ eine Primzahl. Zeigen Sie:

1. $J_p(R)$ ist ein Ideal von $R$.
2. Es existiert ein $m \geq 0$ so, dass $J_p(R)^m \subseteq pR$. (Es sei $J_p(R)^0 = R$.)
3. $pR \subseteq p\mathcal{O}(J_p(R)) \subseteq J_p(R) \subset R$ . Insbesondere ist $|\mathcal{O}(J_p(R))/R|$ ein Teiler von $p^{n-1}$.

**Aufgabe 3.** (Zassenhaus Round 2)

1. Es ist $S := \{a \in \mathbf{Z}_K \mid p^k a \in R \text{ für ein } k \geq 0\}$ eine Ordnung von $K$.
2. Ist $R = \mathcal{O}(J_p(R))$ so gilt $R = S$.
3. p teilt $|\mathbf{Z}_K/R|$ genau dann wenn $R \subset \mathcal{O}(J_p(R))$.

(Hinweis zu (b): Wäre $R \subset S$, so existiert ein $k \geq 0$ mit $J_p(R)^k \cdot S \not\subseteq R$ und $J_p(R)^{k+1} \cdot S \subseteq R$. Wähle $x \in J_p(R)^k \cdot S - R$ und zeige $xJ_p(R) \subseteq J_p(R)$.)