# 3. Übung algebraische Zahlentheorie

**Prof. Dr. Nebe** **(SS 2016)**

**Aufgabe 1.** Bestimmen Sie die Einheitengruppen $\mathbf{Z}^*_{\mathbf{Q}(\sqrt{d})}$ für $d = 2, 3, 5$.

**Aufgabe 2.** Sei $K = \mathbf{Q}(\zeta_5)$ und $^-$ bezeichne den Automorphismus auf $K$ welcher durch $\zeta_5 \mapsto \zeta_5^{-1}$ definiert wird. Zeigen Sie:

1. $\varphi \colon \mathbf{Z}_K^* \to \mu(\mathbf{Z}_K^*),\ u \mapsto u/\bar{u}$ ist ein wohldefinierter Gruppenmorphismus.
2. $-1$ liegt nicht im Bild von $\varphi$. Insbesondere existiert zu jedem $u \in \mathbf{Z}_K^*$ ein $k \in \mathbf{Z}$ so, dass $\zeta_5^k u \in \mathrm{Fix}_K(\langle ^- \rangle)$.
3. Es ist $\mathbf{Z}_K^* = \left\langle -\zeta_5,\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right\rangle$.

Hinweis: In der Vorlesung Algebra wurde $\mathbf{Z}_K = \mathbf{Z}[\zeta_5]$ gezeigt.

Ad (b): Ist $u \in \mathbf{Z}_K^*$ mit $u = -\bar{u}$ so liegt $u$ im $\mathbf{Z}$-Gitter $\left\langle \zeta_5 - \zeta_5^{-1},\ \zeta_5^2 - \zeta_5^{-2} \right\rangle_{\mathbf{Z}}$ und wird daher von $\zeta_5 - \zeta_5^{-1}$ in $\mathbf{Z}_K$ geteilt.

Ad (c): Es ist $\mathrm{Fix}_K(\langle ^- \rangle) = \mathbf{Q}(\zeta_5 + \zeta_5^{-1}) \cong \mathbf{Q}(\sqrt{5})$.

**Aufgabe 3.** Es sei $K$ ein Zahlkörper mit genau $r$ reellen und $2s$ echt komplexen Einbettungen. Die Menge der Einbettungen heisse $G$. Zeigen Sie:

1. Für $t \in \mathbf{R}_{>0}$ ist $X_t := \{(z_\tau)_{\tau \in G} \in K_{\mathbf{R}} : \sum_{\tau \in G} |z_\tau| < t\} \subset K_{\mathbf{R}}$ eine zentralsymmetrische konvexe Menge mit Volumen $2^r \pi^s t^n / n!$.
2. In jeder Idealklasse von $K$ gibt es ein ganzes Ideal $\mathcal{A}$ mit $N_{K/\mathbf{Q}}(\mathcal{A}) \leq \frac{n!}{n^n} \left(\frac{4}{\pi}\right)^s \sqrt{|d_K|}$.
3. Ist $K \neq \mathbf{Q}$ so ist $|d_K| > 1$.

**Aufgabe 4.** Bestimmen Sie den Isomorphietyp von $\mathrm{Cl}(\mathbf{Q}(\sqrt{-17}))$ sowie Vertreter aller Idealklassen.