5. Übung algebraische Zahlentheorie

Prof. Dr. Nebe **(SS 2016)**

Aufgabe 1. Sei $n \in \mathbf{Z}_{>1}$ und ζ_n eine primitive n-te Einheitswurzel. Zeigen Sie:

1. Sei $n = p^r$ für eine Primzahl p. Für je zwei zu p teilerfremde Zahlen $i, j \in \mathbf{Z}$ ist dann $(1-\zeta_n^i)/(1-\zeta_n^j) \in \mathbf{Z}[\zeta_n]^*$.

2. Sei n keine Primzahlpotenz. Dann ist $(1-\zeta_n) \in \mathbf{Z}[\zeta_n]^*$. Genauer gilt $\prod_{i \in (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^*}(1-\zeta_n^i) = 1$.

Hinweis zu (b). Seien $T = \{d \in \mathbf{Z}_{>1} : d \mid n\}$ und $P = \{t \in T \mid t \text{ ist Primzahlpotenz}\}$. Dann ist $n = \sum_{i=0}^{n-1} 1^i = \prod_{i \in P} \Phi_i(1) \cdot \prod_{i \in T-P} \Phi_i(1)$. Folgere $\Phi_i(1) \in \mathbf{Z}^*$ für alle $i \in T - P$.

Aufgabe 2. Es seien $K \subseteq L \subseteq M$ algebraische Zahlkörper und $\mathfrak{p} \trianglelefteq \mathbf{Z}_M$ ein Primideal. Weiter sei $\mathfrak{P} = \mathfrak{p} \cap \mathbf{Z}_L$. Zeigen Sie:

1. $e_{M/K}(\mathfrak{p}) = e_{M/L}(\mathfrak{p}) \cdot e_{L/K}(\mathfrak{P})$

2. $f_{M/K}(\mathfrak{p}) = f_{M/L}(\mathfrak{p}) \cdot f_{L/K}(\mathfrak{P})$

Aufgabe 3. Sei $K = \mathbf{Q}(\zeta_5, \sqrt{2})$. Weiter sei $p \in \{2, 3, 5, 11\}$ und $\mathfrak{p} \trianglelefteq \mathbf{Z}_K$ ein Primideal das p enthält. Bestimmen Sie die Zerlegungs- und Trägheitsgrade sowie die Zerlegungs- und Trägheitsgruppen von $\mathfrak{p}$.

Aufgabe 4. Es seien $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ gebrochene Ideale in einem algebraischen Zahlkörper K. Zeigen Sie:

1. Es existieren $x, y \in K^*$ so, dass $x\mathfrak{a}$ und $y\mathfrak{b}$ ganze teilerfremde Ideale von $\mathbf{Z}_K$ sind.

2. Es ist $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b} \cong \mathfrak{a}\mathfrak{b} \oplus \mathbf{Z}_K$ als $\mathbf{Z}_K$-Moduln.

3. $\mathfrak{a}$ ist ein projektiver $\mathbf{Z}_K$-Modul.