(5.9) Bem: $C = C^{\perp}$ isotroper selbstdualer Code vom Typ ρ

$\Rightarrow$ $cwe(C) \in \mathbb{C}[x_v \mid v \in V]$ ist invariant unter

$\mathcal{C}(\rho)$, $cwe(C) \in \mathrm{Inv}(\mathcal{C}(\rho))$.

Höhere Gewichtszähler ~~und höhere Clifford-Weil Gruppen~~

(5.10) Def: Sei $C \leq V^N$ Code

$$cwe_m(C) := \sum_{(c^{(1)}, \dots, c^{(m)}) \in C^m} \prod_{v \in V^m} x_v^{a_v(c^{(1)}, \dots, c^{(m)})} \in \mathbb{C}[x_v \mid v \in V^m]$$

$$\begin{matrix} c^{(1)} = & c^{(1)}_1 & \dots & c^{(1)}_N \\ & \vdots & & \vdots \\ c^{(m)} = & c^{(m)}_1 & \dots & c^{(m)}_N \end{matrix} \qquad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \in V^m$$

$$\Rightarrow a_v(c^{(1)}, \dots, c^{(m)}) := |\{ i \in \{1, \dots, N\} \mid v = \begin{pmatrix} c^{(1)}_i \\ \vdots \\ c^{(m)}_i \end{pmatrix} \}|$$

heißt der Geschlecht-m-Gewichtszähler von C.

(*)

(5.11) Bem: Sei $C \leq V^N$ Code, $C(m) := C \otimes R^m \leq V^N \otimes R^m = V^{N \cdot m}$

$$C(m) \leq (V^m)^N$$

$$\Rightarrow \quad cwe(C(m)) = cwe_m(C).$$

Ist C ein Code vom Typ ρ, so ist $C(m)$ ein Code vom Typ $\rho^{m \times m}$ [s.u.]

~~Matrixringe von Form Ringen und höhere Clifford Weil Gruppen~~

Beisp: $C = i_2 = \langle (1,1) \rangle \leq \mathbb{F}_2^2$
$= \{(0,0), (1,1)\}$

$$cwe_2(i_2) = x_{00}^2 + x_{01}^2 + x_{10}^2 + x_{11}^2$$

$$\begin{matrix} 00 & 00 & 11 & 11 \\ 00 & 11 & 00 & 11 \end{matrix}$$

$$e_8 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad cwe_2(e_8) = x_{00}^8 + x_{11}^8 + x_{01}^8 + x_{10}^8 + 14 (x_{00}^4 x_{10}^4 + x_{00}^4 x_{01}^4$$

$$+ x_{00}^4 x_{11}^4 + x_{01}^4 x_{10}^4 + x_{01}^4 x_{11}^4 + x_{10}^4 x_{11}^4) + 168\, x^2 x^2 x^2 x^2$$

(11)

Datum: Betr.:
Bearbeiter:
Blatt: Projekt Nr.: Auftr.Nr.: GRUPPE BDA

Matrixringe von Form Ringen, deren Darst. und höhere Clifford-Weil Gruppen

(5.17) Def: Sei (R, M, ψ, Φ) ein Form Ring

(R Ring, $\psi : R_R \xrightarrow{\sim} M_R$, Φ R-qModule

$$\begin{tikzcd} M \arrow[loop left, "\tau"] \arrow[rr, bend left, "\{\{\,\}\}"] & & \Phi \arrow[loop right, "{[-1]}"] \arrow[ll, bend left, "\lambda"] \end{tikzcd}$$
)

Def. $\mathrm{Mat}_n(R, M, \psi, \Phi) := (R^{n\times n}, M^{n\times n}, \psi^{n\times n}, \Phi^{(n)})$

wo $\Phi^{(n)} := \left\{ \begin{pmatrix} \phi_1 & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & & m_{n-1,n} \\ & & & \phi_n \end{pmatrix} \;\middle|\; \phi_1, \dots, \phi_n \in \Phi,\; m_{ij} \in M \right\}$

$$\lambda^{(n)} : \Phi^{(n)} \to M^{n\times n}$$

$$\lambda^{(n)}(\phi) := \begin{pmatrix} \lambda(\phi_1) & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ \tau(m_{12}) & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & m_{n-1,n} \\ \tau(m_{1n}) & \cdots & \tau(m_{n-1,n}) & \lambda(\phi_n) \end{pmatrix}$$

$$\{\{\,\}\}^{(n)} : M^{n\times n} \to \Phi^{(n)}$$

$$\begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1n} \\ \vdots & & \\ m_{n1} & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \{\{m_{11}\}\} & m_{12}+\tau(m_{21}) & \cdots & m_{1n}+\tau(m_{n1}) \\ & \ddots & & \vdots \\ & & & m_{n-1,n}+\tau(m_{n,n-1}) \\ & & & \{\{m_{nn}\}\} \end{pmatrix}$$

$$\tau^{(n)} : \begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1n} \\ \vdots & & \\ m_{n1} & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \tau(m_{11}) & \tau(m_{21}) & \cdots & \tau(m_{n1}) \\ \tau(m_{12}) & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ \tau(m_{1n}) & \cdots & \tau(m_{n-1,n}) & \tau(m_{nn}) \end{pmatrix}$$

Ebenso $J^{(n)}$: komponentenweise J + transp.

$M^{n\times n}$ ist $R^{n\times n}$-Modul durch übliche Matrixmult.

$\Phi^{(n)}$ ist $R^{n\times n}$-q-Modul durch Imitation von formalem Matrixprod.

1228-96

$$\left(A^{J}\right)^{(n)} \cdot \phi \cdot A \qquad \left(A \in R^{n\times n},\ \phi \in \Phi^{(n)}\right)$$

wie im Bsp. $n=2$:

$$\begin{pmatrix} \phi_1 & m \\ & \phi_2 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right] := \begin{pmatrix} \phi_1' & m' \\ & \phi_2' \end{pmatrix}$$

wo
$$\phi_1' = \phi_1[a] + \phi_2[c] + \{\{m(a\otimes c)\}\}$$
$$\phi_2' = \phi_1[b] + \phi_2[d] + \{\{m(b\otimes d)\}\}$$
$$m' = \lambda(\phi_1)(a\otimes b) + m(a\otimes d) + \lambda(\phi_2)(c\otimes d) + \tau(m)(c\otimes b)$$

$$\begin{pmatrix} a^J & c^J \\ b^J & d^J \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \phi_1 & m \\ \tau(m) & \phi_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^J & c^J \\ b^J & d^J \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \phi_1 \cdot a + m\cdot c & \phi_1\cdot b + m\cdot d \\ \phi_2\cdot c + \tau(m)a & \phi_2\cdot d + \tau(m)b \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^J\phi_1 a + a^J mc + c^J\tau(m)a + c^J\phi_2 c & a^J\phi_1 b + a^J md + c^J\phi_2 d + c^J\tau(m)b \\ b^J\phi_1 a + b^J mc + d^J\phi_2 c + d^J\tau(m)a & b^J\phi_1 b + b^J md + d^J\phi_2 d + d^J\tau(m)b \end{pmatrix}$$

<u>Bsp. 13) Bem+Def:</u> Ist $\varsigma = (V, \varsigma_M, \varsigma_\Phi, \beta)$ eine Darst. des Form Rings (R, M, Ψ, Φ), so ist $\varsigma^{n\times n}$ " " " $(R^{n\times n}, M^{n\times n}, \Psi^{n\times n}, \Phi^{(n)})$ wo

$$\varsigma^{n\times n} = (V^n, \varsigma_{M^{n\times n}}, \varsigma_{\Phi^{(n)}}, \beta^{(n)}) \text{ und}$$

$$\varsigma_{M^{n\times n}}\left(\left(m_{ij}\right)\right)(x,y) := \sum_{i,j=1}^{n} m_{ij}(x_i, y_j)$$

$$\forall x = (x_1,\dots,x_n), y = (y_1,\dots,y_n) \in V^n$$

$$\varsigma_{\Phi^{(n)}}\left(\begin{pmatrix} \phi_1 & & m_{ij} \\ & \ddots & \\ & & \phi_n \end{pmatrix}\right)(x) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i(x_i) + \sum_{i<j} m_{ij}(x_i, x_j)$$

$$\beta^{(n)}(x,y) := \sum_{i=1}^{n} \beta(x_i, y_i)$$

Bem.: Alle Darst. von $(R^{n\times n}, M^{n\times n}, \ )$ sind von dieser Form

(12)

Datum: Betr.:

Bearbeiter:

Blatt: Projekt Nr.: Auftr.Nr.: GRUPPE BD

(5.14) Def: Sei ρ eine endl. Darst. eines Form Rings, $m \in \mathbb{N}$

$\mathcal{C}_m(\rho) := \mathcal{C}(\rho^{m\times m})$ heißt die zugeh. Geschlecht-m-Clifford-Weil-Gruppe

(5.15) Satz: $C \leq V^N$ vom Typ $\rho \Rightarrow$

$cwe_m(C) \in \mathrm{Inv}(\mathcal{C}_m(\rho)) \quad \forall m \in \mathbb{N}$.

6) Hyperbolische Counitäre Gruppen und die Endlichkeit der Clifford-Weil Gruppen.

Generalvor. $R = (R, M, \psi, \Phi)$ Form Ring ($\rho = (V, \rho_M, \rho_\Phi, \beta)$ endl. Darst. von R, OE $R \cong \rho(R)$)

(6.1) Def:

$P(R,\Phi) := R^* \ltimes \Phi = \{(r,\phi) \mid r \in R^*, \phi \in \Phi\}$

mit Mult. $(r_1,\phi_1)(r_2,\phi_2) := (r_1 \cdot r_2, \phi_1[r_2] + \phi_2)$

heißt die parabolische Gruppe von R.

(6.2) Bem: $\mathbb{C}[V] := \langle b_v \mid v \in V \rangle_{\mathbb{C}}$ sei der $\mathbb{C}$-VR mit Basis b_v, $v \in V$ ($\mathbb{C}[V] \cong \mathbb{C}^{|V|}$)

Die Abb. $P(\rho): P(R,\Phi) \to GL(\mathbb{C}[V])$ def. durch

$P(\rho)(r,\phi) \mapsto h_i : b_v \mapsto \exp(2\pi i\, \rho_\Phi(\phi)(v))\, b_{rv}$

$\forall v \in V, r \in R^*, \phi \in \Phi$

def. einen Gruppenhom. (sogenannte Darstellung von $P(R,\Phi)$)

Bew: $\big(P(\rho)(r_1,\phi_1) \circ P(\rho)(r_2,\phi_2)\big)(b_v) =$

$P(\rho)(r_1,\phi_1)\big(\exp(2\pi i\, \rho_\Phi(\phi_2)(v)) \cdot b_{r_2 v}\big)$

$= \exp(2\pi i\, \rho_\Phi(\phi_2)(v)) \cdot \exp(2\pi i\, \rho_\Phi(\phi_1)(r_2 v)) \cdot b_{r_1 r_2 v}$

$= \exp(2\pi i\, \rho_\Phi(\phi_2 + \phi_1[r_2])(v))\, b_{r_1 r_2 v}$ ∘)

1228-96

(6.3) **Def:** ~~so~~ Die hyperbolische counitäre Gruppe von R ist $\mathcal{U}(R,\Phi) \le \mathcal{P}(\mathrm{Mat}_2(R), \Phi^{(2)})$ def. als

$$\mathcal{U}(R,\Phi) = \left\{ \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \phi_1 & m \\ & \phi_2 \end{pmatrix} \right) \in \mathcal{P}(R^{2\times 2}, \Phi^{(2)}) \;\middle|\; \right.$$

$$\left. \begin{pmatrix} a^J & c^J \\ b^J & d^J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \psi_2^{-1}\left(\lambda_2 \begin{pmatrix} \phi_1 & m \\ & \phi_2 \end{pmatrix} \right) \right\}$$

$$= \left\{ \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \phi_1 & m \\ & \phi_2 \end{pmatrix} \right) \in \mathcal{P}(R^{2\times 2}, \Phi^{(2)}) \;\middle|\; \right.$$

$$\left. \boxed{\begin{pmatrix} c^J a & c^J b \\ d^J a - 1 & d^J b \end{pmatrix} = \psi_2^{-1} \begin{pmatrix} \lambda(\phi_1) & m \\ \tau(m) & \lambda(\phi_2) \end{pmatrix}} \right\}$$

Allgm. def. man für $f \in R$: $\mathcal{U}(f(R,\Phi)) := \{(u,\phi) \in \mathcal{P}(R,\Phi) \mid u^J f u - f = \psi^{-1}(\lambda(\phi))\}$

Bem (6.4): Die Abb. $\pi : \mathcal{U}(R,\Phi) \to GL_2(R)$

$\mathcal{U}(R,\Phi) = \mathcal{U}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathrm{Mat}_2(R,\Phi)\right)$

$$\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \phi_1 & m \\ & \phi_2 \end{pmatrix} \right) \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

definiert einen Gruppenhom. mit $\ker(\pi) =$

$$\left\{ \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \phi_1 & m \\ & \phi_2 \end{pmatrix} \right) \;\middle|\; \lambda(\phi_1) = \lambda(\phi_2) = m = 0 \right\}$$

$$\cong \left\{ \begin{pmatrix} \phi_1 & 0 \\ & \phi_2 \end{pmatrix} \;\middle|\; \phi_1, \phi_2 \in \ker(\lambda) \right\} \cong \ker(\lambda) \times \ker(\lambda)$$

$$\mathrm{Bild}(\pi) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(R) \;\middle|\; \begin{pmatrix} a^J & c^J \\ b^J & d^J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \psi_2^{-1}(\lambda_2(\Phi^{(2)})) \right\}$$

Beisp: $R = \mathbb{F}_p^{m\times m}$, p ungerade, $M = \mathbb{F}_p^{m\times m}$, $\tau = \cancel{tr} = J = tr$, $\psi = id$

$\Phi = \{\{M\}\}$ wo $\{\{m\}\} := m + m^{tr}$

$= \{ A \in \mathbb{F}_p^{m\times m} \mid A = A^{tr} \}$, $\lambda : \Phi \to M$, $\lambda(A) = A$

$$X = \begin{pmatrix} A^{tr} & C^{tr} \\ B^{tr} & D^{tr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I_m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I_m & 0 \end{pmatrix} \cancel{= \psi_2}$$

$$\in \left(\mathbb{F}_p^{2m \times 2m}\right)_{sym} = \psi_2^{-1}(\chi_2(\phi^{(2)})) \quad \text{d.h.} \quad X = X^{tr}$$

$$\Longleftrightarrow X - X^{tr} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} A^{tr} & C^{tr} \\ B^{tr} & D^{tr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -I_m \\ I_m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -I_m \\ I_m & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp_{2m}(\mathbb{F}_p)$$

also hier $U(R, \Phi) \cong Sp_{2m}(\mathbb{F}_p)$

<u>(6.5) Def</u>: $U_m(R, \Phi) := U(R^{m \times m}, \Phi^{(m)})$

<u>Klar</u>: ~~U_m~~ R endl. Form Ring $\Rightarrow U_m(R, \Phi)$ ist endliche Gruppe.

<u>Ziel</u> $\rho: U_m(R, \Phi) \twoheadrightarrow C_m(\rho) \leq GL(\mathbb{C}[V^m])$

ist Gruppenepim. modulo Skalarmatrizen

d.h. $S := C_m(\rho) \cap \left\{ \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{C}^* \right\}$

$\Rightarrow \rho: U_m(R, \Phi) \twoheadrightarrow C_m(\rho)/S$ Gruppen(iso)morph.

<u>Erzeuger von $U(R, \Phi)$</u>:

<u>(6.6) Satz</u> Die Abb. $d: P(R, \Phi) \longrightarrow U(R, \Phi)$

def. durch $d(r, \phi) := \left(\begin{pmatrix} r^{-J} & r^{-J} \psi^{-1}(\lambda(\phi)) \\ 0 & r \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \phi \end{pmatrix} \right)$

ist ein Gruppenmonomorphismus.

<u>Bew</u>: $d(\vartheta r, \phi) \in \mathcal{U}(R, \Phi)$:

$$\psi_2\left(\begin{pmatrix} c^{\vartheta} a & c^{\vartheta} b \\ d^{\vartheta} a - 1 & d^{\vartheta} b \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \lambda(\phi_1) & m \\ \tau(m) & \lambda(\phi_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda(\phi) \end{pmatrix}$$

$$\|$$

$$\psi_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \underbrace{\cancel{r}^{\vartheta}\cancel{r}^{-\vartheta} - 1}_{=0} & \cancel{r}^{\vartheta}\cancel{r}^{-\vartheta}\psi^{-1}(\lambda(\phi)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda(\phi) \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

injektiv ✓

$$(u_1, \phi_1)(u_2, \phi_2) = (u_1 \cdot u_2,\ \phi_1[u_2] + \phi_2)$$

$$\left(\begin{pmatrix} u_1^{-\vartheta} & u_1^{-\vartheta}\psi^{-1}(\lambda(\phi_1)) \\ 0 & u_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ & \phi_1 \end{pmatrix}\right) \cdot \left(\begin{pmatrix} u_2^{-\vartheta} & u_2^{-\vartheta}\psi^{-1}(\lambda(\phi_2)) \\ 0 & u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ & \lambda(\phi_2) \end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} u_1^{-\vartheta} \cdot u_2^{-\vartheta} & \underbrace{u_1^{-\vartheta} u_2^{-\vartheta}\psi^{-1}(\lambda(\phi_2)) + u_1^{-\vartheta}\psi^{-1}(\lambda(\phi_1))u_2}_{=:\circledast} \\ 0 & u_1 \cdot u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \phi_1[u_2] + \phi_2 \end{pmatrix}$$

<u>z.zg</u>: $\circledast = (u_1 u_2)^{-\vartheta}\psi^{-1}(\lambda(\phi_1[u_2]) + \lambda(\phi_2))$

$$\circledast = u_1^{-\vartheta} u_2^{-\vartheta}\left[\psi^{-1}(\lambda(\phi_2)) + \underbrace{u_2^{\vartheta}\psi^{-1}(\lambda(\phi_1)) \cdot u_2}_{= \psi^{-1}(\lambda(\phi_1[u_2]))}\right]$$