2. Übung Codes und Invariantentheorie

Prof. Dr. G. Nebe **(WS 2022/23)**

Aufgabe 3. (Schatten) Sei $\rho := (V, \rho_M, \rho_\Phi, \beta)$ eine Darstellung eines Form Rings (R, M, ψ, Φ) und sei $C \leq V^N$ ein selbstorthogonaler Code in $N\rho$. Zeigen Sie

(a) Für $\phi \in \Phi$ ist $\rho_\Phi(\phi) : C \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ ein Homomorphismus abelscher Gruppen.

(b) $C_0 := \{c \in C \mid \rho_\Phi(\phi)(c) = 0 \text{ für alle } \phi \in \Phi\}$ ist ein isotroper Code in $N\rho$.

(c) Für $\phi \in \Phi$ sei

$$S_\phi(C) := \{v \in V^N \mid \beta^N(v, c) = \rho_\Phi^N(\phi)(c) \text{ für alle } c \in C\}$$

der *ϕ-Schatten* von C. Zeigen Sie, dass $S_\phi(C)$ eine Restklasse nach dem dualen Code $C^\perp$ ist, die nur von der Restklasse $\phi + \{\!\{M\}\!\} \in \Phi/\{\!\{M\}\!\}$ abhängt.

(d) Sei $\rho := \rho(2_{II})$ die Darstellung des Form Rings $(\mathbf{F}_2, \mathbf{F}_2, \mathrm{id}, \mathbf{Z}/4\mathbf{Z})$. Sei C ein selbstorthogonaler Code in $N\rho$.
Zeigen Sie: $S_0(C) = S_2(C) = C^\perp$,

$$S_1(C) = S_3(C) = \{v \in \mathbf{F}_2^N \mid \sum_{i=1}^N v_i c_i \equiv \frac{1}{2}\mathrm{wt}(c) \pmod 2 \text{ für alle } c \in C\}$$

(e) Bestimmen Sie $S_1(C)$ für $C \leq \mathbf{F}_2^N$ mit den Erzeugermatrizen

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&1&1&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1 \\ 1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0 \end{pmatrix}.$$