# 3. Übung Codes und Invariantentheorie

**Prof. Dr. G. Nebe** **(WS 2022/23)**

**Aufgabe 4.** Sei $V$ eine abelsche Gruppe mit nichtsingulärer Bilinearform $\beta : V \times V \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ und $C \leq V^N$ eine Untergruppe. Sei $H$ der Automorphismus des Polynomrings $\mathbf{C}[x_v \mid v \in V]$ definiert durch

$$x_v \mapsto \sum_{w \in V} \exp(2\pi i \beta(v,w)) x_w$$

Zeigen Sie $\mathrm{cwe}(C^\perp) = \frac{1}{|C|} H(\mathrm{cwe}(C))$.

**Aufgabe 5.** (vollständiger Gewichtszähler des Schattens) Bezeichnungen und Voraussetzungen wie in Aufgabe 3.
Sei $H_\phi$ der Automorphismus des Polynomrings $\mathbf{C}[x_v \mid v \in V]$ definiert durch

$$x_v \mapsto \sum_{w \in V} \exp(2\pi i (\beta(v,w) - \rho_\Phi(\phi)(v))) x_w$$

Zeigen Sie $\mathrm{cwe}(S_\phi(C)) = \frac{1}{|C|} H_\phi(\mathrm{cwe}(C))$. (Hinweis: Rechnen Sie erst mit dem vollen Gewichtszähler.)
Bestimmen Sie die Gewichtszähler der Codes und ihrer Schatten aus Aufgabe 3 (e). (Hinweis: Der zweite Code hat Minimalgewicht 4.)

**Aufgabe 6.** Sei $C = C^\perp \leq \mathbf{F}_2^{16}$ mit Minimalgewicht 6.
Bestimmen Sie $\mathrm{cwe}(C)$.
Bestimmen Sie $\mathrm{cwe}(S_1(C))$.
Folgern Sie die Nichtexistenz eines solchen Codes $C$.