1. Übung Elementare Algorithmen in der Algebra

Priv. Doz. Dr. G. Nebe **(SS 00)**

Aufgabe 1. Seien R_1, R_2 Ringe und $f : R_1 \to R_2$ ein Ringhomomorphismus. Ist $I \trianglelefteq R_2$ ein zweiseitiges Ideal in R_2, so ist das Urbild

$$f^{-1}(I) := \{a \in R_1 \mid f(a) \in I\}$$

ein Ideal von R_1. Insbesondere ist $Ker(f) \trianglelefteq R_1$. Das Bild eines Ideals von R_1 ist jedoch nicht notwendig ein Ideal in R_2.

Aufgabe 2. Schreiben Sie ein Programm (vorzugsweise in MAPLE), welches den größten gemeinsamen Teiler zweier ganzer Zahlen berechnet.

Aufgabe 3. Sei $w := \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \in \mathbb{C}$ und $R := \mathbb{Z}[w] := \{a + bw \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. Bestimmen Sie die Einheitengruppe von R. Zeigen Sie, dass der komplexe Absolutbetrag R zu einem Euklidischen Ring macht und bestimmen Sie den ggT von 19 und $7 + 3\sqrt{-3}$ in R.

Aufgabe 4. Schreiben Sie ein Programm, welches für gegebene paarweise teilerfremde ganze Zahlen $m_1, \ldots, m_n$ und Reste $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ eine Zahl $a \in \mathbb{Z}$ bestimmt, mit $a \equiv a_i \pmod{m_i}$ für alle $1 \leq i \leq n$.

Bestimmen Sie eine Zahl $a \in \mathbb{Z}$ mit $a \equiv i \pmod{p(i)}$ für $i = 1, \ldots, 20$, wo $p(i)$ die i-te Primzahl bezeichnet ($p(1) = 2, \ldots, p(20) = 71$).

Aufgabe 5. Ändern Sie das Programm aus Aufgabe 4 so ab, dass es mit dem Polynomring $\mathbb{Q}[x]$ anstelle von $\mathbb{Z}$ arbeitet.
(Hinweis: MAPLE-Befehle quo und rem.)

Bestimmen Sie ein Polynom $f \in \mathbb{Q}[x]$, dass die Funktion $p(i)$ aus Aufgabe 4 für $i = 1, \ldots, 20$ interpoliert, d.h. $f(i) = p(i)$ für $i = 1, \ldots, 20$.

Abgabe: Donnerstag, den 20.4.00, in der Übung 12:30 Uhr im kl. physik. Hörsaal
Programme können per e-mail an gabi@momo.math.rwth-aachen.de geschickt werden.