10. Übung Elementare Algorithmen in der Algebra

Priv. Doz. Dr. G. Nebe **(SS 00)**

Aufgabe 38. Ist $G = \{g_1, \ldots, g_s\}$ eine Gröbnerbasis für I, so bilden die Restklassen der Monome, die nicht durch eines der $lm(g_i)$ teilbar sind, eine K-Basis von $K[x_1, \ldots, x_n]/I$.

Aufgabe 39. Zeigen Sie, dass $G = \{g_1 := z + x, g_2 := y - x\}$ eine Gröbnerbasis für lex mit $x < y < z$ ist, aber nicht für lex mit $z < y < x$.

Aufgabe 40. Zeigen Sie, dass $I := (x + y^2, z + x^2 y) \trianglelefteq \mathbb{Q}[x, y, z]$ ein Primideal (d.h. der Restklassenring ist nullteilerfrei) ist.
(Hinweis: Die beiden Erzeuger von I sind eine Gröbnerbasis für lex mit $z > x > y$.)

Aufgabe 41. Sei $F = \{f_1, \ldots, f_s\} \subset K[x_1, \ldots, x_n]$ und $<$ irgendeine Monomordnung.
(a) Besteht F nur aus Monomen, so ist F eine Gröbnerbasis für (F).
(b) Sind alle f_i Differenzen von 2 Monomen, so hat (F) eine Gröbnerbasis, deren Elemente Differenzen von 2 Monomen sind.

Aufgabe 42. Sei $<$ eine feste Monomordnung und definiere den Multigrad von $0 \neq f \in K[x_1, \ldots, x_n]$ als $deg(f) := \alpha$, falls $lm(f) = \mathbf{x}^\alpha$.
(a) Ist $G = \{g_1, \ldots, g_s\}$ eine Gröbnerbasis für I und $\alpha_i := deg(g_i)$, so ist

$$deg(I \setminus \{0\}) = \bigcup_{i=1}^{s} (\alpha_i + (\mathbb{N}_0)^n).$$

(b) Zeichnen Sie $deg(I \setminus \{0\})$ für $I = (x^2 y - y + x, xy^2 - x)$ bezüglich deglex mit $x < y$ und bezüglich lex mit $x < y$.

Abgabe: Donnerstag, den 13.7.00, in der Übung 12:30 Uhr im kl. physik. Hörsaal