Stark modulare Gitter mit langem Schatten

von

Kristina Schindelar

Diplomarbeit in Mathematik

vorgelegt der

Fakultät für Mathematik, Informatik und Naturwissenschaften
der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen

im
August 2006

angefertigt im
Lehrstuhl D für Mathematik

bei
Prof. Dr. G. Nebe

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Ein Gitter ist eine diskrete Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, wobei die Punkte gleichmäßig angeordnet sind. Genauer gesagt erhält man ein Gitter durch alle ganzzahligen Linearkombinationen einer Basis des $\mathbb{R}^n$. Ein Gitter wird immer bezüglich einer symmetrischen Bilinearform definiert, welche die Abstände und Längen der Gittervektoren bestimmt.

Will man um jeden Gitterpunkt jeweils eine Kugel derart legen, dass sich die Kugeln höchstens berühren, nicht aber schneiden, so kann man sich leicht vorstellen, dass je nach Anordnung der Gitterpunkte die Dichte der Kugelpackung variieren kann.
Von großem Interesse sind sehr dichte Gitter. Dabei bestimmt sich die Dichte aus dem Minimum und der Determinante des Gitters. Das Minimum eines Gitters ist die minimale Quadratlänge eines Gittervektors ungleich 0, beziehungsweise das Quadrat des minimalen Abstands verschiedener Gittervektoren. Je höher die Dichte eines Gitters, desto dichter die Kugelpackung. Dichte Gitter sind in der Informationübertragung von großem Interesse, denn sie liefern gute fehlerkorrigierende Codes.

Ein wichtiges Konzept, um Gitter besser untersuchen zu können, sind Modulformen. Zu jedem Gitter gibt es eine Reihe, die sogenannte Theta-Reihe, deren q-Entwicklung die Anzahl von Vektoren einer bestimmten Quadratlänge beschreibt. Diese Theta-Reihen sind Modulformen. Ist ein Gitter beispielsweise gerade und unimodular, so ist seine Theta-Reihe eine Modulform zur vollen Modulgruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ von Gewicht $\frac{n}{2}$, wenn n die Dimension des Gitters bezeichnet. Modulformen sind holomorphe Funktionen auf der oberen Halbebene, die unter einer Gruppe von Möbiustransformationen invariant bleiben. Das Besondere an Modulformen ist, dass diese einen durch das Gewicht graduierten Ring bilden, der als $\mathbb{C}$-Algebra endlich erzeugt ist. Die Modulformen von gegebenem Gewicht bilden somit einen endlich-dimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraum.

In dieser Arbeit werden stark N-modulare Gitter, die rational äquivalent zu den Gittern C_N^k sind, betrachtet. Das sind solche, die isometrisch zu allen reskalierten partiellen dualen Gittern sind (siehe Definition 2.3.8).
Der Begriff modular beziehungsweise stark N-modular wurde erstmals von Quebbemann in [Que95] und [Que97] eingeführt. Für $N \in \mathcal{N} = \{1,2,3,5,6,7,11,14,15,23\}$ hat Quebbemann mit Hilfe von Modulformen gezeigt, dass das Minimum eines geraden, stark N-modularen Gitters kleiner gleich $2 + 2\lfloor \frac{n\sigma_1(N)}{24\sigma_0(N)} \rfloor$ (siehe [Que97]). Dabei bezeichnet $\sigma_0(N)$ die Anzahl der Teiler von N und $\sigma_1(N)$ die Summe der Teiler von N.
Das allgemeine Prinzip, um solch eine Schranke zu finden, benutzt zwei wesentliche Dinge. Ei-

nerseits kennt man eine Basis $b_1, ..., b_t$ des Raums der Modulformen $\mathcal{M}_{\frac{n}{2}}(\Gamma_{ger}(N))$ vom Gewicht $\frac{n}{2}$ zur geeigneten Modulgruppe $\Gamma_{ger}(N)$, in welchem die Theta-Reihen der n-dimensionalen stark N-modularen Gitter liegen. Andererseits liefert die Bedingung Minimum von L gleich $2m$ genau m lineare Gleichungen, denn θ_L hat die Form $1+0q^2+0q^4+...+0q^{2m-2}+a_{2m}q^{2m}+...$. Da diese Bedingungen unabhängig sind, ist θ_L für $m=t$ eindeutig bestimmt. Das Minimum des Gitters ist also kleiner gleich 2 mal der Dimension von $\mathcal{M}_{\frac{n}{2}}(\Gamma_{ger})$. Gitter, die dieses Minimum erreichen, heißen extremal.

Will man nun aber ungerade modulare Gitter betrachten verliert man eine Invarianzeigenschaft. Die Gruppe $\Gamma_{unger}(N)$, zu der die Theta-Reihen ungerader stark N-modularer Gitter Modulformen sind, wird kleiner und damit die Dimension von $\mathcal{M}_{\frac{n}{2}}(\Gamma_{unger}(N))$ größer, das heißt die Schranke an das Minimum wird schlechter.
Für ungerade Gitter führten Rains und Sloane daher den Begriff des Schattens ein. Der Schatten eines ungeraden Gitters ist eine Restklasse nach dem dualen Gitter, genauer gesagt $\mathrm{Sh}(L) := L^{\#}_{ev} \setminus L^{\#}$, wobei L_{ev} das gerade Teilgitter bezeichnet, in dem alle Vektoren mit geradem Skalarprodukt enthalten sind. Die Theta-Reihe des Schattens eines ungeraden, stark N-modularen Gitters kann aus der Theta-Reihe des Gitters berechnet werden. Es gibt einen Ringhomomorphismus Sh, so dass $\theta_{\mathrm{Sh}(L)} = \mathrm{Sh}(\theta_L)$. Die Bedingung, dass die Theta-Reihe des Schattens nur positive Koeffizienten hat liefern genug Bedingungen, um die gleiche Schranke an das Minimum zu bekommen wie für gerade Gitter (siehe [RS98] beziehungsweise Kapitel 4, Satz 4.2.1).

Rains und Sloane konnten also den Begriff der Extremalität auf ungerade stark N-modulare Gittern erweitern.

Die Basis dieser Arbeit war der Artikel 'Strongly modular lattices with long shadow' von G. Nebe, siehe [Neb04]. In dem Artikel wurden stark N-modulare Gitter von Minimum 2 und zweitlängstem Schatten betrachtet. Nebe konnte eine genaue Schranke angeben, in welchen Dimensionen Gitter mit den genannten Eigenschaften existieren können.
In dieser Arbeit wurde versucht eine solche Schranke für stark N-modulare Gitter mit Minimum 3 und drittlängstem Schatten zu finden (diese Gitter sind s-extremal). Dies ist jedoch nicht gelungen, weil sich die Theta-Reihen der Gitter von ungeradem Minimum anders verhalten, als die Theta-Reihen der Gitter von geradem Minimum (vergleiche [NSa]).
Dies kann man beobachten, wenn man die Theta-Reihen von s-extremalen Gittern berechnet. S-extremale Gitter sind Gitter, für die die Summe vom Schattenminimum und zwei mal dem Gitterminimum maximal wird. Der Begriff s-extremal wurde von P. Gaborit in [Gab] für unimodulare Gitter eingeführt und in [NSa] verallgemeinert. Die Theta-Reihen solcher Gitter sind eindeutig bestimmt. Berechnet man nun diese Theta-Reihen, so erhält man für Gitter mit geradem Minimum, negative Koeffizienten in der q-Entwicklung, wenn die Dimension groß wird. Bei Gittern mit ungeradem Minimum erhält man seltener einen solchen Widerspruch zu der Existenz der Gitter, jedenfalls beim Betrachten der ersten 100 Koeffizienten in der q-Entwicklung.

Weiter wurde in dieser Arbeit versucht in möglichst vielen Dimensionen die stark N-modularen Gitter mit Minimum 3 und drittlängstem Schatten zu klassifizieren. Dazu wurde die Knesersche Nachbarschaftsmethode (siehe [Kne57]) genutzt. Die stark N-modularen Gitter, die rational äquivalent zu C_N^k sind, liegen im Geschlecht von C_N^k. Das heißt die Komplettierung der Gitter ist für alle Primzahlen und für unendlich gleich der Komplettierung von C_N^k.
Mit der Kneserschen Nachbarschaftsmethode kann man das ganze Spinorgeschlecht eines Gitters berechnen und da für C_N^k das Spinorgeschlecht gleich dem Geschlecht ist, genügt es die Knesersche Nachabrschaftsmethode auf die Gitter C_N^k anzuwenden. Hat man das Geschlecht bestimmt, so muss man nur noch überprüfen, ob Gitter mit den gewünschten Eigenschaften darin liegen.
In hohen Dimensionen wird die Laufzeit zu groß, um das Verfahren so anzuwenden. Man kann jedoch einen geraden Nachbarn von C_N^k berechnen, dessen Geschlecht bestimmen und die ungeraden Gitter mit den Kanten im Nachbarschatsgraphen der geraden Gitter identifizieren (siehe Borchards [CS99, Chapter17]). Aber auch diese Methode versagt in hohen Dimensionen.
In Fällen, in denen Geschlechter schon bestimmt sind und man die Gitter kennt, zu denen das gesuchte Gitter benachbart sein muss, kann man aus dem Nachbar das gesuchte Gitter konstruieren (siehe Kapitel Neue Ergebnisse).

2 Gitter und Modulformen

2.1 Symmetrische Bilinearformen

Seien A ein kommutativer Ring mit 1 und E ein A-Modul.

Definition 2.1.1

(a) Eine Abbildung $b : E \times E \to A$ heißt **symmetrische Bilinearform**, falls für alle $x, y \in E$ und $a \in A$ gilt, dass

(i) $b(ax+y, z) = ab(x,z) + b(y,z)$

(ii) $b(x,y) = b(y,x)$.

Dann heißt (E,b) bilinearer A-Modul.

(b) Die bilinearen Moduln (E,b), (E',b') heißen **isometrisch**, wenn ein A-Modul-Isomorphismus $\varphi : E \to E'$ existiert mit $b'(\varphi(x), \varphi(y)) = b(x,y)$ für alle $x,y \in E$. Im Zeichen: $(E,b) \cong (E',b')$. Dann heißt φ eine **Isometrie**.

Definition 2.1.2 Sei (E,b) ein bilinearer A-Modul.

(a) Seien $x,y \in E$. Es heißt x **orthogonal** zu y (bzgl. b), wenn $b(x,y) = 0$.
Ist $F \subseteq E$, so heißt $F^{\perp} := \{x \in E \mid b(x,y) = 0 \; \forall y \in F\}$ der **orthogonale** Untermodul der Teilmenge F.
(Offensichtlich ist $F^{\perp}$ ein A-Untermodul von E.)

(b) E heißt **orthogonale Summe** der Teilmodulen $E_1, \cdots, E_n$, $E = E_1 \perp E_2 \perp \cdots \perp E_n$, falls $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$ und $E_i \perp E_j$ für alle $i \neq j$, d.h. $b(x_i, x_j) = 0 \;\; \forall x_i \in E_i, \; x_j \in E_j$.

(c) $E^* := \mathrm{Hom}_A(E,A) = \{\varphi : E \to A \mid \varphi \text{ ist } A-\text{Modulhomomorphismus}\}$ heißt der zu E **duale** Modul.
(E^* ist ein A-Modul durch $(a \cdot \varphi)(x) := a \cdot \varphi(x) \;\; \forall\, x \in E, a \in A, \varphi \in E^*$)

(d) Für $x \in E$ und $F \leq E$ sei $b_F(x) : F \to A$ definiert durch $b_F(x)(y) := b(x,y)$ für alle $y \in F$.

Lemma 2.1.3 *Sei $F \leq E$. Dann ist $E = F \perp F^{\perp}$ genau dann wenn $b_F(E) = b_F(F)$ und $F \cap F^{\perp} = \{0\}$.*

Beweis:

$\Rightarrow$ Klar!

$\Leftarrow$ Sei $b_F(E) = b_F(F)$. Zeige: für alle $x \in E$ existiert ein $y \in F$ und $y' \in F^{\perp}$ mit $x = y + y'$.
Sei $x \in E$. Dann gibt es $y \in F$ mit $b_F(x) = b_F(y)$. Daraus folgt, dass für alle $z \in F$ gilt:
$b_F(x)(z) = b(x,z) = b(y,z) = b_F(y)(z) \Leftrightarrow b(x-y,z) = 0 \ \forall z \in F$
$\Rightarrow y' := x - y \in F^{\perp}$ und $x = y + y' \in F + F^{\perp}$

Definition 2.1.4

(a) (E,b) heißt **nicht ausgeartet** , wenn $b_E : E \to E^*$ injektiv ist.

(b) (E,b) heißt **regulär** , wenn b_E bijektiv und E ein endlich erzeugter freier A-Modul ist.

Satz 2.1.5 *Sei $F \leq E$ so dass $(F, b|_{F\times F})$ regulär ist. Dann ist $E = F \perp F^{\perp}$.*

Beweis: Da F regulär ist folgt, dass $b_F|_F : F \to F^*$ bijektiv ist. Daraus folgt: $b_F(E) = b_F(F)$ und $Kern(b_F|_F) = F^{\perp} \cap F = \{0\}$. Mit 2.1.3 folgt die Behauptung. □

Definition 2.1.6 Sei $E = \bigoplus_{i=1}^{n} A e_i$ ein freier A-Modul mit Basis $\underline{e} = (e_1, \cdots, e_n)$. Sei $b : E \times E \to A$ eine symmetrische Bilinearform. Die Matrix

$$G(\underline{e}) := \big(b(e_i, e_j)\big)_{1 \leq i,j \leq n} \in A^{n \times n}$$

heißt **Gram-Matrix** von b bzgl. $\underline{e}$.

Satz 2.1.7 *Sei E ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper A. Sei $b : E \times E \to A$ eine symmetrische Bilinearform. Dann gibt es eine Zerlegung*

$$E = E_1 \perp \cdots \perp E_r \perp F,$$

wobei E_i regulär, $\dim(E_i) = 1$ oder $\dim(E_i) = 2$ für alle $i = 1, \cdots, r$ und $F = E^{\perp}$.
E ist genau dann regulär, wenn $F = \{0\}$.

Beweis: Beweis durch Induktion nach $\dim(E)$:
$dim(E) = 0$: Klar!
$dim(E) = n > 0$:

1 .Fall Ist $b(E,E) = 0$, so setze $F := E$.

2 .Fall Ist $b(E,E) \neq \{0\}$, so unterscheide:

Fall 2. 1 : Es existiert ein $e \in E$ mit $b(e,e) \neq 0$.
Setze $E_1 := \langle e \rangle \leq E$. Daraus folgt, dass E_1 ist regulär. Mit 2.1.5 erhalten wir, dass
$E = \langle e \rangle \perp \langle e \rangle^{\perp}$, wobei $\dim(\langle e \rangle^{\perp}) = \dim(E) - 1$
Die Behauptung folgt mit Induktion!

Fall 2. 2 : Für alle $e \in E$ ist $b(e,e) = 0$.
Dann gibt es $e, f \in E$ mit $b(e,f) \neq 0$.
Setze $E_1 := \langle e, f \rangle \leq E$, $\underline{e} := (e,f)$ und $a := b(e,f)$.
Da $\det(\mathrm{G}(\underline{e})) = -a^2 \neq 0$ ist E_1 regulär und also $E = E_1 \perp E_1^{\perp}$ mit $\dim(E_1^{\perp}) = \dim(E) - 2$, nach 2.1.5.
Die Behauptung folgt mit Induktion! □

Bemerkung 2.1.8 Der Fall 2.2 aus dem Beweis von Satz 2.1.7 tritt für $\mathrm{char}(A) \neq 2$ nicht auf, denn es ist $b(e+f,e+f) = b(e,e) + 2b(e,f) + b(f,f)$, und somit können für $\mathrm{char}(A) \neq 2$ und $b(e,f) \neq 0$ nicht alle $b(e+f,e+f)$, $b(e,e)$, $b(f,f)$ gleich Null sein.

Folgerung 2.1.9 *Jeder endlichdimensionale Vektorraum über einem Körper der Charakteristik ungleich 2 hat eine Orthogonalbasis.*

2.2 Gitter

Sei V ein Vektorraum der Dimension n über $\mathbb{R}$ mit einer positiv definiten Bilinearform $(\ ,\ )$.

Definition 2.2.1

(i) Eine Teilmenge $L \subset V$ heißt **Gitter von Rang** m **in** V,
falls es linear unabhängige Vektoren $e_1, \ldots, e_m \in V$ so gibt, dass

$$L = \mathbb{Z}e_1 + \ldots + \mathbb{Z}e_m = \left\{ \sum_{i=1}^{m} x_i e_i | x_i \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Gilt $n = m$, so heißt L **volles Gitter**. Das Tupel $\underline{e} := (e_1, \ldots, e_m)$ heißt **Gitterbasis**.

(ii) Es heißt $\det(L) := \det(\mathrm{G}(\underline{e}))$ die **Determinante** von L.

In dieser Arbeit werden ausschließlich volle Gitter betrachtet. Es bezeichne L ein Gitter von Rang n mit Basis $\underline{e} := (e_1, ..., e_n)$. Weiter bezeichne S^{tr} die Transponierte Matrix einer Matrix S.

Bemerkung 2.2.2 Die Determinante eines Gitters ist unabhängig von der Basiswahl, daher ist die vorhergehende Definition wohldefiniert.

Beweis: Seien $\underline{e}$ und $\underline{e}'$ zwei Basen des Gitters L, und sei S die Basiswechselmatrix, die $\underline{e}$ in $\underline{e}'$ überführt. Es hat S ganzzahlige Koeffizienten, und S^{-1} existiert. Da $\det(S)$ und $\det(S^{-1})$ ganze Zahlen sind und zusätzlich $\det(S) \cdot \det(S^{-1}) = 1$ ist, folgt $\det(S) = \pm 1$. Weiter gilt $\mathrm{G}(\underline{e}') = S^{tr}\,\mathrm{G}(\underline{e})S$ und damit folgt $\det(\mathrm{G}(\underline{e})) = \det(\mathrm{G}(\underline{e}'))$. □

Beispiel 2.2.3 Sei $V = \mathbb{R}^n$. Sei $(e_1, ..., e_n)$ die Standardbasis, und sei das Standardskalarprodukt die zu V gehörige Bilinearform. Dann heißt $\mathbb{Z}^n := \mathbb{Z}e_1 + ... + \mathbb{Z}e_n$ das **Standardgitter**.

Analog zu [Ebe94, Chapter 1] führen wir die folgenden Begriffe ein:

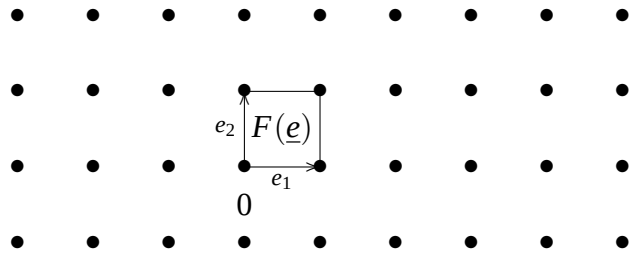
Definition 2.2.4 Das Parallelepiped

$$\mathrm{F}(\underline{e}) := \{\lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n \mid 0 \leq \lambda_i \leq 1\}$$

heißt die **Grundmasche** von L bzgl. $\underline{e}$. Ihr Volumen ist erklärt durch

$$\mathrm{vol}(\,\mathrm{F}(\underline{e})\,) = \sqrt{\det(\mathrm{G}(\underline{e}))}$$

Die folgende Zeichnung zeigt einen Ausschnitt des Standardgitters $\mathbb{Z}^2$ mit eingezeichnetem Fundamentalbereich $\mathrm{F}(\underline{e})$:



Das Volumen des Gitters L ist wie folgt definiert.

$$\mathrm{vol}(L) := \mathrm{vol}(\,\mathbb{R}^n/L\,) = (\,\mathrm{vol}(\,\mathrm{F}(\underline{e})\,)\,)$$

Beispiel 2.2.5 Sei L das 2-dimensionale Standardgitter. Es ist

$$\mathrm{vol}(L) = \sqrt{\det(\mathrm{G}(\underline{e}))} = (\,(1,0),\,(1,0)\,) \cdot (\,(0,1),\,(0,1)\,) = 1.$$

Der Quotient $\mathbb{R}^2/L$ ist ein 2-dimensionaler Torus.

Bemerkung 2.2.6 Sei $L' \subseteq L$ ein Teilgitter von L. Es gilt

$$\det(L') = \det(L) \cdot [L : L']^2 .$$

Diese Gleichheit nennt man **Determinanten-Index-Formel**.

Beweis: Nach dem Elementarteilersatz für endlich erzeugte freie $\mathbb{Z}-$ Moduln gibt es ein Basis $(b_1, ..., b_n)$ von L, so dass $(a_1 b_1, ..., a_n b_n)$ eine Basis von L' ist. Es bezeiche S die Wechselmatrix von L nach L'. Es folgt, dass $\det(L') = \det(S \cdot L) = \det(L) \cdot \det(S)^2$. □

Definition 2.2.7

(i) L heißt **ganz**, wenn $(x,y) \in \mathbb{Z}$ für alle $x, y \in L$.

(ii) L heißt **gerade**, wenn $(x,x) \in 2\mathbb{Z}$ für alle $x \in L$.

Ein gerades Gitter ist ganz, da
$(x+y, x+y) = (x,x) + 2(x,y) + (y,y) \Leftrightarrow (x,y) = \frac{1}{2} \underbrace{(x+y, x+y)}_{\in 2\mathbb{Z}} - \frac{1}{2} \underbrace{(x,x)}_{\in 2\mathbb{Z}} - \frac{1}{2} \underbrace{(y,y)}_{\in 2\mathbb{Z}}$.

Es heißt $L_{ev} := \{x \in L \mid (x,x) \in 2\mathbb{Z}\}$ **gerades Teilgitter** von L.
L_{ev} ist der Kern der linearen Abbildung $L \to \mathbb{F}_2, \ \ x \mapsto (x,x) + 2\mathbb{Z}$. Ist L gerade, so ist $L = L_{ev}$; ist L ungerade, so ist $L_{ev} \subseteq L$, und aus dem Homomorphiesatz folgt, dass $|L/L_{ev}| = 2$.

Bemerkung 2.2.8 Ein Gitter ist ein freier bilinearer $\mathbb{Z}$-Modul.

Definition 2.2.9 Für ein Gitter L sei

$$L^{\#} := \{ v \in V \mid (v,y) \in \mathbb{Z} \ \ \forall y \in L \} .$$

Das Gitter $L^{\#}$ heißt das zu L **duale Gitter**.

Die obige Definition ist wegen des folgenden Satzes wohldefiniert.

Satz 2.2.10 *Es besitzt $L^{\#}$ die Basis $\underline{e}^{\#} = (e_1^{\#}, \cdots, e_n^{\#})$, wobei $e_i^{\#} := \sum_{j=1}^n a_{ij} e_j$ mit $A := ((a_{ij})) = \mathrm{G}(\underline{e})^{-1}$. Es gilt außerdem, dass $(e_i, e_j^{\#}) = \delta_{ij}$.*

Beweis: Offensichtlich gilt, dass $< \underline{e}^{\#} > \subseteq L^{\#}$. Außerdem hat der von $\underline{e}^{\#}$ aufgespannte Raum Rang n. Es gilt, dass $A \, \mathrm{I}_n \, \mathrm{G}(\underline{e}) \, \mathrm{I}_n = \mathrm{I}_n$. Daraus folgt, dass $(\sum_{j=1}^n a_{ij} e_j, e_k) = \delta_{ij}$ für alle i, j. Da außerdem $(,)$ regulär ist, folgt die Behauptung. □

Folgerung 2.2.11 *Nach Satz 2.2.10 gilt, dass* $G(\underline{e}^{\#}) = G(\underline{e})^{-1}$. *Daraus folgt, dass* $\det(L^{\#}) = \det(L)^{-1}$.

Bemerkung 2.2.12

(i) Aus $L' \subseteq L$ folgt, dass $L^{\#} \subseteq (L')^{\#}$.

(ii) Es ist L genau dann ganz, wenn gilt $L \subseteq L^{\#}$.

(iii) Nach der Determinanten-Index-Formel gilt für ein ganzes Gitter:

$$\det(L) = \sqrt{\frac{\det(L)}{\det(L^{\#})}} = \left[L^{\#} : L\right].$$

Definition 2.2.13 Die Automorphismengruppe eines Gitters L ist die Menge aller Abbildungen, die das Gitter isometrisch in sich überführen.

Analog zu [Ebe94] zeigen wir in einem kleinen Beispiel einen Zusammenhang zwischen binären Codes und Gittern. Dieser erlaubt uns eine schöne Einführung des Wurzelgitters E_8.

Beispiel 2.2.14 Von Codes zu Gittern
Ein Code der Länge n ist eine Teilmenge des $\mathbb{F}_q^n$ für eine Primzahlpotenz q. Ist $q = 2$, so heißt der Code binär. Ein linearer Code ist ein Untervektorraum des $\mathbb{F}_q^n$. Hat man einen binären Code, so kann man aus diesem wie folgt ein Gitter konstruieren. Sei $\mathbb{Z}^n$ das Standardgitter, so betrachten wir die Reduktion modulo 2

$$\rho : \mathbb{Z}^n \to (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n = \mathbb{F}_2^n.$$

Ist C ein linearer Code der Dimension k im $\mathbb{F}_2^n$, so ist $\mathbb{F}_2^n/C \cong \mathbb{F}_2^{n-k}$. C ist eine Untergruppe von Index 2^{n-k} von $\mathbb{F}_2^n$. Also ist das Urbild $\rho^{-1}(C)$ eine Untergruppe von Index 2^{n-k} von $\mathbb{Z}^n$. Es ist $\rho^{-1}(C)$, wie man leicht sieht, ein Gitter. Somit ist auch $L_C := \frac{1}{\sqrt{2}}\rho^{-1}(C)$ ein Gitter.
Betrachten wir einen der bekannten Hamming-Code. Dieser ist definiert durch eine Abbildung

$$\mathbb{F}_2^4 \to \mathbb{F}_2^7,\ (x_1,x_2,x_3,x_4) \mapsto (x_1,x_2,x_3,x_4,-x_1-x_3-x_4,-x_1-x_2-x_4,-x_2-x_3-x_4).$$

Ergänzt man den Code von $x_8 := x_1 + \cdots + x_7$, so erhält man den erweiterten Hamming-Code $\overline{H}$. Der erweiterte Hamming-Code hat die Basis $(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7) := ((0,1,1,0,1,0,0,1), (0,0,1,1,0,1,0,1), (0,0,0,1,1,0,1,1), (1,0,0,0,1,1,0,1), (0,1,0,0,0,1,1,1), (1,0,1,0,0,0,1,1), (1,1,0,1,0,0,0,1))$. Klar ist, dass die Vektoren $\sqrt{2}f_1,...,\sqrt{2}f_7$ in den zugehörigen Gitter $L_{\overline{H}}$ enthalten sind. Es ist $L_{\overline{H}}$ ein gerades Gitter im $\mathbb{R}^8$ mit der Basis $(\sqrt{2}f_1, \sqrt{2}(f_2 - f_1), \sqrt{2}(f_3 - f_2), \sqrt{2}(f_4 - f_3), \sqrt{2}(f_5 - f_4), \sqrt{2}(f_6 - f_5), \sqrt{2}(f_7 - f_6), \sqrt{2}(-1,-1,0,0,1,0,-1,0))$. (Denn: Leicht rechnet man nach, dass die Vektoren linear unabhängig sind. Das Bild der Vektoren ist offensichtlich in $\overline{H}$ enthalten.) Man definiert das Gitter E_8 als $L_{\overline{H}}$.

2.3 Modulare Gitter

Sei p eine Primzahl, $\mathbb{Q}_p$ der Körper der p-adischen Zahlen und $\mathbb{Z}_p$ der Ring der ganzen p-adischen Zahlen und $\mathbb{Z}_p \cap \mathbb{Q} =: \mathbb{Z}_{(p)} = \{\frac{a}{b} \mid p \nmid b\}$. Weiter sei im Folgendem L ein Gitter dessen Bilinearform nur Werte in $\mathbb{Q}$ annimmt. Wir führen analog zu [RS98] modulare Gitter ein.

Definition 2.3.1 Für ein Gitter L heißt

$$L_p := \mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} L, \qquad \text{mit } p \in \mathbb{P}$$

die **p-Komplettierung** von L.

Definition 2.3.2 Sei $\Pi \subseteq \mathbb{P}$. Das Gitter

$$L^{\#_\Pi} := \left\{ v \in L \otimes \mathbb{Q} \mid (v,L) \subseteq \mathbb{Z}_{(p)} \ \forall\, p \in \Pi \text{ und } (v,L^{\#}) \subseteq \mathbb{Z}_{(p)} \ \forall\, p \notin \Pi \right\}$$

heißt das Π-**Dual** von L.

Bemerkung 2.3.3 Offensichtlich ist $L^{\#_\Pi}$ wieder ein Gitter.

Lemma 2.3.4 *Seien M, L $\mathbb{Z}$-Gitter in V. Es gilt:*

$$L = M \ \Leftrightarrow\ \mathbb{Z}_{(p)} \otimes L = \mathbb{Z}_{(p)} \otimes M \quad \textit{für alle } \ p \in \mathbb{P}$$

Beweis:

$\Rightarrow$ Die Behauptung ist klar, da $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}_{(p)}$ für alle $p \in \mathbb{P}$.

$\Leftarrow$ Sei $\mathcal{B}$ eine $\mathbb{Z}-$*Basis* von L und $\mathcal{C}$ eine $\mathbb{Z}-$*Basis* von M. Weiter sei $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ die Basiswechselmatrix von L nach M.
Es folgt, dass $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_{(p)})$ für alle $p \in \mathbb{P}$. Daraus erhalten wir, dass
$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} \in \bigcap_{p\in\mathbb{P}} \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_{(p)}) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$, da $\bigcap_{p\in\mathbb{P}} \mathbb{Z}_{(p)} = \mathbb{Z}$.
Insgesamt folgt, dass $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ in $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ enthalten ist.

Bemerkung 2.3.5 Sei L ein ganzes Gitter. Dann gilt, dass

$$L^{\#_\Pi} = L^{\#} \cap \mathbb{Z}\left[\frac{1}{p} \mid p \in \Pi\right] L.$$

Beweis: Sei $p \in \mathbb{P}$, so ist

$$(L^{\#_\Pi})_{(p)} = \begin{cases} \{v \in L \otimes \mathbb{Q} \mid (v, L_{(p)}) \subseteq \mathbb{Z}_{(p)}\} = (L_{(p)})^{\#} = (L^{\#})_{(p)} & \text{falls } p \in \Pi \\ \{v \in L \otimes \mathbb{Q} \mid (v, L^{\#}_{(p)}) \subseteq \mathbb{Z}_{(p)}\} = ((L_{(p)})^{\#})^{\#} = L_{(p)} & \text{falls } p \notin \Pi \end{cases}$$

und

$$L^{\#}_{(p)} \cap (\mathbb{Z}\left[\frac{1}{p} \mid p \in \Pi\right] L)_{(p)} = \begin{cases} L^{\#}_{(p)} \cap (L \otimes \mathbb{Q}) = L^{\#}_{(p)} & \text{falls } p \in \Pi \\ L^{\#}_{(p)} \cap L_{(p)} = L_{(p)} & \text{falls } p \notin \Pi. \end{cases}$$

Nach Lemma 2.3.4 folgt die Behauptung. □

Bemerkung 2.3.6 Es ist $L^{\#_\emptyset} = L$ und $L^{\#_{\mathbb{P}}} = L^{\#}$.

Definition 2.3.7 Seien L, L' zwei Gitter.

1. Ein Isomorphismus g von L nach L' heißt **Ähnlichkeit**, falls ein $s \in \mathbb{R}$ existiert, so dass $(g(x), g(y)) = s(x, y)$ für alle $x, y \in L$.
2. Sei L ein ganzes Gitter und $\Pi \subseteq \mathbb{P}$. Eine Ähnlichkeit von $L^{\#_\Pi}$ nach L heißt **Modularität**.
3. Eine Modularität σ heißt **von der Stufe** s (oder auch **s-Modularität**), falls Π aus der Menge aller Primteiler von s besteht und σ die Norm mit s multipliziert, das heißt also $\Pi := \{p \in \mathbb{P} \mid p|s\}$ und es existiert eine Ähnlichkeit von $L^{\#}$ nach L, so dass $(\sigma(x), \sigma(y)) = s(x,y)$ für alle $x, y \in L$.

Definition 2.3.8 Ein ganzes Gitter L heißt **von der Stufe** l', falls l' die kleinste natürliche Zahl ist, so dass $\sqrt{l'}L^{\#}$ ganz ist.
Ist L ein gerades Gitter, so heißt die kleinste Zahl l, so dass $\sqrt{l}L^{\#}$ wieder gerade ist, die **gerade Stufe** von L.
Sei $\Pi \subseteq \mathbb{P}$. Vertauscht man die Rollen von $L^{\#}$ und $L^{\#_\Pi}$, so ist die Π-Stufe l'_π und l_π analog definiert.

Sei $N \in \mathbb{N}$. Ein Teiler d von N heißt **exakt**, falls $\mathrm{ggT}(\frac{N}{d}, d) = 1$. Im Zeichen: $d||N$.

Definition 2.3.9 Sei L ein ganzes Gitter.

1. Sei $M \subseteq \mathbb{N}$. Es heißt L M-**modular**, falls L Modularitäten der Stufe m für alle m aus M besitzt.
2. Sei $N \in \mathbb{N}$. Das Gitter L heißt N-**modular**, falls seine Stufe N teilt und es $\{1, N\}$-modular ist.

3. Sei $N \in \mathbb{N}$. Das Gitter L heißt **stark N-modular**, falls seine Stufe N teilt und es für jeden exakten Teiler d von N eine d-Modularität besitzt.

Bemerkung 2.3.10 Sei $\sqrt{N}L^{\#}$ ganz, dann ist $L^{\#_{\{p\,|\,p|N\}}} = L^{\#}$.

Beweis: Da $\sqrt{N}L^{\#}$ ganz ist, folgt, dass $\sqrt{N}L^{\#} \subseteq \left(\sqrt{N}L^{\#}\right)^{\#} = \frac{1}{\sqrt{N}}L$. Damit ist $L^{\#} \subseteq \frac{1}{N}L \subseteq \mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\,|\,p|N\right]L$ und wir erhalten, dass $L^{\#_{\{p\,|\,p|N\}}} = L^{\#}$. □

Bemerkung 2.3.11 Ein Gitter L ist genau dann N-modular, wenn gilt, dass $L \cong \sqrt{N}L^{\#}$.

Beweis: Sei L N-modular. Dann ist $\sqrt{N}L^{\#}$ ganz und somit $L^{\#} = L^{\#_{\{p\,|\,p|N\}}}$. Nach Voraussetzung existiert eine Modularität der Stufe N.
Sei $L \cong \sqrt{N}L^{\#}$, dann ist $\sqrt{N}L^{\#}$ ganz und somit $L^{\#} = L^{\#_{\{p\,|\,p|N\}}}$. Nach Voraussetzung existiert eine Modularität der Stufe N. □

Folgerung 2.3.12 *Ist L ein N-modulares Gitter, so ist* $\det(L) = N^{\frac{n}{2}}$.

Beweis: Nach der vorhergehenden Bemerkung existiert eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$, mit $\det(L) = \det(S^{tr}\sqrt{N}L^{\#}S) = \det(S)^2 N^n \det(L)^{-1}$. Daraus folgt, dass $\det(L) = N^{\frac{n}{2}}$. □

Folgerung 2.3.13 *Ist N quadratfrei und L ein stark N-modulares Gitter, so gilt für jeden Teiler p von N, dass*

$$L^{\#_p} = L^{\#} \cap \frac{1}{p}L.$$

Satz 2.3.14 *Sei $N \in \mathbb{N}$ quadratfrei. Besitzt L für die paarweise teilerfremden Teiler d_i, $1 \leq i \leq m$ von N eine d_i-Modularität, so besitzt L auch eine $(d_1 \cdot \ldots \cdot d_m)$-Modularität.*

Beweis: Wir führen den Beweis für $m = 2$ durch und erhalten den Rest analog. Seien $d_i =: p$ und $d_j =: q$. Weiter seien $\sigma_p : L \to L^{\#,p}$ eine p-Modularität, $\sigma_q : L \to L^{\#,q}$ eine q-Modularität und σ_{pq} eine $(p \cdot q)$-Modularität. Da man σ_p bzw. σ_q auf $\mathbb{Q}L$ fortsetzen kann, zeigen wir, dass

$$\sigma_p(\sigma_q(L)) = \sigma_{pq}(L).$$

Dazu zeigen wir erstmal die folgende Behauptung.
(1) Sei $z \in \frac{1}{p}L^{\#,q}$. Dann ist $(z,y') \in \frac{1}{q}\mathbb{Z}$ für alle $y' \in L^{\#,q}$ genau dann, wenn gilt, dass $(z,y) \in$

$\mathbb{Z}$ für alle $y \in L$.

$\Rightarrow$ Sei $z = \frac{1}{p}z'$ mit $z' \in L^{\#,q}$, und es gelte, dass $(z,y') \in \frac{1}{q}\mathbb{Z}$ für alle $y' \in L^{\#,q}$.
Da $L \subseteq L^{\#,q}$, folgt, dass $(z,y) \in \frac{1}{q}\mathbb{Z}$ und $(z,y) = \frac{1}{p}(z',y) \in \frac{1}{p}\mathbb{Z}$ für alle $y \in L$.
Daraus folgt, dass $(z,y) \in \mathbb{Z}$, da $ggT(p,q) = 1$.

$\Leftarrow$ Sei $z \in \frac{1}{p}L^{\#,q}$, und es gelte $(z,y) \in \mathbb{Z}$ für alle $y \in L$.
Es folgt, dass $(z,y'') \in \frac{1}{q}\mathbb{Z}$ für alle $y'' \in \frac{1}{q}L$. Damit erhalten wir, dass $(z,y') \in \frac{1}{q}\mathbb{Z}$ für alle $y' \in L^{\#,q}$, da $L^{\#,q} \subseteq \frac{1}{q}L$.

(2) Nun können wir die Behauptung des Satzes zeigen.

$$\begin{aligned}
\sigma_q(L^{\#,p}) &= \sigma_q(\left\{x \in \frac{1}{p}L \mid (x,y) \in \mathbb{Z} \ \forall y \in L\right\}) = \left\{\sigma_q(x) \mid x \in \frac{1}{p}L,\ (x,y) \in \mathbb{Z} \ \forall y \in L\right\} \\
&= \left\{z \in \frac{1}{p}L^{\#,q} \mid p\,(z,\sigma_q(y)) \in \mathbb{Z} \ \forall y \in L\right\} =_{(1)} \left\{z \in \frac{1}{p}L^{\#,q} \mid (z,y) \in \mathbb{Z} \ \forall y \in L\right\} \\
&= \frac{1}{p}(\frac{1}{q}L \cap L^{\#}) \cap L^{\#} = L^{\#,pq}
\end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir also, dass L eine $(p \cdot q)$-Modularität besitzt. □

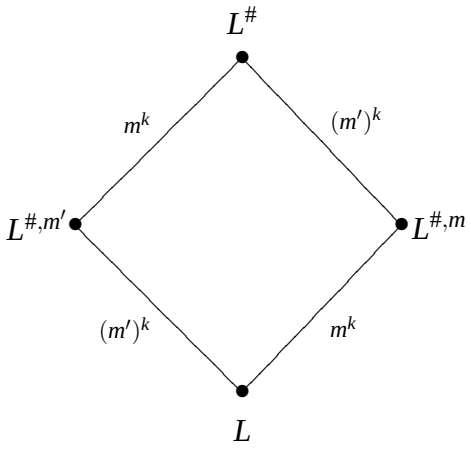
Folgerung 2.3.15 *Sei $N \in \mathbb{N}$ quadratfrei. Um nachzuprüfen, dass ein Gitter stark N-modular ist, genügt es für jeden Primteiler eine Modularität zu finden.*

Definition 2.3.16 Ein Gitter L heißt **unimodular** (oder **1-modular**), falls $L = L^{\#}$.

Folgerung 2.3.17 *Ist L unimodular, so gilt $det(L) = 1$. Ist L ein ganzes Gitter, so ist dieses genau dann unimodular, wenn $det(L) = 1$.*

Beispiel 2.3.18 Das in 1.2 eingeführte Gitter E_8 ist ganz und hat Determinante 1. Somit ist es nach der vorhergehenden Folgerung unimodular.

Die modularen Gitter sind Verallgemeinerungen von unimodularen Gittern.
Sei L ein stark N-modulares Gitter der Dimension $2k$ und $N = mm'$ für zwei teilerfremde Zahlen. Wir erhalten das folgende Verhältnis.



Beispiel 2.3.19 Sind $N \in \{1,2,3,5,6,7,11,14,15,23\}$ und $k \in \mathbb{N}$, so ist $C_N^k := (\perp_{d|N} \sqrt{d}\,\mathbb{Z})^k$ ein stark N-modulares Gitter.

Beweis: Es genügt, die Behauptung für $k = 1$ zu zeigen, da C_N^k aus k orthogonalen Kopien von C_N entsteht. Es ist $C_N^{\#} = \perp_{d|N} \frac{1}{\sqrt{d}}\mathbb{Z}$. Sei $(e_1,...,e_n) = (\sqrt{d_1}b_1,...,\sqrt{d_n}b_n)$ eine Basis von C_N, wobei $(b_1,...,b_n)$ die Standardbasis bezeichnet.

1. Ist $N \in \mathbb{P}$, so genügt es zu zeigen, dass C_N eine N-Modularität besitzt. Da C_N von Stufe N ist, ist $NC_N^{\#} \subseteq C_N$ und somit $C_N^{\#,\{N\}} = C_N^{\#}$. Definiere

$$\sigma : C_N \to C_N^{\#}, \quad b_1 \mapsto \tfrac{1}{\sqrt{N}}\, b_2\ ,\ \sqrt{N}b_2 \mapsto b_1.$$

   Offensichtlich ist σ ein Isomorphismus. Da außerdem $(b_1,b_1) = 1 = N \cdot N^{-1} = N(\sigma(b_1),\sigma(b_1))$ und $(\sqrt{N}b_2,\sqrt{N}b_2) = N = N \cdot 1 = N(\sigma(\sqrt{N}b_2),\sigma(\sqrt{N}b_2))$, folgt die Behauptung.

2. Sei $N \in 6,14,15$. Schreibe $N = p \cdot q$, mit $p,q \in \mathbb{P}$. Offensichtlich ist C_N wieder von der Stufe N. Es besitzt C_N eine p- bzw. q-Modularität. Sei σ o.B.d.A. eine p-Modularität. Es gilt, dass $C_N^{\#,\{p\}} = C_N^{\#} \cap \frac{1}{p}C_N = \left\langle b_1, \frac{1}{\sqrt{p}}b_2, \sqrt{q}b_3, \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}b_4 \right\rangle_{\mathbb{Z}}$. Definiere

$$\sigma : C_N \to C_N^{\{p\},\#},\ b_1 \mapsto \tfrac{1}{\sqrt{p}}b_2,\ \sqrt{p}b_2 \mapsto b_1,\ \sqrt{q}b_3 \mapsto \tfrac{q}{p}\, b_4\ \sqrt{pq}b_4 \mapsto \sqrt{q}b_3.$$

   Offensichtlich ist σ ein Isomorphismus. Leicht rechnet man nach, dass σ auch eine Ähnlichkeit ist.
   Vertauscht man die Rollen von p und q, so erhält man eine q-Modularität und mit Folgerung 2.3.15 erhält man die Behauptung. □

Bemerkung 2.3.20 Sei L ein ganzes Gitter.

(i) Sei b die zu L gehörende Bilinearform. Die Abbildung

$$\overline{b} : L^{\#}/L \times L^{\#}/L \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}, \qquad \overline{b}(x+L, y+L) = (x,y)+\mathbb{Z}$$

ist eine wohldefinierte symmetrische Bilinearform.

(ii) Die Bilinearform $\overline{b}$ ist nicht ausgeartet.

(iii) Sei L stark N-modular mit N quadratfrei. Seien $p,q \in \mathbb{P}$, mit $p \neq q$ Teiler von N. Die Gitter $L^{\#,\{p\}}$ und $L^{\#,\{q\}}$ stehen orthogonal zueinander bezüglich $\overline{b}$.

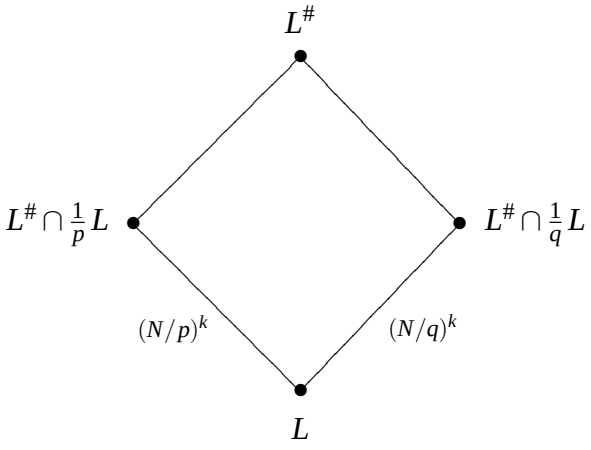
Beweis:

(i) Sei $L^{\#} \ni x = z + l$, mit $z \in L^{\#}$, und $l \in L$. Zu zeigen ist, dass $\overline{b}(x+L,y+L) = \overline{b}(z+L,y+L)$.

$$\begin{aligned} \overline{b}(x+L,y+L) &= \overline{b}(z+l+L,y+L) = b(z+l,y)+\mathbb{Z} = b(z,y) + \underbrace{b(l,y)}_{\in\mathbb{Z}, \text{ da } y\in L^{\#}} +\mathbb{Z} \\ &= b(z,y)+\mathbb{Z} = \overline{b}(z+L,y+L) \end{aligned}$$

(ii) Die Behauptung folgt, da $\overline{b}(x+L,y+L) = 0+\mathbb{Z}$ für alle $y \in L^{\#}$ genau dann, wenn $(x,y) \in \mathbb{Z}$ für alle $y \in L^{\#}$ genau dann, wenn $x \in \left(L^{\#}\right)^{\#} = L$.

(iii) Sei $2k := n := \dim(L)$. Um die Behauptung zu zeigen, betrachte $L^{\#} \cap \frac{1}{p}L$ als Untergruppe der Ordnung $(N/p)^k$ von $L^{\#}/L$, bzw. $L^{\#} \cap \frac{1}{q}L$ als Untergruppe der Ordnung $(N/q)^k$ von $L^{\#}/L$.



Seien $x \in L^{\#} \cap \frac{1}{p} L$ und $y \in L^{\#} \cap \frac{1}{q} L$. Zeige, dass $\overline{b}(x+L, y+L) = 0+\mathbb{Z}$.

1. Da $p^k x \in L$, folgt, dass $\overline{b}\left(p^k x+L, y+L\right) = b\left(p^k x, y\right)+\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}$, da $y \in L^{\#}$.
   Damit erhalten wir, dass $b(x,y) = \dfrac{z}{p^{k^*}}$ für ein $z \in \mathbb{Z}$ und für $k^* \leqslant k$.
2. Da $q^k y \in L$ folgt, dass $\overline{b}\left(x+L, q^k y+L\right) = b\left(x, q^k y\right)+\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}$, da $x \in L^{\#}$.
   Damit erhalten wir, dass $b(x,y) = \dfrac{z'}{q^{l^*}}$ für ein $z' \in \mathbb{Z}$ und für $l^* \leqslant l$.

Mit 1. und 2. folgt, dass $b(x,y)$ in $\mathbb{Z}$ liegt. □

2.4 Modulformen und Theta-Reihen von Gittern

Bei der Einführung gehen wir analog zu [KK98] vor.

Sei $\mathbb{H} := \{\tau \in \mathbb{C} \mid \Im\tau > 0\}$ die **obere Halbebene**. Ist $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ eine 2×2 Matrix mit Einträgen aus $\mathbb{C}$, so definieren wir

$$M\tau := \frac{a\tau+b}{c\tau+d} \quad \text{für alle} \quad \tau \in \mathbb{C}.$$

Somit wird durch

$$\phi_M : \tau \to M\tau$$

eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{H}$ definiert. Diese Funktion heißt **Möbius-Transformation**. Die Möbius-Transformationen sind genau die biholomorphen Selbstabbildungen von $\mathbb{H}$.
Es bezeichne Γ die Gruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Bemerkung 2.4.1 Die Gruppe Γ wird von den Matrizen

$$S := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

erzeugt.

Definition 2.4.2 Sei f eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{H}$. Sei $k \in \mathbb{Z}$ und $M \in \mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$, dann definieren wir

$$f\,|_k\, M = f \mid M := (c\tau+d)^{-k} \cdot f(M\tau) \quad \text{für} \quad \tau \in \mathbb{H}.$$

Es sei G eine Gruppe. Ein **Charakter** von G ist ein Gruppenhomomorphismus in die multiplikative Gruppe der komplexen Zahlen.

Definition 2.4.3 Sei U eine Untergruppe von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, so dass $U \cap \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ in U und $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ endlichen Index hat, und χ sei ein Charakter von U. Eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ heißt eine **Modulform vom Gewicht k zur Gruppe U mit Charakter** χ, falls gilt:

1. Es ist $f\,|_k\, A = \chi(A) f \quad$ für alle $A \in U$.
2. Für alle $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ ist $f\,|_k\, M$ holomorph bei $i\infty$.

Bemerkung 2.4.4 Seien f und g Modulformen von Gewicht k zur Gruppe U mit Charakter χ, so ist auch $\alpha f + \beta g$, mit $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, eine Modulform von Gewicht k zur Gruppe U mit Charakter χ. Modulformen eines Gewichts bilden also einen $\mathbb{C}$-Vektorraum, den man mit $\mathcal{M}_k(U, \chi)$ bezeichnet.
Für eine Menge von Charakteren, für die $\chi_k \cdot \chi_l = \chi_{k+l}$ mit $l, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, ist die Operation $|_k$ multiplikativ. Die Modulformen zur Untergruppe U bilden dann einen durch das Gewicht graduierten Ring $\mathcal{M}(U, \chi) = \oplus_{k=1}^{\infty} \mathcal{M}_k(U, \chi_k)$.

Bemerkung 2.4.5 Ist $-\mathrm{I}_2 \in U$ und χ der triviale Charakter, so sieht man direkt, dass jede Modulform von ungeradem Gewicht gleich 0 ist.

2.4.1 Theta-Reihen

Definition 2.4.6 Sei L ein Gitter, so heißt die Funktion in $\mathbb{C}$

$$\theta_L(\tau) := \sum_{x \in L} \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i}\, b(x,x)\, \tau} = \sum_{j=0}^{\infty} a_L(j)\ \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i}\, j \tau}, \qquad \tau \in \mathbb{H}, \text{ die } \textbf{Theta-Reihe} \text{ von } L,$$

wobei $a_L(j) = |\,\{x \in L | b(x,x) = j\}\,|$ der Anzahl der Vektoren der Länge j bezeichnet.

Für die Wohldefiniertheit der Theta-Reihe ist einerseits zu zeigen, dass diese konvergiert und andererseits, dass $a_L(j) < \infty$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Für den ersten Teil verweisen wir auf [Ebe94, Kapitel 2.1], der zweite Teil wird in der folgenden Bemerkung behandelt.

Bemerkung 2.4.7 Es gilt:

$$\text{Für alle } \alpha \in \mathbb{R} \text{ ist } |\,\{x \in L | b(x,x) \leq \alpha\}\,| \text{ endlich.}$$

Beweis: Sei $v_1,...,v_n$ eine beliebige Basis von V. Weiter sei $L \ni x = (x_1,...,x_n)$ mit $x = \sum_{i=1}^{n} b_i v_i$ für $b_i \in \mathbb{R}$, bzw. $x = \sum_{i=1}^{n} c_i e_i$ bezüglich einer Basis von L mit $c_i \in \mathbb{Z}$. Da je zwei Normen auf V äquivalent, sind erhalten wir, dass $||x||_{max} = max_i |x_i| \leq C\sqrt{b(x,x)}$. Daraus folgt, dass $|c_i| \leq C\sqrt{\alpha}$ und somit folgt, dass $|\{x \in L | b(x,x) \leq \alpha\}| \leq \left(2 \cdot C\sqrt{\alpha+1}\right)^n$. □

Bemerkung 2.4.8 Ist L gerade, so ist θ_L offensichtlich periodisch.

Analog zu [Ebe94] führen wir die folgenden Sätze an.
Es bezeiche $\widehat{f}$ die Fourier-Transformierte von f, das heißt $\widehat{f} := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, e^{-2\pi i b(x,y)}\, dx$.

Satz 2.4.9 ***Poissonsche Summenformel***
Seien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ eine Funktion und $L \subset \mathbb{R}^n$ ein Gitter, so dass gilt:

1. $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx < \infty$
2. *Die Reihe $\sum_{x \in L} |f(x+u)|$ konvergiert gleichmäßig für alle u, die in einer kompakten Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ enthalten sind.*
3. *Die Reihe $\sum_{x \in L^\#} \widehat{f}(y)$ ist absolut konvergent.*

Dann gilt

$$\sum_{x \in L} f(x) = \frac{1}{\det(L)} \sum_{y \in L^\#} \widehat{f}(y).$$

Beweis: [Ebe94, Theorem2.2] □

Satz 2.4.10 ***Theta-Transformationsformel***
Es gilt die Identität

$$\theta_L(-\frac{1}{\tau}) = (\frac{\tau}{i})^{\frac{n}{2}} \sqrt{\det(L)}^{-1} \theta_{L^\#}(\tau).$$

Beweis: Da beide Seiten der Gleichung holomorph sind und $\mathbb{H}$ ein Gebiet ist, können wir den Identitätssatz (siehe [Rem92, Kapitel 8, §1.1]) benutzen, um die Behauptung zu zeigen. Nach dem Identitätssatz sind zwei auf einem Gebiet G holomorphe Funktionen f und g genau dann gleich, wenn die Menge $\{w \in G \mid f(w) = g(w)\}$ einen Häufungspunkt in G hat. Es genügt also nach dem Identitätssatz zu zeigen, dass die Gleichheit für $\tau = it$ mit $t \in \mathbb{R}, t > 0$ erfüllt ist. Wir wollen als nächstes die Poissonsche Summenformel anwenden. Dazu berechnen wir erstmal die Fouriertransformierte von $e^{-\pi(\frac{1}{\sqrt{t}}x)^2} =: f(\frac{1}{\sqrt{t}}x)$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Wegen Fubini können wir erstmal den Fall $n = 1$ betrachten. Nach partieller Integration mit $g(x) = e^{-2i\pi x \cdot y}$ und $h'(x) = -2\pi x\, e^{-(\frac{1}{\sqrt{t}}x)^2\pi}$ erhalten wir, dass $\widehat{f}'(y) = \int_{\mathbb{R}} -2\pi x\, i\, e^{-(\frac{1}{\sqrt{t}}x)^2\pi} \cdot e^{-2i\pi x \cdot y}\, dx = -\int_{\mathbb{R}} -i\sqrt{t}\, e^{-\frac{1}{t}x^2\pi} \cdot (-2\pi i y)\, e^{-2i\pi x \cdot y}\, dx$. Damit erhalten wir, dass $\widehat{f}'(y) = \sqrt{t} 2\pi y\, \widehat{f}(y)$. Es folgt,

dass $\widehat{f}(y) = c \cdot e^{\mathrm{i}\pi t y^2}$ für ein $c \in \mathbb{R}$. Aber $c = 1$, da gilt, dass $\widehat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-(\frac{1}{\sqrt{t}}x)^2\pi}\, dx = 0$. Insgesamt erhalten wir, dass $\widehat{f}(y) = (\sqrt{t})^n\, \mathrm{e}^{-\pi t y^2}$. Mit der Poissonschen Summenformel erhalten wir nun, dass

$$\theta_L(-\frac{1}{t}) = \sum_{x\in L} \mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}(-\frac{1}{\mathrm{i}t})b(x,x)} = \frac{1}{\det(L)} \sum_{y\in L^\#} (\sqrt{t})^n\, \mathrm{e}^{-\pi t(y,y)} = t^{\frac{n}{2}} \frac{1}{\det(L)} \theta_{L^\#}(\mathrm{i}t).$$

Somit ist die Behauptung gezeigt. □

Der folgende Satz zeigt das schöne Zusammenspiel von Gittern und Modulformen, bzw. Thetareihen.

Satz 2.4.11 *Sei L ein gerades unimodulares Gitter der Dimension n. Es gilt dann, dass die Dimension von L durch 8 teilbar ist. Weiter gilt, dass θ_L eine Modulform von Gewicht $\frac{n}{2}$ zur vollen Modulgruppe ist.*

Beweis: Angenommen die Dimension von L ist nicht durch 8 teilbar. Nehmen wir erstmal an, dass $n \equiv 4 \pmod 8$. Nach der Theta-Transformationsformel erhalten wir dann, dass $\theta_L(-\frac{1}{t}) = (-1)^{\frac{n}{4}} t^{\frac{n}{2}} \theta_L(t) = -t^{\frac{n}{2}} \theta_L(t)$, da $L = L^\#$ und $\det(L) = 1$. Da L gerade ist, ist L invariant unter der Matrix T. Damit erhalten wir aus der vorhergehenden Gleichheit, dass $\theta_L((ST)t) = -t^{\frac{n}{2}} \theta_L(t)$. Damit erhalten wir, dass

$$\begin{aligned} \theta_L((ST)^3 t) &= \theta_L((ST)(ST)^2 t) = -((ST)^2 t)^{\frac{n}{2}} \theta_L((ST)^2 t) = -((ST)^2 t)^{\frac{n}{2}} ((ST)t)^{\frac{n}{2}} t^{\frac{n}{2}} \theta_L(t) \\ &= -(-(t+1)\frac{-1}{t+1} t)^{\frac{n}{2}} \theta_L(t) = -t^{\frac{n}{2}} \theta_L(t). \end{aligned}$$

Andererseits ist aber $(ST)^3 = -\mathrm{I}_2$ und damit $\theta_L((ST)^3 t) = \theta_L(t)$. Dies leitet einen Widerspruch. Angenommen es gilt nicht, dass $n \equiv 4 \pmod 8$. Dann können wir jedoch L durch $L \perp L$ oder $L \perp L \perp L \perp L$, denn $\theta_{L\perp L}(z) = \theta_L \cdot \theta_L = \theta_L^2$ und $\theta_{L\perp L\perp L\perp L}(z) = \theta_L^4$, das heißt das Ersetzen würde genauso einen Widerspruch liefern. Der zweite Teil der Aussage folgt, da $n \equiv 0 \pmod 8$, direkt mit der Theta-Transformationsformel. □

Satz 2.4.12 *Sei L ein unimodulares Gitter der Dimension n. Dann ist θ_L eine Modulform vom Gewicht $\frac{n}{2}$ zur Gruppe $\Theta := \langle S, T^2 \rangle$, und es gilt*

$$\theta_L \in \mathbb{C}[\theta_{\mathbb{Z}}, \theta_{\mathrm{E}_8}].$$

Beweis: Für den Beweis dieses Satzes verweisen wir auf [CS99, Kapitel 7, Satz 7]. □

Folgerung 2.4.13 *Da die Gitter E_8 und $\mathbb{Z}^n$ unimodular sind, sind nach Satz 2.4.12 θ_{E_8} und $\theta_{\mathbb{Z}}$ Modulformen von Gewicht 4 bzw. $\frac{n}{2}$. Ist also L ein unimodulares Gitter, so gilt nach Satz 2.4.12, dass für gewisse $a_i \in \mathbb{C}$*

$$\theta_L = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{8} \rfloor} a_j \theta_{\mathbb{Z}}^{n-8j} \theta_{\mathrm{E}_8}^j.$$

2.4.2 Modulformen zu Kongruenzgruppen

Es bezeichne Γ die $\mathrm{SL}(2;\mathbb{Z})$. Sei $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, dann ist

$$\Gamma[N] := \{M \in \Gamma \mid M \equiv E \pmod N\}.$$

und

$$\Gamma_0[N] := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \mid c \equiv 0 \pmod N \right\}.$$

Satz 2.4.14 *Sei L ein gerades Gitter der Dimension $2k$ von Stufe N, so ist*

$$\theta_L \in \mathcal{M}_k(\Gamma_0(N), \chi_k),$$

wobei $\chi_k(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) := \left(\frac{(-1)^k \det(L)}{d}\right) \in \{\pm 1\}$, definiert ist durch das Jacobi-Legendre-Symbol (siehe Definition 3.2.30).

Beweis: Für den Beweis dieses Satzes verweisen wir auf [Ebe94, Theorem 3.1]. □

Für $m \in \mathbb{N}$ heißen die Matrizen

$$W_m := m^{-1/2} \begin{pmatrix} ma & b \\ mc & d \end{pmatrix},$$

Atkin-Lehner Involutionen. Es sei

$$\Gamma^*[N] := \langle \Gamma_0(N), W_m \mid m || N \rangle.$$

Weiter sei

Satz 2.4.15 *Seien $N \in \mathcal{N}$ und L ein gerades stark N-modulares Gitter der Dimension $2k$. Dann ist*

$$\theta_L \in \mathcal{M}_k(\Gamma^*[N], \overline{\chi_k}),$$

wobei $\overline{\chi_k}$ geeignet gewählt ist, siehe [Que97, Satz 2].

Beweis: Für den Beweis dieses Satzes verweisen wir auf [Que97]. □

Sei $\sigma_0(N) := \sum_{d|N} 1$ und $\sigma_1(N) := \sum_{d|N} d$.

Satz 2.4.16 *Seien $N \in \mathcal{N}$ und L ein gerades stark N-modulares Gitter. Es gilt, dass*

$$\min(L) \leq 2\lfloor \frac{n\sigma_1(N)}{24\sigma_0(N)} \rfloor + 2.$$

Beweis: Für den Beweis dieses Satzes verweisen wir auf [Que97]. □

In Kapitel 4 werden die Theta-Reihen von ungeraden stark N-modularen Gitter behandelt. Weiter werden wir in Kapitel 4 sehen, dass man für ungerade stark N-modulare Gitter die gleiche Schranke an das Minimum erhält, wie für die geraden Gitter.

3 Das Geschlecht von Gittern

Dieses Kapitel enthält zwei Themenschwerpunkte. In 3.1 werden Begriffe aus der Theorie der quadratischen Formen eingeführt. Quadratische Moduln über endlichen Körpern, sowie die Wittgruppe von endlichen Körpern, werden untersucht. Es werden Sätze behandelt, die es ermöglichen für quadratfreies N zu zeigen, dass ungerade stark N-modulare Gitter, die rational äquivalent zu C_N^k sind, im Geschlecht von C_N^k liegen. Dies wird zum Ende des Kapitels gezeigt. Im Abschnitt 3.2 wird der Begriff des Geschlechts eingeführt und eine Methode, die sogenannte Knesersche Nachbarschaftsmethode, beschrieben, die es erlaubt, das Spinorgeschlecht eines Gitters zu berechenen.

3.1 Quadratische Formen

3.1.1 Grundlagen

In diesem Abschnitt führen wir Begriffe aus der Theorie der quadratischen Formen ein.
Sei A ein kommutativer Ring mit 1.

Definition 3.1.1

(a) Sei E ein A-Modul. Eine Abbildung $q : E \to A$ heißt **quadratische Form**, wenn für alle $x,y \in E$ und $a \in A$ gilt, dass

(i) $q(ax) = a^2 q(x)$,

(ii) $b_q : E \times E \to A, \quad b_q(x,y) := q(x+y) - q(x) - q(y)$ ist symmetrische Bilinearform.

Das Paar (E,q) heißt dann **quadratischer A-Modul**.

(b) Eine Abbildung $\varphi : (E,q) \to (E',q')$ heißt **Isometrie**, wenn φ ein injektiver A-Modulhomomorphismus ist, mit $q'(\varphi(x)) = q(x)$ für alle $x \in E$.

(c) Zwei quadratische Moduln (E,q) und (E',q') heißen **isometrisch**, wenn eine bijektive Isometrie von (E,q) nach (E',q') existiert. Wir schreiben diesenfalls $(E,q) \cong (E',q')$.

(d) Seien (E,q), (E',q') quadratische A-Moduln. Dann heißt

$$(E,q) \perp (E',q') := (E \oplus E', q \perp q')$$

die **orthogonale Summe** von E und E', wobei $(q \perp q')(x+x') := q(x)+q'(x')$.

Beispiel 3.1.2 Sei $b : E \times E \to A$ eine symmetrische Bilinearform. Dann ist

$$q_b : E \to A, \quad q_b(x) := b(x,x)$$

eine quadratische Form auf E. Weiter ist

$$b_{q_b}(x,y) = q_b(x+y) - q_b(x) - q_b(y) = b(x+y,x+y) - b(x,x) - b(y,y) = 2b(x,y).$$

Bemerkung 3.1.3 Ist $2 \in A^*$, so sind die Begriffe quadratische Form und symmetrische Bilinearform äquivalent: Sei $b : E \times E \to A$ symmetrische Bilinearform.
Es ist $Q_b : E \to A,\ Q_b(x) = \frac{1}{2}b(x,x)$ für alle $x \in E$ eine quadratische Form mit $b_{Q_b} = b$ und für eine quadratische Form $q : E \to A$ ist $Q_{b_q} = q$.

Definition 3.1.4

(a) Ein quadratischer A-Modul (E,q) heißt **regulär**, wenn (E,b_q) regulär ist.

(b) Ein Teilmodul $F \leq E$ heißt **singulär**, falls $q(F) = \{0\}$.

(c) Es heißt $x \in E$ **singulär** , wenn $q(x) = 0$.

Beispiel 3.1.5 Seien $E = \bigoplus_{i=1}^n Ae_i$ ein freier A-Modul mit A-Basis $\underline{e} = (e_1, \cdots, e_n)$ und $q : E \to A$ eine quadratische Form. Es ist

$$q(\textstyle\sum_{i=1}^n x_i e_i) = \sum_{i=1}^n x_i^2 q(e_i) + \sum_{i<j} x_i x_j b_q(e_i,e_j) = (x_1,...,x_n) \cdot Q \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

$$\text{mit} \quad Q = \begin{pmatrix} q(e_1) & & & \\ 0 & \ddots & & b_q(e_i,e_j) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & q(e_n) \end{pmatrix} \in A^{n\times n}.$$

$$\text{Schreibweise:} \quad (E,q) = \begin{bmatrix} q(e_1) & & & \\ & \ddots & & b_q(e_i,e_j) \\ & & \ddots & \\ & & & q(e_n) \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} : [q(e_1), \cdots, q(e_n)],$$

falls $b_q(e_i,e_j) = 0\ \ \forall i \neq j$. Ist 2 kein Nullteiler, so setze $b_{ij} := b_q(e_i,e_j)$.

$$\text{Schreibweise:} \quad (E,q) = \left\langle \begin{matrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & & b_{nn} \end{matrix} \right\rangle = \langle \underline{e}\ b\ \underline{e} \rangle$$

Satz 3.1.6 *Sei $E = \bigoplus_{i=1}^{n} Ae_i$ ein freier Modul von ungeradem Rang n. Ist $2 \notin A^*$ und $q : E \to A$ eine qudratische Form, dann ist (E,q) nicht regulär.*

Beweis: Wir zeigen, dass ein Polynom $P_n \in \mathbb{Z}\left[x_i, y_{ij}\right]$ existiert mit $\det(B) = 2P_n(a_i, b_{ij})$.
Sei $B := \underline{e}\, b\, \underline{e} \in A_{Sym}^{n\times n}$ mit $a_i := b_{ii} = 2q(e_i)$ und $b_{ij} = b_q(e_i, e_j)$. Nach der Leibniz Regel gilt, dass $\det(B) = \sum_{\pi\in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \prod_{i=1}^{n} B_{i,\pi(i)}$.
Wir definieren $S := \left\{\pi \in S_n \mid \pi = \pi^{-1}\right\}$ und $T := \left\{\pi \in S_n \mid \pi \neq \pi^{-1}\right\} := X \dot\cup \left\{\pi^{-1} \mid \pi \in X\right\}$.
Für $\pi \in X$ gilt, dass $\prod_{i=1}^{n} B_{i,\pi(i)} = \prod_{i=1}^{n} B_{\pi(i),i} = \prod_{i=1}^{n} B_{j,\pi^{-1}(j)}$. Ist $\pi \in S$, so folgt, dass $\pi^2 = 1$. Daraus folgt, dass π ein Produkt von disjunkten Transpositionen ist. Wir erhalten, dass ein $i \in \{1, \cdots, n\}$ existiert mit $\pi(i) = 1$. Somit taucht in dem Produkt $\prod_{i=1}^{n} B_{i,\pi(i)}$ mindestens ein Faktor $B_{ii} = 2a_i$ auf. Insgesamt erhalten wir also, dass

$$\det(B) = 2 \cdot \sum_{\pi\in X} \operatorname{sgn}(\pi) \prod_{i=1}^{n} B_{i,\pi(i)} + \sum_{\pi\in S} \operatorname{sgn}(\pi) \prod_{i=1}^{n} B_{i,\pi(i)} = 2 \cdot P_n(a_i, b_{ij})$$

.

Da (E,q) regulär ist, folgt, dass (E,b_q) regulär ist und somit ist $\det(\underline{e}\, b\, \underline{e}) \in A^*$. Da $2 \notin A^*$ folgt die Behauptung. □

Definition 3.1.7 Seien $E = \bigoplus_{i=1}^{n} Ae_i$ ein freier Modul von ungeradem Rang n und $P_n \in \mathbb{Z}\left[x_i, y_{ij}\right]$ wie in Satz 3.1.6. Sei $d'(\underline{e}) := P_n(q(e_i), b_q(e_i, e_j))$. (E,q) heißt **halbregulär**, falls $d'(\underline{e}) \in A^*$ für eine Basis $\underline{e}$ von E.

Satz 3.1.8 *Seien A ein Körper und (E,q) ein endlichdimensionaler quadratischer A-Vektorraum, dann existieren $E_1, \cdots, E_r,\ F_1, \cdots, F_s,\ G \leq E$ mit*
$\dim(E_i) = 2$ *und* $(E_i, q_{|E_i})$ *ist regulär für alle* $i = 1, \cdots, r$,
$\dim(F_i) = 1$ *und* $(F_i, q_{|F_i})$ *ist halbregulär für alle* $i = 1, \cdots, s$ *und* $q(G) = \{0\}$, *so dass gilt*

$$E = E_1 \perp \cdots \perp E_r \perp F_1 \perp \cdots \perp F_s \perp G.$$

Ist $\operatorname{char}(A) \neq 2$, *so kann* $r = 0$ *gewählt werden und* (E,q) *ist regulär genau dann wenn* $G = \{0\}$.
Ist $\operatorname{char}(A) = 2$, *so kann* $s \leq \left[A : A^2\right]$ *gewählt werden und es gilt:* (E,q) *ist regulär genau dann wenn* $s = 0$ *und* $G = \{0\}$. (E,q) *ist halbregulär genau dann wenn* $s = 1$ *und* $G = \{0\}$.

Beweis:

1. Fall: Ist $\operatorname{char}(A) \neq 2$, dann folgt die Behauptung mit 2.1.7 und 2.1.9.

2. Fall: Ist $\mathrm{char}(A) = 2$, dann kann man (E,q) nach 2.1.7 zerlegen, so dass

$$E = E_1 \perp \cdots \perp E_r \perp F,$$

wobei (E_i, q_i) regulär sind und Dimension 1 oder 2 haben und $F = E^{\perp}$. Mit 3.1.6 erhalten wir dann, dass $\dim(E_i, q_i) = 2$. Es bleibt noch F zu zerlegen. Da $F = E^{\perp}$, ist $b_q(F,F) = \{0\}$ und damit $0 = b_q(x,y) = q(x+y) - q(x) - q(y)$. Daraus folgt, dass $q(x+y) = q(x) + q(y)$. Die Abbildung $q : (F,+) \to (A,+)$ ist also ein Gruppenhomormophismus. Weiter ist $q(ax) = a^2 x$ und deswegen ist $G := \{x \in F \mid q(x) = 0\}$ ein A-Teilraum von F. Außerdem ist $\mathrm{Bild}(q_{|F}) \leq (A,+)$ ein A^2-Teilraum von A. Es gilt $\dim_{A^2}(q(F)) =: s \leq \left[A : A^2\right] = \dim_{A^2}(A)$. Sei $(a_1, \cdots, a_s)$ eine A^2 Basis von $q(F)$, $f_i \in F$ mit $q(f_i) = a_i$. Wir werden jetzt zeigen, dass

$$F = \langle f_1 \rangle \perp \cdots \perp \langle f_1 \rangle \perp G.$$

Seien $f \in F$ und $q(f) = \sum_{i=1}^{s} t_i^2 q(f_i)$, so ist $q(f - \sum_{i=}^{s} t_i f_i) = 0$ und deswegen ist $f - \sum_{i=1}^{s} t_i f_i \in G$. Daraus folgt, dass $F = \langle f_1, \cdots, f_s, G \rangle$. Zeige nun noch die lineare Unabhängigkeit von $(f_1, \cdots, f_s, G)$. Sei $\sum t_i f_i \in G$, dann ist $0 = q(\sum_{i=1}^{s}) = \sum_{i=1}^{s} t_i^2 q(f_i)$ und daraus folgt, dass $t_i^2 = 0$ für alle i, da die $q(f_i)$ linear unabhängig über A^2 sind. Daraus folgt, dass $t_i = 0$ für alle i und somit erhalten wir die linear Unabhängigkeit von $(f_1, \cdots, f_s, G)$. □

Definition 3.1.9 Sei E ein quadratischer A-Modul. Es heißt $\mathbb{H}(E) := (E \oplus E^*, q_E)$ der zu E gehörende **hyperbolische Modul**, wobei $q_E(x + x^*) := x^*(x)$ und $b_{q_G}(x + x^*, y + y^*) = x^*(y) + y^*(x)$ die zugehörige Bilinearform ist. Ist $G = \bigoplus_{i=1}^{n} Ae_i$ frei mit Basis $\underline{e}$, so ist $\underline{f} = (\underline{e}, \underline{e^*})$ eine Basis von $G \oplus G^*$ und

$$\underline{f}\, b_{q_G}\, \underline{f} = \begin{pmatrix} 0 & Id_n \\ Id_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung 3.1.10 Sei $2 \in A^*$. Ist (E,q) ein regulärer quadratischer A-Modul, so ist $(E \perp -E, q \perp -q)$ ein hyperbolischer Modul.

Beweis: Sei $\underline{e}$ ein Basis von E, $G :=_{\underline{e}} b_{q_E \underline{e}}$ und $X := \frac{1}{2} G^{-1}$, dann gilt

$$\begin{pmatrix} E_n & E_n \\ X & -X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_n & X \\ E_n & -X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ E_n & 0 \end{pmatrix}$$

und somit folgt direkt die Behauptung. □

Satz 3.1.11 *Sei (E,q) ein freier quadratischer Modul, dann existiert eine Isometrie $\phi : (E,q) \to \mathbb{H}(E)$, so dass $\phi(E)^{\perp} \cong (E,-q)$. Ist (E,q) regulär, so ist $\mathbb{H}(E) = \phi(E) \perp \phi(E)^{\perp} \cong (E,q) \perp (E,-q)$.*

Beweis: Sei $\underline{e} := (e_1, ..., e_n)$ eine Basis von E und seien $a_i := q(e_i)$, $b_{ij} := b_q(e_i, e_j)$, $f_i = \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} e_j^* + a_i e_i^*$. Definiere $\phi : E \to \mathbb{H}(E)$, $e_i \mapsto (e_i, f_i)$. Offensichtlich ist ϕ injektiv. Da $q(\phi(e_i)) = f_i(e_i) = a_i$ und $b_q(\phi(e_i), \phi(e_j)) = f_i(e_j) + f_j(e_i) = b_{ij}$, ist ϕ eine Isometrie.
Zeigen wir nun, dass $\phi(E)^\perp \cong (E, -q)$. Sei $g_j := (e_j, -\sum_{i=j+1}^{n} b_{ij} e_i^* - a_j e_j^*)$, so ist $g_j \in \phi(E)^\perp$, denn:

$$b_q(g_j, \phi(e_i)) = f_i(e_j) - \sum_{k=j+1}^{n} b_{kj} e_k^*(e_i) - a_j e_j^*(e_i) = \left\{ \begin{array}{cc} a_i - a_i, & \text{falls } i = j \\ b_{ij} - b_{ij}, & \text{falls } i > j \\ 0 - 0, & \text{falls } i < j \end{array} \right\} = 0$$

Da außerdem $q(g_j) = -a_j$ und $b_q(g_i, g_j) = b_{ij}$ erhalten wir, dass
$\phi(E)^\perp =< g_1, ..., g_n > \cong (E, -q)$.
Ist E regulär, so ist $\phi(E) \leq \mathbb{H}(E)$ regulär und nach Satz 2.1.5 ist $\mathbb{H}(E) = \phi(E) \perp \phi(E)^\perp$. Insgesamt folgt $\mathbb{H}(E) = \phi(E) \perp \phi(E)^\perp \cong (E, q) \perp (E, -q)$. □

Definition 3.1.12

(a) Sei E ein quadratischer A-Modul. Der Teilmodul $F \leq E$ heißt **primitiv**, wenn $E = F \oplus G$ für ein geeignetes $G \leq E$.

(b) Sei (E, b) ein bilinearer A-Modul. Der Teilmodul $F \leq E$ heißt **scharf primitiv**, falls F ein endlich erzeugter freier A-Modul ist und $b_F(E) = F^*$, mit $b_F : E \to F^*$, $x \mapsto (y \mapsto b(x,y))$.

Satz 3.1.13 *Sei (E, q) ein quadratischer A-Modul und $F \leq E$ ein scharf primitiver singulärer A-Teilnodul. Dann gibt es einen Teilmodul $H \leq E$ mit $F \leq H$ und $H \cong \mathbb{H}(F)$. Ist $(f_1, \cdots, f_m)$ eine Basis von F, so läßt sich diese zu einer Basis $(f_1, \cdots, f_m, g_1, \cdots, g_m)$ von H ergänzen mit $b_q(f_i, g_j) = \delta_{ij}$ und $q(\langle g_1, \cdots, g_m \rangle) = \{0\}$.*

Beweis: Sei $(f_1, \cdots, f_m)$ Basis von F, $e_1, \cdots, e_m \in E$ mit $b_q(e_i, f_j) = \delta_{ij}$. Setze $H := \langle f_1, \cdots, f_m, e_1, \cdots, e_m \rangle \cong \begin{bmatrix} 0 & Id_m \\ * & \end{bmatrix}$. Setze $g_1 := e_1 - q(e_1) f_1$, dann folgt, dass $b_q(g_1, f_j) = b_q(e_1, f_j)$ für alle j, da F singulär ist. Es ist $q(g_1) = q(e_1) + q(e_1)^2 q(f_1) - b_q(e_1, q(e_1) f_1) = 0$.
Führe auf diese Art die Konstruktion fort, mit

$$g_j := e_j - \sum_{i=1}^{j-1} b_q(g_i, e_j) f_i - q(e_j) f_j.$$

Dann ist $H = \langle f_1, \cdots, f_m, g_1, \cdots, g_m \rangle \cong \begin{bmatrix} 0 & Id_m \\ & 0 \end{bmatrix}$ und es folgt die Behauptung. □

Beispiel 3.1.14 Seien $A = \mathbb{F}_l$, $\text{char}(A) = p$, $l = p^f$ und $E = \mathbb{F}_{q^2} = \mathbb{F}_q \cdot 1 \oplus \mathbb{F}_q \cdot \alpha$,
wo $\mathbb{F}_{l^2} = \mathbb{F}_l[\alpha]$. Weiter sei $f : E \to \mathbb{F}_l$ die Normform, d.h. $N : \mathbb{F}_{l^2} \to \mathbb{F}_l$, $N(x) = x \cdot x^l$. Wegen $\text{Gal}(\mathbb{F}_{l^2}/\mathbb{F}_l) = \langle x \mapsto x^l \rangle$ gilt für alle $a \in \mathbb{F}_l$, dass $N(ax) = a^2 N(x)$ für alle $x \in F_{l^2}$. Es ist b_N :

$\mathbb{F}_{l^2} \times \mathbb{F}_{l^2} \to \mathbb{F}_l$, $b_N(x,y) = N(x+y) - N(x) - N(y) = (x+y)(x+y)^l - xx^l - yy^l = xy^l + yx^l = xy^l + (xy^l)^l = Spur_{\mathbb{F}_{l^2}/\mathbb{F}_l}(xy^l)$. Da dies eine bilineare Abbildung ist, folgt dass $(E,f) = (\mathbb{F}_{l^2}, N)$ ein quadratischer Raum ist. Weiter ist $(\mathbb{F}_{l^2}, N)$ anisotrop und regulär. Zeigen wir erstmal, dass $(\mathbb{F}_{l^2}, N)$ anisotrop ist. Ist $N(x) = x^{l+1} = 0$, so folgt direkt, dass $x = 0$, da $\mathbb{F}_l$ ein Körper ist. Da $2 = \dim_{\mathbb{F}_l}(\mathbb{F}_{l^2}) = \dim_{\mathbb{F}_l}(\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_l}(\mathbb{F}_{l^2}, \mathbb{F}_l))$, genügt es um die Regularität nachzuprüfen, zu zeigen, dass $(b_N)_{\mathbb{F}_{l^2}}$ injektiv ist, das heißt
$\mathrm{Kern}((b_N)_{\mathbb{F}_{l^2}}) = \{x \in \mathbb{F}_{l^2} \mid xy^l + yx^l = 0 \ \forall\, x \in \mathbb{F}_{l^2}\} = \{0\}$. Angenommen es existiert ein $0 \neq x \in \mathrm{Kern}((b_N)_{\mathbb{F}_{l^2}})$, dann ist $P_x(y) := y^l + x^{l-1}y = 0$ für alle $y \in \mathbb{F}_{l^2}$. Dann hat P_x genau l^2 Nullstellen. Dies leitet einen Widerspruch ein, da P_x ein Polynom von Grad l ist.

Definition 3.1.15 (E,q) heißt **anisotrop**, wenn für alle $x \in E$, mit $x \neq 0$, gilt $q(x) \neq 0$.

Beispiel 3.1.16 Quadratische Formen über endlichen Körpern
Seien $A = \mathbb{F}_l$, $\mathrm{char}(A) = p$, $l = p^f$ und (E,q) ein quadratischer $\mathbb{F}_l$-Vektorraum.

(a) Es sei $\dim(E) = 1$. Dann ist $E = \langle e \rangle$. Sei $q(e) =: a$, dann definieren wir $E_a := (E,q)$. Es folgt, dass $q(E_a) = a \cdot (A^*)^2 \cup \{0\}$. Angenommen, dass $E_a \cong E_b$, dann ist $a \cdot (A^*)^2 = b \cdot (A^*)^2$. Da $A^* = \mathrm{C}_{l-1}$, erhalten wir, dass $\left[A^* : (A^*)^2\right] = \begin{cases} 2, & p \neq 2 \\ 1, & p = 2 \end{cases}$. Daraus folgt, dass $\begin{cases} A = \{0\} \dot\cup (A^*)^2 \dot\cup \varepsilon(A^*)^2, & \text{falls } p \neq 2 \\ A = \{0\} \cup (A^*)^2, & p = 2 \end{cases}$.
E_0, E_1, E_ε (bzw. E_0, E_1) vertreten die Isometrieklassen der quadratischen A-Modulen der Dimension 1 für $p \neq 2$ (bzw. $p = 2$). Dabei sind E_1, E_ε halbregulär.

(b) Es seien $\dim(E) = 2$ und (E,q) regulär. Wir zeigen, dass (E,q) entweder isometrisch zu einem hyperbolischen Modul oder zu $(\mathbb{F}_{l^2}, N)$ ist.

(i) Es sei (E,q) nicht anisotrop, d.h. es existiert $0 \neq x \in E$ mit $q(x) = 0$.
Definiere $F := \langle x \rangle$. Dann ist F ein primitiver Teilmodul von E, das heißt $E = F \oplus G$. Wegen $E^\# = F^\# \oplus G^\#$ und weil E regulär ist, folgt, dass $b_E(E) = E^\#$ und somit $b_F(E) = F^\#$. Somit ist F scharf primitiv. Mit 3.1.13 erhalten wir dann, dass ein $H \leq E$ existiert mit der Eigenschaft, dass $F \leq H \cong \mathbb{H}(F)$. Da außerdem $\dim(H) = 2$, erhalten wir, dass $H = E$ und somit $(E,q) \cong \mathbb{H}(F) \cong \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ & 0 \end{bmatrix}$.

(ii) Es sei (E,q) anisotrop.
1. Zeige, dass $q(E) = A$.
Für $\mathrm{char}(A) = 2$ klar, da dort $A^* = (A^*)^2$.
Sei $\mathrm{char}(A) \neq 2$, dann existieren nach Satz 3.1.8 $e_1, e_2 \in E$
mit $(E,q) = Ae_1 \perp Ae_2 \cong E_{t_1} \perp E_{t_2}$, wobei $q(a_1e_1 + a_2e_e) = a_1^2t_1 + a_2^2t_2$.
Sei $a \in A$, zeige dass $a \in q(E)$. Definiere $M_1 := \left\{a_1^2t_1 \mid a_1 \in A\right\}$ und $M_2 := \left\{a - a_2^2t_2 \mid a_2 \in A\right\}$.

Es ist $a \in q(E)$ genau dann, wenn $M_1 \cap M_2 \neq \emptyset$. Es gilt $|M_1| = \frac{l-1}{2} + 1 = \frac{l+1}{2}$ und $|M_2| = \frac{l+1}{2}$. Wegen $q = |A| \leq |M_1| + |M_2| - |M_1 \cap M_2| = (l+1) - |M_1 \cap M_2|$, folgt, dass $|M_1 \cap M_2| \geq 1$ und damit folgt die Behauptung.
2. Zeige, dass $(E,q) \cong (\mathbb{F}_{l^2}, N)$.
Wähle eine Basis (e_1, e_2) von E, mit $q(e_1) = 1$ (möglich, da $q(E) = A$). Dann ist

$$(E,q) = \begin{bmatrix} 1 & c \\ & a \end{bmatrix},$$

$q(x_1e_1 + x_2e_2) = x_1^2 + cx_1x_2 + ax_2^2 \ \forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{F}_l$.
Es ist (E,q) anisotrop. Deswegen folgt, dass das Polynom $q(xe_1 + e_2) =: f(x) = x^2 + cx + a \in \mathbb{F}_l[x]$ keine Nullstelle in F_l hat. Wir erhalten, dass $f(x) \in \mathbb{F}_l[x]$ irreduzibel ist. Sei $\alpha \in F_{l^2}$ mit $f(\alpha) = 0$, dann ist

$$q(x_1e_1 + x_2e_2) = \det\left(\begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & x_2 \\ -ax_2 & cx_2 \end{pmatrix}\right) = N(x_1 + x_2\alpha).$$

Die Abbildung $e_1 \mapsto 1,\ e_2 \mapsto \alpha$ ist eine Isometrie. Also ist (E,q) isomorph zu dem regulären quadratischen Raum $(\mathbb{F}_{l^2}, N)$.

(c) Es sei $\dim(E) \geq 3$. Wir zeigen, dass ein $0 \neq x \in E$ existiert mit $q(x) = 0$.
Nach Satz 3.1.8 gilt, dass $(E,q) = (E_1,q_1) \perp (E_2,q_2) \perp \cdots$ mit $\dim(E_i) = 1$ oder 2.

(i) Sei $\mathrm{char}(\mathbb{F}_l) \neq 2$. Ohne Einschränkung seien alle E_i von Dimension 1, also $(E,q) = [a_1, a_2, a_3, \cdots]$. Ist $a_i = 0$ für ein i, dann ist $x \in \{e_1, e_2, e_3\} \subseteq E$.
Seinen $a_1, a_2, a_3 \neq 0$. Wir definieren $E' := [a_1, a_2]$. Es ist E' anisotrop und hat Dimension 2. Nach (b) existiert $x \in E'$ mit $q(x) = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 = -a_3$ und damit ist $q((x_1, x_2, 1)) = 0$

(ii) Seien $\mathrm{char}(\mathbb{F}_l) = 2$. Es gilt, dass $\dim(E_1) = 1$ und $(E_1, q_{|E_1})$ ist halbregulär oder $\dim(E_1) = 2$ und $(E_1, q_{|E_1})$ ist regulär (sonst existiert $0 \neq x \in E$ mit $q(x) = 0$). In beiden Fällen gilt $q(E_1) = \mathbb{F}_l$. Deswegen existiert ein $x \in E_1$ und $0 \neq y \in E_2$ mit $q(x) = -q(y)$. Da $b_q(x,y) = 0$, ist $q(x+y) = 0$.

(d) Sei (E,q) ein quadratischer $\mathbb{F}_l$-Vektorraum, dann gilt

$$(E,q) = (E_1,q_1) \perp (E_2,q_2) \perp (E_3,q_3)$$

mit $\dim(E_1,q_1) \leq 2$ und (E_1,q_1) ist regulär oder halbdregulär und anisotrop;
(E_2,q_2) ist eine orthogonale Summe von $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ & 0 \end{bmatrix}$ und $q_3(E_3) = \{0\}$:
Ist $\dim(E) \leq 2$, dann ist die Behauptung klar.
Sei $\dim(E) \geq 3$, dann existiert ein $0 \neq x \in E$ mit $q(x) = 0$.
Ist $x \in E^\perp$, dann ergänze (x) zu einer Basis $(x, e_1, \cdots, e_{n-1})$ von E. Dann ist $(E,q) = \langle e_1, \cdots, e_{n-1}\rangle \perp \langle x\rangle$.
Ist $x \notin E^\perp$, so existiert $y \in E$ mit $b_q(x,y) \neq 0$. Dann ist $\langle x,y\rangle$ ein regulärer Raum und nach (b)(i) ist $\left(\langle x,y\rangle, q_{|\langle x,y\rangle}\right) \cong \mathbb{H} \cong \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow E = E' \perp \langle x,y\rangle$ nach Satz 2.1.5.

Folgerung 3.1.17 *Wir können jeden regulären quadratischen $\mathbb{F}_l$-Modul in eine orthogonale Summe von hyperbolischen Ebenen und einem qaudratischen Raum isometisch zu $(\mathbb{F}_{l^2}, N)$, zu $[1]$ oder zu $[\varepsilon]$ zerlegen, wobei $\varepsilon \in \mathbb{F}_l \setminus \mathbb{F}_{l^2}$.*

Definition 3.1.18 Sei (E,q) ein quadratischer A-Modul, dann heißt

$$\textbf{O(E,q)} := \{\phi : E \to E \mid \phi \text{ ist A-Modul Isomorphismus mit } q(\phi(e)) = q(e) \ \forall\, e \in E\}$$

die **orthogonale Gruppe** von (E,q).

Satz 3.1.19 ***Kürzungssatz von Witt*** *Seien A ein Körper und F, G_1, G_2 quadratische Räume. Weiter sei F regulär und es gelte $F \perp G_1 \cong F \perp G_2$. Dann ist $G_1 \cong G_2$.*

Beweis: Für den Beweis dieses Satzes verweisen wir auf [Kne02, Satz(3.1)]. □

Satz 3.1.20 ***Satz von Witt***
Sei (E,q) ein quadratischer Raum über einem Körper A. Seien $F_1, F_2 \leq E$ scharf primitiv und $\varphi : F_1 \to F_2$ ein bijektive Isometrie. Dann gibt es ein $g \in O(E,q)$ mit $g_{|F_1} = \varphi$.

Beweis: Für den Beweis dieses Satzes verweisen wir auf [Kne02, Satz(3.4)]. □

Folgerung 3.1.21 *Sei (E,q) ein quadratischer A-Vektorraum und seien $F_1, F_2 \leq E$ singulär und scharf primitiv mit* $\dim(F_1) = \dim(F_2)$. *Dann existiert ein $g \in O(E,q)$ mit $g(F_1) = F_2$.*

Beweis: Es ist $q(F_1) = q(F_2) = \{0\}$, d.h. jeder Isomorphimus $\varphi : F_1 \to F_2$ ist eine Isometrie und nach Satz 3.1.20 läßt sich φ fortsetzen zu $g \in O(E,q)$. □

Folgerung 3.1.22 *Sei (E,q) ein quadratischer A-Vektorraum und seien $F_1, F_2 \leq E$ maximal, singulär und scharf primitiv. Dann folgt, dass* $\dim(F_1) = \dim(F_2)$.

Beweis: Sei ohne Einschränkung sei $\dim(F_1) \geq \dim(F_2)$. Dann existiert $F_1' \leq F_1$ mit $\dim(F_1') = \dim(F_2)$. Offensichtlich ist F_1' singulär und scharf primitiv. Nach 3.1.21 existiert ein $g \in O(E,q)$ mit $g(F_1') = F_2$. Damit folgt, dass $F_2 = g(F_1') \subseteq g(F_1)$. Da $g(F_1)$ singulärer und scharf primitiver Teilraum von E ist, folgt wegen der Maximalität von F_2, dass $g(F_1) = F_2$ und somit folgt die Behauptung. □

Definition 3.1.23 Sei (E,q) endlich erzeugter quadratischer A-Vektorraum, so heißt die Dimension der maximalen singulären scharf primitiven Unterräume der **Witt-Index** $\mathrm{ind}(E)$ von E. Nach 3.1.22 ist der Witt-Index wohldefiniert.

Folgerung 3.1.24 *Sei (E,q) ein quadratischer A-Modul mit* $\mathrm{ind}(E,q) = n$*. Dann ist* $(E,q) = (F, q_{|F}) \perp \mathbb{H}(A^n)$*, mit* $\mathrm{ind}(F, q_{|F}) = 0$.

Beweis: Sei $G \leq (E,q)$ ein maximaler, singulärer, scharf primitiver Teilraum. Ist $\dim(G) = n$ so existiert nach Satz 3.1.13 ein $H \cong \mathbb{H}(G) \leq (E,q)$. Da H regulär ist, folgt, dass $(E,q) = H^{\perp} \perp H$. Der Modul $H^{\perp}$ enthält keinen scharf primitiven singulären Teilraum ungleich $\{0\}$. □

Folgerung 3.1.25 *Sei (E,q) ein regulärer quadratischer A-Vektorraum,* $\mathrm{ind}(E) = n$*. Dann gilt nach 3.1.24 $(E,q) = (F, q_{|F}) \perp \mathbb{H}(A^n)$ mit $(F, q_{|F})$ anisotrop. $(F, q_{|F})$ heißt* ***anisotroper Kern*** *und ist nach dem 3.1.19 bis auf Isometrie eindeutig bestimmt.*

Beispiel 3.1.26 Sei $A = \mathbb{F}_l$, wobei l eine Primzahlpotenz ist und sei (E,q) ein regulärer quadratischer Raum über A. Weiter sei $\varepsilon \in \mathbb{F}_l^* \setminus (\mathbb{F}_l^*)^2$.
Ist $\dim(E) = 2n$, so ist

$$(E,q) \cong \begin{cases} \perp^n \mathbb{H}(A) \\ (F_{l^2}, N) \perp \perp^{n-1} \mathbb{H}(A) \end{cases} \quad \text{und entsprechend} \quad \det((E,q)) = \begin{cases} (-1)^n \\ (-1)^n \varepsilon \end{cases} .$$

Dass $\det((F_{l^2}, N) \perp \perp^{n-1} \mathbb{H}(A)) = (-1)^n \varepsilon$, wird in Beweis des folgenden Satzes gezeigt.
Ist $\dim(E) = 2n+1$, so ist

$$(E,q) \cong \begin{cases} [1] \perp \perp^n \mathbb{H}(A) \\ [\varepsilon] \perp \perp^n \mathbb{H}(A) \end{cases} \quad \text{und entsprechend} \quad \det((E,q)) = \begin{cases} (-1)^n \\ (-1)^n \varepsilon \end{cases} .$$

Satz 3.1.27 *Sei E ein regulärer quadratischer $\mathbb{F}_l$ Modul und l eine Primzahlpotenz einer Primzahl größer als 2, dann ist (E,q) eindeutig bestimmt durch Dimension und Determinante.*

Beweis: Die Behauptung folgt aus dem vorhergehendem Beispiel. Ist die Dimension ungerade, so ist die Behauptung direkt klar. Ist die Dimension gerade, so ist noch zu zeigen, dass $\det(F_{l^2}) = -\varepsilon$, wobei ε kein Quadrat in $\mathbb{F}_l$ ist:
Wegen $b_q(1,1) = 2$, $b_q(\alpha,\alpha) = 2\alpha^{l+1}$ und $b_q(1,\alpha) = \alpha^l + \alpha$ folgt, dass $\det(F_{l^2}) = -(\alpha - \alpha^l)^2$. Es ist $(\alpha - \alpha^l)^2$ genau dann kein Quadrat in $\mathbb{F}_l$, wenn $(\alpha - \alpha^l) \notin \mathbb{F}_l$. Da $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{l^2}/\mathbb{F}_l) =< x \mapsto x^l >$, ist $(\alpha - \alpha^l)^2 \notin \mathbb{F}_l^2$ genau dann wenn $(\alpha - \alpha^l)^l \neq (\alpha - \alpha^l)$. Da aber $(\alpha - \alpha^l)^l = -(\alpha - \alpha^l)$, folgt die Behauptung. Ist die Dimension von E gerade, so hat die Determinante entweder die Form $(-1)^n$ oder $(-1)^n \varepsilon$. □

3.1.2 Die Wittgruppe

In diesem Abschnitt sei A Hauptidealbereich und jeder quadratische A-Modul sei frei und endlich erzeugt über A.

Definition 3.1.28

(a) Zwei quadratische Modulen (E_1, q_1) und (E_2, q_2) heißen **(Witt -) äquivalent**, falls es hyperbolische Moduln H_1 und H_2 gibt, so dass

$$E_1 \perp H_1 \cong E_2 \perp H_2.$$

Schreibe diesenfalls $E_1 \sim E_2$ und $[E_1] := \{E \mid E \sim E_1\}$.
Es ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation. Definiere **W(A)** $:= \{[E] \mid E \text{ ist regulärer A-Modul}\}$.

(b) Seien E_1, E_2 reguläre quadratische Moduln. Mit $[E_1] + [E_2] := [E_1 \perp E_2]$ wird $(W(A), +)$ zu einer Gruppe, der sogenannten **Wittgruppe**. Das inverse Element zu (E, q) ist nach Satz 3.1.11 $(E, -q)$.

Beispiel 3.1.29 Sei l eine Primzahlpotenz. Wir bestimmen $W(\mathbb{F}_l)$.
Nach 3.1.17 kann jeder reguläre quadratische $\mathbb{F}_l$-Modul in eine orthogonale Summe von hyperbolischen Ebenen und einem qaudratischen Raum isometisch zu $(\mathbb{F}_{l^2}, N)$, zu $[1]$ oder zu $[\varepsilon]$ zerlegen, wobei $\varepsilon \in \mathbb{F}_l \setminus \mathbb{F}_{l^2}$. Die Elemente der Wittgruppe $W(\mathbb{F}_l)$ werden also von letztgenannten Räumen repräsentiert. Da der anisotrope Kern eines regulären Raumes nach 3.1.25 bis auf Isometrie eindeutig ist, repräsentieren die genannten Räume auch verschiedene Elemente in $W(\mathbb{F}_l)$, falls sie darin liegen. Es ist $[[\,]] = 0$ in $W(\mathbb{F}_l)$.

Fall $l \equiv_2 0$: Es ist $W(\mathbb{F}_l) = \{0, [F_{l^2}]\}$, da eindimensionale quadratische Räume nicht regulär sind. Daraus folgt, dass $W(F_l) \cong \mathrm{C}_2$.

Fall $l \equiv_2 1$: Wegen $\mathbb{F}_l^* = \mathrm{C}_{l-1}$ können wir ein $\varepsilon \in F_l \setminus F_l^2$ wählen. Es ist also $W(F_l) = \{0, [1], [\varepsilon], [\mathbb{F}_{l^2}]\}$.

Es sind also noch die Fälle $W(F_l) \cong \mathrm{C}_2 \times \mathrm{C}_2$ oder $W(F_l) \cong \mathrm{C}_4$ zu unterscheiden. Gibt es mehr als ein Element von Ordnung 2, so liegt erste Fall vor.
Es sind $[1] \perp [1]$ und $[\varepsilon] \perp [\varepsilon]$ anisotrop genau dann, wenn das Polynom $x^2 + 1 \in F_l[l]$ irreduzibel ist (seien $\alpha, \beta \in \mathbb{F}_l$. Es ist $0 = q(\alpha e_1 + \beta e_2) = \alpha^2 + \beta^2$ und daraus folgt, dass $(\frac{\alpha}{\beta})^2 + 1 = 0$). Eine Nullstelle des Polynoms ist ein Element der Ordnung 4 in $\mathbb{F}_l^* \cong \mathrm{C}_{l-1}$.

Unterfall $l \equiv_4 1$: Es sind weder $[1] \perp [1]$ noch $[\varepsilon] \perp [\varepsilon]$ anisotrop, und folglich isometrisch zu einer hyperbolischen Ebene. Also ist $W(\mathbb{F}_l) \cong \mathrm{C}_2 \times \mathrm{C}_2$.

Unterfall $l \equiv_4 3$: Es sind sowohl $[1] \perp [1]$ als auch $[\varepsilon] \perp [\varepsilon]$ anisotrop. Also ist $W(F_l) \cong \mathrm{C}_4$.

Lemma 3.1.30 *Sei $p \in \mathbb{P}$ mit $p > 2$. Weiter sei $\phi = \langle a_1, \cdots, a_m \rangle \perp p\langle b_1, \cdots, b_n \rangle$ eine quadratische Form über $\mathbb{Q}_p$, wobei $a_i, b_j \in \mathbb{Z}_p^*$ und V der zugehörige quadratische Modul. Die Abbildungen $\overline{\phi}_1 = \langle \overline{a}_1, \cdots, \overline{a}_m \rangle$ und $\overline{\phi}_2 = \langle \overline{b}_1, \cdots, \overline{b}_m \rangle$ seien die zugehörigen quadratischen Formen über $\mathbb{F}_p$. Es stellt ϕ Null dar, d.h. es existiert $0 \neq v \in V$ mit $\phi(v) = 0$, genau dann, wenn $\overline{\phi}_1$ oder $\overline{\phi}_2$ Null darstellen.*

Beweis:

$\Rightarrow$ Es existiert ein $0 \neq v = (x_1, \cdots, x_m, y_1, \cdots, y_n) \in V$ mit $\phi(v) = \sum_{i=1}^{m} a_i x_i^2 + p \sum_{j=1}^{n} b_j y_j^2 = 0$.

Ohne Einschränkung seien $x_i, y_j \in \mathbb{Z}_p$ und nicht alle sind durch p teilbar.

Es folgt, dass $\sum_{i=1}^{m} a_i x_i^2 \equiv 0 \mod p$, falls nicht alle x_i durch p teilbar sind.

Es stellt also $\overline{\phi}_1$ Null dar. Sonst gilt $p|x_i$ für alle i und daraus folgt, dass

$\sum_{j=1}^{n} b_j y_j^2 \equiv 0 \mod p$. Also stellt also $\overline{\phi}_2$ Null dar.

$\Leftarrow$ Es stellen $\overline{\phi}_1$ oder $\overline{\phi}_2$ Null dar.

Ohne Einschränkung stelle $\overline{\phi}_1$ Null dar.

Es existiert ein $0 \neq x = (x_1, \cdots, x_m) \in V$ mit $\overline{\phi}_1(v) = \sum_{i=1}^{m} a_i x_i^2 = 0$.

Definiere $f(x) := a_1 x^2 + \sum_{i=2}^{m} a_i x_i^2$. Es ist $f(x_1) \equiv 0 \mod p$ und $f'(x_1) = 2 \cdot a_1 \cdot x_1 \in \mathbb{Z}_p^*$.

Da $v_p(f(x_1)) > 2v_p(f'(x_1)) = 0$, folgt mit dem Henselschem Lemma, dass ein $x_\infty \in \mathbb{Z}_p$ existiert mit $f(x_\infty) = 0$.

Der Vektor $v =: (x_{\infty_1}, \cdots, x_{\infty_m}, 0, \cdots, 0)$ ist eine Nullstelle von ϕ.

Satz 3.1.31 *Sei $p \in \mathbb{P}$ und $p > 2$. Weiter sei $\phi = \langle a_1, \cdots, a_m \rangle \perp p \langle b_1, \cdots, b_n \rangle$ eine quadratische Form über $\mathbb{Q}_p$, wobei $a_i, b_j \in \mathbb{Z}_p^*$ und V der zugehörige quadratische Modul der Dimension n. Die Abbildungen $\overline{\phi}_1 = \langle \overline{a}_1, \cdots, \overline{a}_m \rangle$ und $\overline{\phi}_2 = \langle \overline{b}_1, \cdots, \overline{b}_m \rangle$ seien die zugehörigen quadratischen Formen über $\mathbb{F}_p$. Dann existiert der folgende Isomorphismus*

$$W(\mathbb{Q}_p) \to W(\mathbb{F}_p) \times W(\mathbb{F}_p), \ [\phi] \mapsto (\left[\overline{\phi}_1\right], \left[\overline{\phi}_2\right]).$$

Beweis: Die quadratische Form ϕ ist nach Definition regulär. Sei $\phi = \phi_1 \perp p\phi_2 \cong \psi_1 \perp p\psi_2$. Dann ist $\phi \perp -\phi = (\phi_1 \perp -\psi_1) \perp p(\phi_2 \perp -\psi_2)$. Nach Satz 3.1.11 ist $\phi \perp -\phi$ hyperbolisch, d.h. es existieren n linear unabhängige Vektoren ungleich Null, für die der Wert der quadratischen Form Null ist. Nach Lemma 3.1.30 stellt $\phi \perp -\phi$ Null dar genau dann, wenn $\overline{(\phi_1 \perp -\psi_1)}$ oder $\overline{(\phi_2 \perp -\psi_2)}$ Null darstellen. Dies kann man analog zum zweiten Teil des Beweises von 3.1.30 liften und erhält, dass genau dann $(\phi_1 \perp -\psi_1)$ oder $(\phi_2 \perp -\psi_2)$ Null darstellen. Wie im Beweis von Satz 2.1.7, Fall 2.2 kann man dann ein hyperbolisches Paar abspalten. Analog dazu fährt man fort und erhält damit, dass

$$[\phi \perp -\phi] = 0 \in W(\mathbb{Q}_p) \ \Leftrightarrow \ \left[\overline{\phi}_1 \perp -\overline{\psi}_1\right] = 0 \in W(\mathbb{F}_p) \text{ und } \left[\overline{\phi}_2 \perp -\overline{\psi}_2\right] = 0 \in W(\mathbb{F}_p)$$

3.1.3 Gitter über diskreten Bewertungsringen

Seien R ein diskreter Bewertungsring, $\pi R \lhd_{max} R$, $\overline{R} := R/\pi R$ Restklassenkörper und $K = \mathrm{Quot}(R)$. Weiter seien V ein K-Vektorraum der Dimension n, $b : V \times V \to K$ eine symmetrische Bilinearform, $q : V \to K$ eine quadratische Form und $E \leq V$ ein R-Gitter.

Satz 3.1.32

1. *Ist* $\mathrm{char}(\overline{R}) \neq 2$, *dann gilt* $(E,b) \cong \perp_{i=1}^{n} Re_i$.
2. *Ist* $\mathrm{char}(\overline{R}) = 2$, *dann gilt* $(E,b) \cong \perp_{i=1}^{n} (E_i, b_i)$ *mit* $Rang(E_i) = 1$ *oder* 2 *und* $b_i : E_i \times E_i \to K$.

Beweis:

1. Fall Ist $b(E,E) = \{0\}$, so ist jede Basis eine Orthogonalbasis.

2. Fall Sei $b(E,E) \neq \{0\}$. Wir zeigen die Behauptung durch Induktion nach $\dim(E)$.
Es ist $b(E,E)$ ein gebrochenes Ideal in K. Es existiert also ein $\alpha \in \mathbb{Z}$ mit $b(E,E) = \pi^{\alpha} R$.
Ersetze b durch $\pi^{-\alpha} b$, so dass $b(E,E) \subseteq R$, aber $b(E,E) \nsubseteq \pi R$.

   (i) Gibt es ein $e_1 \in E$ mit $b(e_1,e_1) \in R^*$, so ist $\langle e_1 \rangle \leq (E,b)$ ein regulärer Teilmodul des R-Moduls (E,b). Dann ist $(E,b) = \langle e_1 \rangle \perp \langle e_1 \rangle^{\perp}$ nach 2.1.5.
   Da $\dim(\langle e_1 \rangle^{\perp}) \leq \dim(E)$ folgt die Behauptung mit Induktion.

   (ii) Gilt für alle $e \in E$, dass $b(e,e) \in \pi R$, so existieren $e, f \in E$ mit $b(e,f) \in R^*$. Es ist $b(e+f, e+f) = b(e,e) + b(f,f) + 2b(e,f)$, d.h. dieser Fall (ii) kommt für den Fall $2 \in R^*$ nicht vor.
   Das Teilgitter $\langle e, f \rangle \leq (E,b)$ ist regulär, denn $\det({}_{(e,f)} b_{(e,f)}) \equiv -b(e,f) \ (mod \pi^2 R) \in R^*$. Wir erhalten mit 2.1.5, dass $(E,b) = \langle e, f \rangle \perp \langle e, f \rangle^{\perp}$. $\square$

Definition 3.1.33 Seien (V,q), (W,q') quadratische K-Vektorräume mit zugehörigen Bilinearformen $b := b_q$ und $b' := b_{q'}$. Für die K-lineare Abbildung $u : V \to W$ definieren wir

$$b'_u : W \to V^*, \ \ b'_u(w)(v) := b'(u(v), w) \text{ für alle } v \in V, w \in W.$$

Satz 3.1.34 *Mit den Bezeichnungen aus Definition 3.1.33 seien F ein endlich erzeugter R-Teilmodul von W und E ein R-Gitter in V. Weiter seien $\pi^k \cdot q'(F) \subseteq \pi R$, $q'(u(x)) \equiv q(x) \ \ (mod\ \pi^k R)$ für alle $x \in E$, $E^* = b'_u(F) + \pi E^*$. Dann gilt*

1. *Es gibt eine lineare Abblidung $u' : E \to W$ mit $u'(x) \equiv u(x) \ \ (\ mod\ \pi^k F)$ für alle $x \in E$ und $q'(u'(x)) \equiv q(x) \ \ (\ mod \ \ \pi^{k+1} R)$ für alle $x \in E$.*

2. *Ist R zusätzlich vollständig, so gibt es eine Isometrie $\tilde{u}\colon E \to W$ mit $\tilde{u}(x) \equiv u(x) \pmod{\pi^k F}$ für alle $x \in E$.*

Beweis:

1. Setze u' an mit $u'(x) := u(x) + \pi^k v(x)$ für alle $x \in E$, wobei $v : E \to F$ linear ist. Offensichtlich ist u' linear und erfüllt die Bedingung, dass $u'(x) \equiv u(x) \pmod{\pi^k F}$ für alle $x \in E$. Es bleibt also noch zu zeigen, dass $q'(u'(x)) - q(x) = q'(u(x)) + \pi^{2k} q'(v(x)) + \pi^k b'(u(x), v(x)) - q(x) \equiv 0 \pmod{\pi^{k+1} R}$. Da $\pi^{2k} q'(v(x)) \in \pi^{k+1} R$ und $q'(u(x)) - q(x) \in \pi^k R$, bleibt zu zeigen, dass

$$b'(u(x), v(x)) = \frac{1}{\pi^k}(q(x) - q'(u(x))) \pmod{\pi R} \text{ für alle } x \in E.$$

   Setze $a(x,x) := \frac{1}{\pi^k}(q(x) - q'(u(x)))$ für alle $x \in E$ und wähle eine beliebige Bilinearform $a : E \times E \to R$, beispielsweise die folgende. Sei $(x_1, \cdots, x_n)$ eine R-Basis von E. Definiere

$$a(x_i, x_j) := \begin{cases} 0, & \text{falls } i \leq j \\ a(x_i, x_j), & \text{falls } i = j \\ a(x_i + x_j, x_i + x_j) - a(x_i, x_i) - a(x_j, x_j), & \text{falls } i > j \end{cases}.$$

   Nach Vorraussetzung gibt es $v_1, \cdots, v_n \in F$ mit $b'(u(x_i), v_j) \equiv a(x_i, x_j) \pmod{\pi}$ für alle i, j. Definiere weiter $v : E \to F$ durch $v(x_i) := v_i$. Dann erfüllt u' die gewünschten Eigenschaften:
   Sei $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \in E$, so ist $b'(u(x), v(x)) = \sum \alpha_i \alpha_j b'(u(x_i), v_j) \equiv \sum \alpha_i \alpha_j a(x_i, x_j) = a(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i, \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j) = a(x,x) = \frac{1}{\pi^k}(q(x) - q'(u(x))) \pmod{\pi}$ für alle $x \in E$.

2. Die Abbildung u', definiert wie oben, erfüllt die gewünschten Eigenschaft anstelle für $k+1$ anstelle von u für k. Induktiv erhalten wir, dass $u^{(0)} := u$, $u^{(1)} = u', \cdots, u^{(n)} : E \to W$, $u^{(n)}(x) \equiv u^{(n-1)}(x) \pmod{\pi^{k+n} F}$ mit $q'(u^{(n)}(x)) \equiv q(x) \pmod{\pi^{k+n}}$. Der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} u^{(n)}$ erfüllt die gewünschte Eigenschaft. □

Folgerung 3.1.35 *Seien R ein vollständiger diskreter Bewertungsring, (F, q') ein regulärer quadratischer R-Modul und $u : (E,q) \to (F,q')$ induziere die Isometrie $\overline{u} : (E/\pi E, \overline{q}) \to (F/\pi F, \overline{q}')$. Dann gibt es eine Isometrie $\tilde{u}\colon (E,q) \to (F,q')$ mit $\tilde{u}(x) + \pi F = \overline{u}(x + \pi E)$ für alle $x \in E$. Ist speziell $(E/\pi E, \overline{q}) \cong (F/\pi F, \overline{q}')$, so gilt $(E,q) \cong (F,q')$.*

Beweis: Die Abbildung $\overline{u}$ ist eine Isometrie. Also ist $\overline{u}$ injektiv und $\overline{E}^* \cong (\overline{u}(\overline{E}))^*$, mit $\overline{E} := E/\pi E$. Da man jede $\overline{R}$-Linearform aus $\overline{u}(\overline{E})$ auf ganz $\overline{F}$ fortsetzen kann und $(\overline{F}, \overline{q}')$ regulär ist, gilt $\overline{u}(\overline{E})^* = \overline{b}_{\overline{u}(\overline{E})}(\overline{F})$. Daraus folgt, dass $\overline{E}^* = \overline{b}'_{\overline{u}}(\overline{F})$ und somit erfüllen F, E, u die Vorraussetzungen von 3.1.34 mit $k = 1$. Wir erhalten die Behauptung. □

Satz 3.1.36 *Sei $2 \neq p \in \mathbb{P}$. Ein regulärer $\mathbb{Z}_p$-Modul ist eindeutig durch Determinante und Dimension bestimmt.*

Beweis: Sei (E,q) ein regulärer $\mathbb{Z}_p$ Modul. Nach 3.1.27 ist (E,q) über $\mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p$ eindeutig bestimmt durch Dimension und Determinante. Nach 3.1.35 kann man Isometrien nach $\mathbb{Z}_p$ heben.□

Satz 3.1.37 *Sei A ein lokaler Ring. Sind F, G scharf primitive freie Untermodulen des quadratischen A-Moduls E und $t : F \to G$ ein Isomorphismus, so gibt es ein $u \in O(E)$ mit $u_{|F} = t$.*

Beweis: Für den Beweis dieses Satzes verweisen wir auf [Kne02, Satz 4.4]. □

Sei $p \in \mathbb{P}$, (L,b) ein bilinearer $\mathbb{Z}_p$-Modul, gesehen als $\mathbb{Z}_p$-Gitter in $V := \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} L$ und $\det(L) \neq 0$.

Satz 3.1.38 *Sei $p \geq 2,\ p \in \mathbb{P}$. Dann gilt*

$$(L,b) = (L_0, p^0 b_0) \perp (L_1, p^1 b_{p^1}) \perp \cdots \perp (L_m, p^m b_{p^m}) \quad \textit{mit } m \in \mathbb{N}$$

sodass (L_i, f_{p^i}) regulär ist für alle i. Diese Zerlegung ist für $p \neq 2$ bis auf Isometrie eindeutig.

Beweis:

1. Zeige die Existenz der Zerlegung.

   (i) Ist $p \neq 2$ so existiert nach 3.1.32 eine Orthogonalbasis $(e_1, \cdots, e_n)$ von L.
   Setzt man nun $L_k := \langle e_i : \nu_p(b(e_i,e_i)) = k \rangle_{Z_p}$ für $k \geq 0$, und $b_k := p^{-k} b_{|L_k \times L_k}$, so erhält man die gewünschte Zerlegung. Die Teilmoduln (L_i, f_{p^i}) sind nach Konstruktion regulär.

   (ii) Ist $p = 2$ so ist nach 3.1.32 $(L,b) \cong \perp_{i=1}^{n} (L_i, b_i)$ mit $Rang(L_i) = 1$ oder 2.
   Setzt man nun $L_k := \langle e_i : \min_{e,e' \in L_i} \{\nu_p(b(e,e'))\} = k \rangle_{Z_p}$ für $k \geq 0$, und $b_k := p^{-k} b_{|L_k \times L_k}$, so erhält man die gewünschte Zerlegung. Die Teilmoduln (L_i, f_{p^i}) sind nach Konstruktion regulär.

2. Zeige die Eindeutigkeit der Zerlegung.
   (i) Als erstes zeigen wir, dass für $k \geq 0$, minimal mit der Eigenschaft $L_k \neq 0$, gilt

   $$\left(L/(L \cap p^{k+1} L^{\#}), \overline{p^{-k} b}\right) \cong \left(L_k/pL_k, \overline{b_k}\right).$$

   Da die (L_i, b_i) reguläre $\mathbb{Z}_p$-Moduln sind, folgt, dass $b(x,y) \in \mathbb{Z}_p$ für alle $x,y \in L_i$ und daher ist $L_i \subseteq L_i^{\#}$. Da (L_i, b_i) reguläre ist, ist $(L_i, b_i)^{\#} = L_i$.
   Wir erhalten also, dass $x \in (L_i, p^i b)^{\#}$ genau dann, wenn $p^i b_i(x, L_i) \subseteq \mathbb{Z}_p$. Dies ist genau dann der Fall, wenn $b_i(p^i x, L_i) \subseteq \mathbb{Z}_p$ und dies tritt genau dann ein, wenn $p^i x \in (L_i, b_i)^{\#}$. Weiter ist $p^i x \in (L_i, b_i)^{\#}$ genau dann, wenn $x \in p^{-i}(L_i, b_i)^{\#}$. Damit erhalten wir, dass

   $(L,b)^{\#} = \perp_{j \geq k}\ p^{-j} L_j$ und daher ist $p^{k+1} L^{\#} = \perp_{j \geq k}\ p^{k+1-j} L_j = pL_k \perp (\perp_{j>k}\ p^{k+1-j} L_j)$.

Da $x \in L$ genau dann, wenn $x_j \in L_j$ für alle j und $x \in p^{k+1}L^\#$ genau dann, wenn $x_k \in pL_k$ und $x_j \in p^{k+1-j}L_j$ mit $j > k$, folgt, dass $x \in L_j \cap p^{k+1}L^\#$ genau dann wenn $x_k \in L_k \cap pL_k = pL_k$ und $x \in L_j \cap p^{k+1-j}L_j = L_j$ für alle $j > k$. Insgesamt folgt nun, dass

$$L \cap p^{k+1}L^\# = pL_k \perp (\perp_{j>k} L_j).$$

Damit folgt unsere Behauptung, da

$$\left(L \,/\, (L \cap p^{k+1}L^\#), \overline{p^{-k}b}\right) = \left(\perp_j L_j \,/\, \left(pL_k \perp (\perp_{j>k} L_j)\right), \overline{p^{-k}b}\right)$$

$$\cong \left(L_k \,/\, pL_k, \overline{p^{-k}b_{|L_k}}\right) \perp \underbrace{\left(\perp_{j>k} L \,/\, \perp_{j>k} L_j, \overline{p^{-k}b}\right)}_{=0}$$

(ii) Kommen wir nun zur eigentlichen Aussage, der Eindeutigkeit. Sei also

$$(L,b) = \perp_{i\geq 0} (L_i, p^i b_i) = \perp_{i\geq 0} (L_i', p^i b_i'))$$

Beweis durch Induktion nach $\mathrm{Rang}(L)$:
Für $\mathrm{Rang}(L) = 0$ ist nichts zu zeigen, sei also $\mathrm{Rang}(L) \geq 1$ und $k := \min_{e\in L} (\nu_p(b(e,e)))$. Nach (i) folgt, dass

$$\left(L_k/pL_k, \overline{b_k}\right) \cong \left(L/(L \cap p^{k+1}L^\#), \overline{p^{-k}b}\right) \cong \left(L_k'/pL_k', \overline{b_k'}\right).$$

Mit 3.1.35 erhalten wir, dass $(L_k.b_k) \cong (L_k', b_k')$ (An dieser Stelle würde der Beweis für $p = 2$ nicht funktionieren, da $q(x) = 2b(x,x) = 0$.). Da außerdem $(L_k, p^{-k}b)$ und $(L_k', p^{-k}b_k')$ als orthogonale Summanden scharf primitiv sind, folgt nach 3.1.37, dass ein $u \in O(L)$ existiert mit $u(L_k) = L_k'$. Es gilt also $u(L_k^\perp) = u(\perp_{i\neq k} L_i) \subseteq L_k^{'\perp}$. Da auch $u^{-1} \in O(L)$ folgt, dass $L_k^\perp \cong L_k^{'\perp}$. □

Bemerkung 3.1.39 Die in Satz 3.1.38 eingeführte Zerlegung heißt **Jordanzerlegung**.

Satz 3.1.40 *Jedes ungerade unimodulare $\mathbb{Z}_2$-Gitter L hat eine Orthogonalbasis.*

Beweis: Beweis durch Induktion über $n = \dim(L)$. Ist $n = 1$, so ist die Behauptung klar.
Induktionsschritt von $(n-1)$ nach n: Sei $e_1 \in L$ beliebig mit $b(e_1,e_1) =: a_1 \in \mathbb{Z}_2^*$, so folgt, dass $L = \mathbb{Z}_2 e_1 \perp M$, wobei das Gitter M unimodular und von der Dimension $\dim(L) - 1$ ist. Ist M ungerade, dann existiert nach mit Induktion eine Orthogonalbasis.
Ist M gerade, so verändere e_1. Dazu sei $e_2 \in M$ beliebig. Dann ist $b(e_2,e_2) \in 2\mathbb{Z}_2$ und daher folgt für $e_1' := e_1 + e_2$, dass $b(e_1',e_1') \in \mathbb{Z}_2^*$. Da $M = M^\#$, existiert ein $e_3 \in M$ mit $b(e_2,e_3) = 1$ und daher gilt, dass $e_3' := e_1 - a_1 e_3 \in (e_1)^\perp$. Außerdem ist $b(e_3',e_3') = b(e_1,e_1) + a_1^2 b(e_3,e_3) \in \mathbb{Z}_2^*$. Das ungerade Teilgitter $M' := \langle e_1' \rangle^\perp$ erfüllt $L = \langle e_1' \rangle \perp M'$. Nach Induktion existiert eine Orthogonalbasis. □

3.2 Geschlecht von Gittern

Analog zu [Kne02] führen wir den Begriff des Geschlechts ein.

Sei p eine Primzahl, $\mathbb{Q}_p$ der Körper der p-adischen Zahlen und $\mathbb{Z}_p$ der Ring der ganzen p-adischen Zahlen. Weiter sei V ein n-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{Q}$ mit einer nicht ausgearteten quadratischen Form q.

Sei $\{e_1,...,e_n\}$ eine Basis von L und so diese auch Basis von $\mathbb{Q}^n$. Identifiziert man $1 \otimes x$ mit x, so folgt, dass $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}^n$. Es wird L_p zu einem $\mathbb{Z}_p$-Gitter in $\mathbb{Q}_p^n$.

Definition 3.2.1 Für ein Gitter $L \subseteq \mathbb{Q}^n$ heißt

$$L_p := \mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} L, \qquad \text{mit } p \in \mathbb{P}$$

die **p-Komplettierung** von L.

Definition 3.2.2 Die Gitter $L \subseteq V$ und $L' \subseteq V'$ **liegen im gleichen Geschlecht**, falls gilt

$$L_p \cong L'_p \quad \text{für alle } p \in \mathbb{P} \cup \infty.$$

Im Zeichen: $L \sim L'$. Die Menge $\text{genus}(L) := \left\{ L' \mid L' \sim L \right\}$ heißt das **Geschlecht** von L.

Satz 3.2.3 ***Hasse, Minkowski***
Seien V, W quadratische $\mathbb{Q}$-Vektorräume und sei $\mathbb{Q}_p \otimes V \cong \mathbb{Q}_p \otimes W$ für alle $p \in \mathbb{P} \cup \{\infty\}$, so gilt, dass $V \cong W$.

Beweis: Für den Beweis dieses Satzes verweisen wir auf [Kne02, Satz 19.1]. □

Folgerung 3.2.4 *Ist $L \sim L'$, so folgt, dass $\mathbb{Q}_p \otimes L \cong \mathbb{Q}_p \otimes L'$ für alle $p \in \mathbb{P} \cup \infty$. Nach Satz 3.2.3 gilt dann, dass $\mathbb{Q} \otimes L \cong \mathbb{Q} \otimes L'$.*

Die folgende Bemerkung dient dazu den Begriff des Geschlechts besser zu verstehen.

Bemerkung 3.2.5

1. Ein Geschlecht besteht aus vollen Isometrieklassen.
2. Alle im gleichen Geschlecht liegenden Gitter haben gleiche Determinante.
3. Ein Geschlecht enthält nur endlich viele Isometrieklassen.

Beweis:

zu 1. Sei $u : L \to L'$ eine Isometrie, so ist auch $id \otimes u : \mathbb{Z}_p \otimes L \to \mathbb{Z}_p \otimes L'$ eine Isometrie, da $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}_p$ für alle $p \in \mathbb{P} \cup \{\infty\}$.

zu 2. Sei $B := (b_1, \cdots, b_n)$ eine Basis von L und $B' := (b'_1, \cdots, b'_n)$ eine Basis von L'. Da $L \sim L'$, folgt, dass für alle $p \in \mathbb{P} \cup \{\infty\}$ eine Matrix $M_p \in \mathrm{GL}(\mathbb{Z}_p)$ existiert mit $M_p \cdot \mathrm{G}(\mathbb{Z}_p \otimes B) \cdot M_p^{tr} = \mathrm{G}(\mathbb{Z}_p \otimes B')$. Daraus folgt, dass $\det(\mathrm{G}(\mathbb{Z}_p \otimes B)) \cdot a_p^2 = \det(\mathrm{G}(\mathbb{Z}_p \otimes B'))$ mit $\det(M_p) =: a_p \in \mathbb{Z}_p^*$ für alle $p \in \mathbb{P} \cup \{\infty\}$. Für $\det(\mathrm{G}(\mathbb{Z}_p \otimes B')) \neq 0$ ist also $a_p^2 := \frac{\det(\mathrm{G}(\mathbb{Z}_p \otimes B))}{\det(\mathrm{G}(\mathbb{Z}_p \otimes B'))} \in (\mathbb{Z}_p^*)^2$ für alle $p \in \mathbb{P} \cup \{\infty\}$. Da dies für alle Primzahlen gilt, folgt $a_p^2 = \pm 1$ und wegen $\{\infty\}$ erhalten wir, dass $a_p^2 \in (\mathbb{R}^*)^2$. Wir erhalten also, dass $a_p^2 = 1$ und deswegen $\det(\mathbb{Z}_p \otimes B) = \det(\mathbb{Z}_p \otimes B')$ für alle $p \in \mathbb{P} \cup \{\infty\}$.

zu 3. Nach [Kne02, Satz 20.2] existieren für feste Dimension und feste Determinante nur endlich viele verschiedene Isometrieklassen von ganzen Gittern. □

Nicht nur die Determinante eines Gitters, auch die Elementarteiler der jeweiligen Grammatrix sind eine Invariante für das Geschlecht.

Bemerkung 3.2.6 Seien L und M Gitter, die im gleichen Geschlecht liegen. Die Grammatrizen von L und M haben die gleichen Elementarteiler.

Beweis: Seien $B := (b_1, ..., b_n)$ und $B' := (b'_1, ..., b'_n)$ Basen von L, sodass $\left((b_i, b'_j)\right)_{i,j} = \mathrm{Diag}(d_1, .., d_n)$, wobei $d_1, ..., d_n$ den Elementarteilern von $\mathrm{G}(L)$ entspricht. Seien weiter $d'_1, ..., d'_n$ die Elementarteiler von $\mathrm{G}(M)$. Es bezeichne $d_1[p]$ den Elementarteiler d_i aufgefasst in $\mathbb{Z}_p$. Wegen $L_p \cong L'_p$ für alle $p \in \mathbb{P}$, folgt, dass $d_i[p] = d'_i[p]$ für alle $i \in \{1, .., n\}$ und für alle $p \in \mathbb{P}$. Insgesamt folgt, dass für alle $p \in \mathbb{P}$ der p-Anteil der Elementarteiler von L und M gleich ist und somit folgt die Behauptung. □

Mit Hilfe von Cliffordalgebren definiert man einen Gruppenhomomorphismus

$$\nu : SO(V_p, q) = \left\{ g \in O(V_p, q) |\ \det(g) = 1 \right\} \to K^*/(K^*)^2,$$

die sogenannte **Spinornorm**, siehe [Kne02, Definition 8.6].

Definition 3.2.7 Die Menge der Gitter

$$\left\{ L' \leq (V, q) \mid \text{ für alle } p \in \mathbb{P} \text{ existiert } u_p : L_p \xrightarrow{\sim} L'_p \text{ mit } \nu(u_p) = 1 \right\}$$

heißt das **Spinorgeschlecht** von L.

Satz 3.2.8 *Sei* $\dim(V) \geq 3$, $L \leq V$ *und* $p \in \mathbb{P}$. *Weiter enthalte* L_p *einen mindestens zweidimensionalen orthogonalen Summanden* $(M_p, c_p q)$ *mit regulärem* (M_p, q). *Dann besteht das Geschlecht von* L *nur aus einem Spinorgeschlecht.*

Beweis: Für den Beweis dieses Satzes verweisen wir auf [Kne02, Satz 25.4]. □

Folgerung 3.2.9 *Für die Gitter* C_N^k *ist ihr Geschlecht gleich ihrem Spinorgeschlecht, falls gilt:*

1. $k \geq 2$, *für* $N \in \mathcal{N} \cap \mathbb{P}$.
2. $k \geq 1$, *für* $N \in \mathcal{N} \setminus \mathbb{P}$.

Bemerkung 3.2.10 Mit dem Programm Magma erhält man auch für $k = 1$ und $N \in \mathcal{N} \cap \mathbb{P}$, dass das für die Gitter C_N Geschlecht gleich dem Spinorgeschlecht ist.

Satz 3.2.11 *Sei* V *regulärer* $\mathbb{Q}$*-Vektorraum,* $\dim(V) \geq 3$ *und* $p \in \mathbb{P}$ *mit* $\mathrm{ind}(V_p) > 0$. *Dann enthält jede Isomorphieklasse im Spinorgeschlecht eines Gitters* $L \subset V$ *ein Gitter* $M \subset V$ *mit* $M_l = L_l$ *für alle* $l \neq p$.

Beweis: Für den Beweis dieses Satzes verweisen wir auf [Kne02, Satz 25.3]. □

Satz 3.2.12 *Es ist* $\mathrm{ind}(V_p) > 0$ *insbesondere dann gegeben, wenn* $\dim(V) \geq 5$.

Beweis: Für den Beweis dieses Satzes verweisen wir auf [Kne02, Satz 28.1]. □

Bemerkung 3.2.13 Sei nun $p \in \mathbb{P}$ so gewählt, dass $\mathrm{ind}(V_p) > 0$. Mit Hilfe von Satz 3.2.11 erhalten wir, dass jede Klasse im Spinorgeschlecht von L ein $M \subset V$ enthält mit $M_l = L_l$ für alle Primzahlen $l \neq p$. Es gilt, dass

$$\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]\, M = \mathbb{Z}[\frac{1}{p}]\, L.$$

Beweis: Fixiere eine Basis von M. Da V ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum ist, sieht man, dass $M = \bigcap_l (V \cap M_l) \subseteq \bigcap_{l \neq p} (V \cap L_l) = \mathbb{Z}[\frac{1}{p}]\, L$. Daraus folgt, dass $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]\, L \subseteq \mathbb{Z}[\frac{1}{p}]\, M$. Vertauscht man die Rollen von M und L, so folgt die Behauptung. □

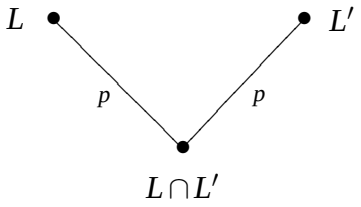
3.2.1 Knesersche Nachbarschaftsmethode

Wir stellen nun die sogenannte Nachbarschaftsmethode vor, die ermöglicht alle Gitter, die im einem Spinorgeschlecht liegen, zu konstruieren. Dabei gehen wir analog zu [Hem03] und [Tei05] vor.

Definition 3.2.14 Zwei ganze Gitter L und L', mit $p \nmid \det(L)$, heißen p-Nachbarn, falls

$$L/(L \cap L') \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \cong L'/(L \cap L').$$

Dies lässt sich wie folgt skizzieren:



Bemerkung 3.2.15 Mit der Determinanten-Index-Formal erhalten wir, dass zwei benachbarte Gitter die gleiche Determinante haben:

$$\det(L) = [L : L \cap L']^{-2} \cdot \det(L \cap L') = [L' : L' \cap L]^{-2} \cdot \det(L' \cap L) = \det(L')$$

Im Folgendem seien alle Gitter ganzzahlig und p sei eine Primzahl, die die Determinante von L nicht teilt. Für die konkrete Ausführung der Nachbarschaftsmethode sollte p minimal gewählt werden, um die Rechenzeit zu reduzieren.

Definition 3.2.16 Sei $v \in L$. Wir definieren

$$L(v) := L_v + \tfrac{1}{p}\mathbb{Z}v \quad \text{mit} \quad L_v := \{x \in L | (x,v) \in p\mathbb{Z}\}.$$

Definition 3.2.17 Sei $y \in L \setminus pL$, mit $(y,y) \in p^2\mathbb{Z}$. Dann heißt y **Nachbarvektor** von L bezüglich p.

Satz 3.2.18 *Sei y ein Nachbarvektor von L. Dann ist $L(y)$ ein p-Nachbar von L. Weiter gilt, dass jeder p-Nachbar von L von der Form $L(y)$, bezüglich eines Nachbarvektors, ist.*

Beweis:

(i) Zeige, dass $L(y)$ ein p-Nachbar von L ist.
Das Gitter $L(y)$ ist nach Konstruktion ganzzahlig. Da $p \nmid \det(L)$, ist $[L : L_y] = p$. Ausserdem gilt, dass $[L(y) : L_y] = p$, da $p\frac{1}{p}y = y \in L_y$ und $\frac{1}{p}y \notin L$. Da $L \cap L(y) = L_y$, folgt die Behauptung.

(ii) Zeige, dass jeder beliebeige Nachbar von der Form $L(y)$ ist.
Sei M ein ganzzahliger p-Nachbar von L und $y \in pM \setminus pL$. Dann ist $(L,y) \subseteq \mathbb{Z}$, da $pM \subseteq L \cap M$. Es gilt aber nicht, dass $(L,y) \subseteq p\mathbb{Z}$, denn sonst würde gelten, dass $p \mid \det(L)$. Somit folgt, dass $L_y \subsetneq L$. Insgesamt erhalten wir also wegen $y \in pM$, dass $L \cap M \subseteq L_y \subsetneq L$ und somit, dass $L \cap M = L_y$. Mit $[L : L \cap M] = p$ folgt also, dass $M = L_y + \mathbb{Z}\frac{1}{p}y = L(y)$. □

Durch die im vorhergehendem Satz eingeführte Konstruktion wird deutlich, wieso wir zu Beginn des Abschnittes gefordert haben, dass p nicht die Determinante von L teilen soll.
Angenommen $p \mid \det(L) = \left[L^{\#} : L\right]$. Dann ist der Schnitt $pL^{\#} \cap L = \{x \in L | (x,y) \in p\mathbb{Z} \ \forall y \in L\}$ nicht leer. Für alle $v \in pL^{\#} \cap L$ wäre dann aber $L_v = L$ und somit $L(v)$ ein Obergitter von L.

Nutzen wir nun die Ergebnisse aus Satz 3.2.11 und Satz 3.2.13, so erhalten wir mit dem folgendem Satz, dass unter Einschränkungen an die Dimension zwischen je zwei Gittern, die im gleichen Spinorgeschlecht liegen, eine Kette von Nachbarn existiert.

Satz 3.2.19 *Seien $L \neq M$ Gitter gleicher Determinante mit $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]L = \mathbb{Z}[\frac{1}{p}]M$. Dann gibt es eine Kette $L = L_0, L_1, ...L_r = M$ von Gittern, so dass L_{i-1} und L_i p-Nachbarn sind für $i = 1, ..., r$.*

Beweis: Wir führen einen Beweis mit Induktion nach s durch, wobei $p^s = [M : L \cap M]$.
Ist $s = 1$, so ist nichts zu zeigen. Sei also $s \geq 2$. Wähle ein Element der Ordnung p aus $M/L \cap M$ und dafür einen Vertreter $\bar{y} \in M$. So folgt für $y := p\bar{y}$, dass $y \in L \setminus pL$ und $(y,y) \in p^2\mathbb{Z}$. Mit dem vorhergehendem Satz können wir einen p-Nachbarn von $L(y)$ von L konstruieren. Es bleibt zu zeigen, dass $p^{s-1} = [M : L(y) \cap M]$.
Sei $x \in L \cap M$, dann ist $(x,y) = p(x,\bar{y}) \in p\mathbb{Z}$ und somit ist $x \in L_y$. Daraus folgt, dass $L \cap M = L_y \cap M \subseteq L(y) \cap M$. Da $\bar{y} \in L(y) \cap M \setminus L \cap M$, folgt insgesamt, dass $L \cap M \subsetneq L(y) \cap M$. Es folgt, dass $p^{s-1} = [M : L(y) \cap M]$ und mit Induktion finden wir eine Kette von p-Nachbarn zwischen $L(y)$ und L. □

Die folgenden Überlegungen dienen dazu einen Algorithmus für die Nachbarschaftsmethode zu erhalten. Hierbei gehen wir analog zu [Hem03] vor, jedoch betrachten wir auch ungerade Gitter.

Erstmal wollen wir die Anzahl der möglichen Nachbarvektoren reduzieren:

Satz 3.2.20 *Die in der gleichen Bahn unter der Automorphismengruppe von L liegenden Nachbarvektoren erzeugen isomorphe Gitter.*

Beweis: Sei $\sigma \in \mathrm{Aut}(L)$, v ein Nachbarvektor bezüglich p und $y \in L$. Wir zeigen, dass $\sigma(L(v)) = L_{\sigma(v)}$. Dazu genügt es zu zeigen, dass $\sigma(L_v) = L_{\sigma(v)}$. Sei $y \in L_{\sigma(v)}$, so ist $(y, \sigma(v)) \in p\mathbb{Z}$ und dies ist äquivalent dazu, dass $(\sigma^{-1}(y), v) \in p\mathbb{Z}$. Es ist also $\sigma^{-1}(y) \in L_v$ und dies ist genau dann der Fall, wenn $y \in \sigma(L_v)$. □

Satz 3.2.21 *Die in der gleichen Nebenklasse von L/pL liegenden Nachbarvektoren bzgl. p erzeugen das gleiche Nachbargitter.*

Beweis: Es bezeichne $[l]$ die Restklasse modulo p für ein $l \in L$. Seien v, v' zwei Nachbarvektoren mit $[v] = [v']$. Dann existiert ein $z \in L$, sodass $v = v' + pz$. Ist $x \in L_v$, so ist $(x,v) = (x,v'+pz) = (x,v') + p\,(x,z)$ und damit ist $L_v \subseteq L_{v'}$. Analog zeigt man, dass $L_{v'} \subseteq L_v$ und somit $L_v = L_{v'}$.
Da v und v' Nachbarvektoren sind, ist $p^2\mathbb{Z} \ni (v',v') = (v+pz, v+pz) = (v,v) + 2p(v,z) + p^2(z,z)$ und damit $z \in L_v = L_{v'}$. Insgesamt erhalten wir, dass
$L(v) = L_v + \frac{1}{p}\mathbb{Z}v = L_{v'} + \frac{1}{p}\mathbb{Z}(v'+pz) = L_{v'} + \frac{1}{p}\mathbb{Z}v' + \mathbb{Z}z = L_{v'} + \frac{1}{p}\mathbb{Z}v' = L(v')$. □

Bemerkung 3.2.22 Sei L ein ganzes Gitter.

a) $L(v)$ ist genau dann ganz, wenn $(v,v) \in p^2\mathbb{Z}$.

b) Ist L zusätzlich gerade, so ist $L(v)$ ist genau dann gerade, wenn $(v,v) \in 2\,p^2\mathbb{Z}$.

Beweis:

zu a) Sei $(v,v) \in p^2\mathbb{Z}$. Es ist L_v ganz, da L ganz ist. Wegen $(L_v, \frac{1}{p}v) = \frac{1}{p}\,(L_v, v) \subseteq \mathbb{Z}$ und $(\frac{1}{p}v, \frac{1}{p}v) = \frac{1}{p^2}\,(v,v) \subseteq \frac{1}{p^2}\,p^2\,\mathbb{Z}$ folgt, dass $L(v)$ ganz ist.
Die Umkehrung folgt, da L ganz ist und $(v,v) \in \mathbb{Z}$ genau dann, wenn $\frac{1}{p^2}\,(v,v) \in p^2\mathbb{Z}$ direkt.

zu b) Sei $(v,v) \in 2\,p^2\mathbb{Z}$. Wegen L ist L_v gerade. Daher folgt mit $(\frac{1}{p}v, \frac{1}{p}v) \in \frac{1}{p^2}\,2\,p^2\,\mathbb{Z}$, dass $L(v)$ gerade ist.
Die Umkehrung folgt direkt, da L ganzzahlig ist und $(\frac{1}{p}v, \frac{1}{p}v) \in 2\mathbb{Z}$ genau dann, wenn $(v,v) \in 2\;p^2\mathbb{Z}$. □

Unter verschiedenen Vorraussetzungen können wir auf folgende Weise Nachbarvektoren konstruieren:

Lemma 3.2.23 *Seien $v, v' \in L \setminus 2L$. Wir betrachten $L(v)$ bezüglich der Primzahl $p = 2$.*
Ist $v - v' \in 2L_v$, so gilt, dass $L(v) = L(v')$.

Beweis: Sei $z := \frac{v-v'}{2} \in L_v$. Es gilt für alle $x \in L$, dass $(x,v) \equiv (x,v) - (x,2z) = (x, v-2z) = (x,v')$ modulo 2 und daraus folgt, dass $L_v = L_{v'}$. Insgesamt erhalten wir da $2L \subseteq L_v = L_{v'}$, dass $L(v) = L_v + \frac{1}{2}\mathbb{Z}v = L_v + \frac{1}{2}\mathbb{Z}(v'+2z) = L_{v'} + \frac{1}{2}\mathbb{Z}v' = L(v')$. □

Satz 3.2.24 *Sei L ein gerades Gitter, $p = 2$ und L habe ungerade Determinante.*
Ist $v \in L \setminus 2L$, mit $(v,v) \in 4\mathbb{Z}$, so gibt es einen Basisvektor e mit $2 \nmid (v,e)$ und für alle $w \in [v] \in L/2L$ gilt entweder, dass $L(w) = L(v)$ oder $L(w) = L(v+2e)$.
Weiter ist eines dieser Gitter gerade, das andere ungerade.

Beweis: Die Existenz des Basisvektors e ist klar, da $2 \nmid \det(L)$.

1. Fall Sei $(v,v) \equiv 0 \mod 8$. Dann ist $L(v)$ ist nach Bemerkung 3.2.22 gerade und $L(v+2e)$ ist wegen
$$(*) \quad (v+2e, v+2e) = (v,v) + 4(v,e) + 4(e,e) \equiv 4 \mod 8$$
ein ungerades Gitter.

2. Fall Sei $(v,v) \equiv 0 \mod 4$, aber nicht mod 8. Mit $(*)$ erhalten wir, dass $L(v+2e)$ gerade ist und $L(v)$ ist offensichtlich ungerade.

Sei $w \in [v]$, das heißt also $w = v + 2f$ für ein $f \in L$. Da $[2L : 2L_v] = 2$ und nach Lemma 3.2.23 $L(w) = L(v)$ genau dann, wenn $2f \in 2L_v$, folgt die Behauptung. Mit Lemma 3.2.23 folgt für alle $w \in [v]$ wegen $[2L : 2L_v] = 2$, dass entweder $L(w) = L(v)$ oder $L(w) = L(v+2e)$. □

Bemerkung 3.2.25 Seien L ein gerades Gitter mit gerader Determinante und $p = 2$. Dann ist die Existenz des Basisvektors, der zur Anpassung von v dient, nicht gegeben.

Satz 3.2.26 *Sei L ein ungerades Gitter, $p \neq 2$ Primzahl und $p \nmid \det(L)$.*
Ist $v \in L \setminus pL$, mit $(v,v) \in p\mathbb{Z}$ (und $p^2 \nmid (v,v)$, sonst wäre v schon ein Nachbarvektor), so gibt es einen Basisvektor e mit $p \nmid (v,e)$ und $x \in (2 \cdot (v,e) + p\mathbb{Z})^{-1} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, so dass für $v' := v + xpe$ gilt, dass $(v',v') \in p^2\mathbb{Z}$ und $v' \in L \setminus pL$.

Beweis: Die Existenz des Basisvektors e ist klar, da $p \nmid \det(L)$. Weiter gilt:

$$\begin{aligned}
& (v+xpe, v+xpe) \equiv 0 \mod p^2 \\
\Leftrightarrow \quad & 0 \equiv (v+xpe, v+xpe) = (v,v) + 2xp(v,e) + x^2p^2(e,e) \equiv (v,v) + 2xp(v,e) \mod p^2 \\
\Leftrightarrow \quad & 0 \equiv \frac{(v,v)}{p} + 2x(v,e) \mod p \\
\Leftrightarrow \quad & x \equiv -\frac{(v,v)}{p} \cdot (2 \cdot (v,e))^{-1} \mod p. \quad (**)
\end{aligned}$$

Somit hat v' nach Wahl von x die gewünschte Norm. Zeige noch, dass $v' \in L \setminus pL$. Angenommen, dass $v' \in pL$, so existiert ein $l \in L$ mit $v' = v + xpe = pl$. Dies ist äquivalent dazu, dass $v = p(l - xe)$ und dies leitet einen Widerspruch ein. □

Folgerung 3.2.27 *Die Bedingung, dass p eine Primzahl ungleich zwei ist, im vorhergehenden Satz ist notwendig, damit* $2 \cdot (v,e)$ *eine Einheit in* $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ *ist, siehe (**).*

Durch die vorhergehenden Sätze wird klar, dass es genügt die $p^n - 1$ Repräsentanten der Klasse $L/pL \cong (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n \cong \mathbb{F}_p^n$ als Nachbarvektoren zu berücksichtigen. Von diesen müssen wir dann nur noch die betrachten, wie unter der Automorphismengruppe in einer Bahn liegen. Offensichtlich kann man also die Rechenzeit verkürzen, indem man eine möglichst kleine Primzahl wählt.

Folgerung 3.2.28 *Ein Gitter der Dimension n besitzt, bis auf Isometrie, höchstens* $\frac{p^n-1}{p-1}$ *p-Nachbarn.*

Zusammenfassend erhalten wir folgenden Algorithmus:
Gegeben: Ein ganzes Gitter L mit $p \nmid \det(L)$.
Gesucht: $\{L' \mid L' \sim L\} = \mathcal{G}$

1) $\mathcal{G} = \{L\}$

2) Wähle einen noch nicht behandeltes $L \in \mathcal{G}$ und wähle eine beliebige, aber feste Basis B von L. Berechne dann die zugehörige Automorphismengruppe.

3) Identifiziere L/pL mit $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$ und berechne die Bahnen der projezierten Automorphismengruppe.

4) Wähle aus einer noch nicht behandelten Bahn einen Vertreter und bilde ein beliebiges Urbild v. Falls jede Bahn behandelt wurde, so gehe zu 2).

5) a) Ist $(v,v) \equiv 0 \bmod p^2$, so füge $L(v)$ zu $\mathcal{G}$ und gehe zu 4).
   b) Ist $(v,v) \equiv 0 \bmod p$, so passe v an zu v', so dass $(v',v') \equiv 0 \bmod p^2$ und füge $L(v')$ zu $\mathcal{G}$ hinzu. Dann gehe zu 4).
   c) Falls $p \nmid (v,v)$, so gehe wieder zu 4).

3.2.2 Anwendung der Kneserschen Nachbarschaftsmethode auf die Gitter C_N^k

Das Ziel dieses Abschnittes ist es zu zeigen, dass ungerade stark N-modulare Gitter in Geschlecht von C_N^k, mit geeignetem k, liegen. Dazu werden wir das Geschlechtssymbol analog zu [CS99] einführen.
Sei $p \in \mathbb{P}$. Wir führen erstmal das p-adische Symbol für $(p \neq 2)$ ein. Nach Satz 3.1.38 können wir jeden bilinearen Raum über $\mathbb{Z}_p$ eindeutig zerlegen, so dass dieser die Form

$$(L,b) = (L_0, p^0 b_0) \perp (L_1, p^1 b_{p^1}) \perp \cdots \perp (L, p^m b_{p^m}) \quad \text{mit } m \in \mathbb{N}$$

hat. Sei

$$\varepsilon_i := \begin{cases} + & \text{, falls } \det(b_i) \in (\mathbb{Z}_p^*)^2 \\ - & \text{, falls } \det(b_i) \notin (\mathbb{Z}_p^*)^2. \end{cases}$$

Ist $(p \neq 2)$, so ist das p-**adische Symbol** von (L,b) definiert durch

$$(p^0)^{\varepsilon_0 \dim(b_1)} \, (p^1)^{\varepsilon_1 \dim(b_p)} \, \dots \, (p^m)^{\varepsilon_m \dim(b_{p^m})}.$$

Satz 3.2.29 *Sei $(p \neq 2)$. Zwei Bilinear Formen sind genau dann äquivalent über $\mathbb{Z}_p$, wenn sie das gleiche p-adische Symbol haben.*

Beweis: Nach Satz 3.1.38 sind die einzelnen Komponenten der Jordanzerlegung regulär. Weiter sind nach Satz 3.1.36 reguläre $\mathbb{Z}_p$-Moduln eindeutig durch ihre Dimension und Determinante bestimmt. Da nach Satz 3.1.35 bilineare Moduln genau über $\mathbb{Z}_p$ isometrisch sind, wenn sie über $\mathbb{F}_p$ isometrisch sind, müssen wir nach Beispiel 3.1.26 nur unterscheiden, ob die Determinante des Moduls ein Quadrat oder ein Nichtquadrat in $\mathbb{F}_p^*$ ist. □

Definition 3.2.30 Sei $p \in \mathbb{P}$ und $\nu \in \mathbb{Z}$.

(i) Für $p \geq 3$ definieren wir

$$\left[\frac{\nu}{p}\right] := \begin{cases} 1 & \text{, falls } \nu \text{ modulo } p \text{ konguent zu einem Quadrat ist} \\ -1 & \text{, falls } \nu \text{ modulo } p \text{ nicht konguent zu einem Quadrat ist} \end{cases}.$$

Ist $p = 2$, so definieren wir

$$\left[\frac{\nu}{p}\right] := \begin{cases} 1 & \text{, falls } \nu \equiv +-1 \mod 8 \\ -1 & \text{, falls } \nu \equiv +-3 \mod 8 \end{cases}.$$

$\left[\frac{\nu}{p}\right]$ heißt das **Jacobi-Legendre Symbol**.

(ii) Sei $A \in \mathbb{R}$ oder $A \in \mathbb{Z}_p$, mit $A = p^\alpha a$, wobei $\mathrm{ggT}(p,a) = 1$.
$p^\alpha a$ heißt p-**adisches Antisquare**, wenn gilt, dass

a) p^α kein Quadrat ist und

b) $\left[\frac{a}{p}\right] = -1$.

(iii) Sei $b = \mathrm{Diag}(p^\alpha a, p^\beta b, p^\gamma c, \dots)$ eine ganze Bilinearform. Wir definieren

$$\textbf{p-Signatur(b)} := \begin{cases} p^\alpha + p^\beta + p^\gamma + \dots + 4m & \text{, falls } p \neq 2 \\ a + b + c + \dots + 4m & \text{, falls } p = 2 \end{cases},$$

wobei m die Anzahl der p-adischen Antisquare ist. Die 2-Signatur heißt auch die **oddity** von L.

Kommen wir nun zum 2-adischen Symbol: Sei

$$\varepsilon_i := \begin{cases} + & \text{, falls } \det(b_i) \equiv \pm 1 \mod 8 \\ - & \text{, falls } \det(b_i) \equiv \pm 3 \mod 8 \end{cases}.$$

und

$$S_i := \begin{cases} I & \text{, falls } b_i \text{ ungerade ist} \\ II & \text{, sonst} \end{cases}$$

Ist $S_i = I$, heißt $p^i b_{p^i}$ vom Typ I, sonst vom Typ II. Das 2-adische Symbol von f ist dann

$$(2^0)_{S_0}^{\varepsilon_0 \dim(b_1)} \, (2^1)_{S_1}^{\varepsilon_1 \dim(b_p)} \, \cdots \, (2^n)_{S_n}^{\varepsilon_n \dim(b_{p^n})}$$

Satz 3.2.31 *Seinen f und f' zwei Bilinearformen. Es bezeichne t_i bzw. t_i' die oddity von f_i bzw. f_i'. Die Bilinearformen f und f' sind genau dann 2-adisch äquivalent, wenn*

(i) $n_i = n_i'$, $S_i = S_i'$ *für alle i und wenn*

(ii) für jedes i, für welches f_i von Typ II ist, gilt

$$\sum_{f_j < 2^i} (t_q - t_q') \equiv 4\,(\min(a,i) + \min(b,i) + \cdots) \; (\mod 8)$$

wobei $2^a, 2^b, \cdots$ die Werte von f_j sind, für die gilt $\varepsilon_j \neq \varepsilon_j'$.

Beweis: Für den Beweis dieses Satzes verweisen wir auf [CS99, Chapter 15, Theorem 10]. □

Folgerung 3.2.32 *Sind f und f' Formen, in deren 2-adischen Diagonalisierung keine Typ II Summanden vorkommen, so sind diese genau dann 2-adisch äquivalent, wenn die Dimensionen der einzelnen Summanden gleich sind.*

Lemma 3.2.33 *Es gibt nur ein Geschlecht von geraden, 2-modularen Gittern der Dimension n und Determinante d.*

Beweis: Um die Behauptung zu zeigen, genügt es das p-adische Symbol der zugehörigen Bilineraformen für alle p zu betrachten. Sei L ein gerades, 2-modulares Gitter mit Basis B. Es folgt, dass $2\,\mathrm{G}(B)^{-1} \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ und somit ist 2 maximaler Elementarteiler. Da $\det(\mathrm{G}(B)) = \det(2\,\mathrm{G}(B)^{-1})$ ist $\det(L) = 2^{\frac{n}{2}}$. Da außerdem L gerade ist, erhalten wir, dass das 2-adische Symbol von der Form $1_{II}^{\frac{n}{2}} 2_{II}^{\frac{n}{2}}$ oder $1_{II}^{\frac{n}{2}} 2_{I}^{\frac{n}{2}}$ ist. Die Bilinearform von $\sqrt{2}L^{\#}$ hat die Form $2f_0^{-1} \perp f_1^{-1}$. Dabei ist f_i genau dann gerade, also vom Typ II, wenn f_i^{-1} gerade ist. Betrachte dazu f_i^{-1} als Basiswechselmatrix, dann ist nämlich $f_i^{-1} = f_i^{-1} f_i f_i^{-tr}$. Da $\sqrt{2}\left[1_{II}^{\frac{n}{2}} 2_{I}^{\frac{n}{2}}\right]^{\#} = \sqrt{2}\left[1_{II}^{\frac{n}{2}} (1/2)_{I}^{\frac{n}{2}}\right] = \left[2_{II}^{\frac{n}{2}} 1_{I}^{\frac{n}{2}}\right] \ncong \left[1_{II}^{\frac{n}{2}} 2_{I}^{\frac{n}{2}}\right]$, scheidet die zweite Möglichkeit aus, denn $\sqrt{2}L^{\#}$ hat das gleiche 2-adische Symbol wie L. Mit Satz 3.2.31 erhalten wir, dass eine Bilinearform durch dieses Symbol 2-adisch eindeutig bestimmt ist.
Ist $p \neq 2$, so ist das Gitter unimodular und hat das p-adische Symbol: $1^{\varepsilon n}$. □

Satz 3.2.34 *Sei $N \in \mathbb{N}$ quadratfrei und sei L ein ungerades stark N-modulares Gitter, das rational äquivalent zu C_N^k ist, dann liegt L im Geschlecht von C_N^k.*

Beweis: Zeige, dass

$$\mathbb{Z}_p \otimes L \cong \mathbb{Z}_p \otimes C_N^k \quad \text{für alle} \quad p \in \mathbb{P} \cup \{\infty\}.$$

Für $p = \infty$ ist die Behauptung klar.
Es gilt $L \otimes \mathbb{Q} \cong C_N^k \otimes \mathbb{Q}$ genau dann, wenn $L \otimes \mathbb{Q}_p \cong C_N^k \otimes \mathbb{Q}_p$ für alle $p \in \mathbb{P}$. $(*)$

1 . Fall N wird von p geteilt.

a) Sei $p \neq 2$.
Da N quadratfrei ist, seien $\langle a_1, \cdots, a_n \rangle \perp p\langle b_1, \cdots, b_m \rangle$ $a_i, b_j \in \mathbb{Z}_p^*$ und $\langle a'_1, \cdots, a'_{n'} \rangle \perp p\langle b'_1, \cdots, b'_{m'} \rangle$ $a'_i, b'_j \in \mathbb{Z}_p^*$ mögliche Jordanzerlegungen von L beziehungsweise von C_N^k.
Wegen $(*)$ und Satz 3.1.31 sind $\langle \overline{a}_1, \cdots, \overline{a}_n \rangle$ und $\langle \overline{a'}_1, \cdots, \overline{a'}_{n'} \rangle$ bzw. $\langle \overline{b}_1, \cdots, \overline{b}_m \rangle$ und $\langle \overline{b'}_1, \cdots, \overline{b'}_{m'} \rangle$ in der gleich Wittgruppe über $\mathbb{F}_p$. Es gilt also, dass $n = n'$ und $m = m'$. Da außerdem $\det(\langle \overline{a}_1, \cdots, \overline{a}_n \rangle) = \det(\langle \overline{a'}_1, \cdots, \overline{a'}_n \rangle$ bzw. $\det(\langle \overline{b}_1, \cdots, \overline{b}_m \rangle) = \det(\langle \overline{b'}_1, \cdots, \overline{b'}_m \rangle$, haben L und C_N^k das gleiche p-adische Symbol. Wir erhalten nach Satz 3.2.29, dass $L \otimes \mathbb{Z}_p \cong C_N^k \otimes \mathbb{Z}_p$.

b) Sei $p = 2$.
Das Gitter C_N hat das 2-adische Symbol $1_I^{k_1} 2_I^{k_2}$. Für das Gitter L sind folgende 2-adische Symbole möglich:
$1_I^{k'_1} 2_{II}^{k'_2}$, $1_{II}^{k'_1} 2_I^{k'_2}$, $1_{II}^{k'_1} 2_{II}^{k'_2}$ und $1_I^{k'_1} 2_I^{k'_2}$
Die ersten beiden Möglichkeiten fallen weg, da Gitter mit diesem Symbol nicht stark N-modular sind (Analoge Argumentatione zum Beweis von Lemma 3.2.33).
Das 2-adische Symbol $1_{II}^{k'_1} 2_{II}^{k'_2}$ scheidet aus, da L ein ungerades Gitter ist. Es kommt also nur das Symbol $1_I^{k'_1} 2_I^{k'_2}$ in Frage. Es ist noch zu ziegen, dass $k_1 = k'_1$ und $k_2 = k'_2$. Aber wäre dies nicht der Fall, so wäre $\det(L) \neq \det(C_N^k)$ und dies leitet einen Widerspruch ein. Nach 3.2.29 folgt, dass $\mathbb{Z}_2 \otimes L \cong \mathbb{Z}_2 \otimes C_N^k$.

2 . Fall N wird nicht von p geteilt.
Die Gitter L und C_N^k sind regulär.
Ist $p \neq 2$, so folgt die Behauptung mit Satz 3.1.36, da L und C_N^k die gleiche Determinante und Dimension haben.
$p = 2$: Da L und C_N^k ungerade Gitter sind, folgt die Behauptung direkt mit 3.2.32. □

4 Ungerade Gitter und ihr Schatten

4.1 Der Begriff des Schattens

Für ungerade Gitter ist die zugehörige Modulgruppe kleiner als die der geraden Gitter. Jedoch bekommt man durch den zugehörigen Schatten mehr Struktur. Die Theta-Reihe des Schattens lässt sich aus der Theta-Reihe des Gitters berechnen.

Im folgendem sei L ein ganzes Gitter der Dimension $n = 2k$.

Definition 4.1.1 Ist L ungerade, so heißt

$$\mathrm{Sh}(L) := L^{\#}_{ev} \setminus L^{\#}$$

der **Schatten** von L. Ist L gerade, so setzt man $\mathrm{Sh}(L) := L^{\#}$.

Definition 4.1.2 Ein Vektor v des $\mathbb{R}^n$ heißt **charakteristicher Vektor** von L, falls

$$(v,w) \equiv (w,w) \mod 2 \text{ für alle } w \in L.$$

Die Menge $\chi(L)$ heißt **Menge der charakteristischen Vektoren**.

Bemerkung 4.1.3 Es gilt, dass $\mathrm{Sh}(L) = \frac{1}{2}\chi(L)$.

Beweis: Um die Gleicheit der Mengen von Vektoren zu zeigen, zeigen wir beide Inklusionen.

$\subseteq$ Wegen $|L_{ev}^{\#} : L^{\#}| = \dfrac{\sqrt{\det(L^{\#})}}{\sqrt{\det(L_{ev}^{\#})}} = \dfrac{\sqrt{\det(L_{ev})}}{\sqrt{\det(L)}} = |L : L_{ev}| = 2,$ erhalten wir, dass
$L_{ev}^{\#} = L^{\#} \dot{\cup} \left(y + L^{\#}\right)$, mit $y \in L_{ev}^{\#} \setminus L^{\#}$. Daraus folgt, dass $\mathrm{Sh}(L) = y + L^{\#}$.
Wir werden zeigen, dass für alle $l \in \mathrm{Sh}(L)$ gilt, dass
$(2l,x) \equiv (x,x) \mod 2$ für alle $x \in L$.
Sei also $l \in Sh(L)$. Für den Fall, dass $x \in L_{ev},$ folgt, dass
$(2l,x) = 2\underbrace{(l,x)}_{\in\mathbb{Z}} \equiv 0 \equiv (x,x) \mod 2.$

Sei also $x \in L \setminus L_{ev}$. Wir können jedes $l \in \mathrm{Sh}(L)$ schreiben als $l = y + w,$ mit $w \in L^{\#}$.
Weiter ist $L = L_{ev} \dot{\cup} \left(x' + L_{ev}\right)$ mit $x' \in L \setminus L_{ev}$. Dann ist $(y,x') \notin \mathbb{Z},$ jedoch $(y,x') \in \dfrac{1}{2}\mathbb{Z},$
da $(y,2x') \in \mathbb{Z}$. Es existiert ein $z \in L_{ev},$ so dass $x = x' + z$.
Somit ist also $(x,l) = (x'+z, y+w) = \underbrace{(x',y)}_{\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}} + \underbrace{(x',w)}_{\in\mathbb{Z}} + \underbrace{(z,y)}_{\in\mathbb{Z}} + \underbrace{(z,w)}_{\in\mathbb{Z}} \in \dfrac{1}{2}\mathbb{Z}$
und daraus folgt, dass $(2l,x) = 2\underbrace{(l,x)}_{\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}} \equiv 1 \equiv (x,x) \mod 2.$

$\supseteq$ Sei $\dfrac{1}{2}\chi(L) \ni w = \dfrac{v}{2},$ wobei v ein charakteristischer Vektor ist.
Für ein $x \in L_{ev}$ ist $(w,x) \in \mathbb{Z}$. Es ist also $w \in L_{ev}^{\#}$.
Ist $x \in L \setminus L_{ev},$ so ist $\mathbb{Z} \setminus 2\mathbb{Z} \ni (x,x) \equiv (v,x)$ und somit ist $(w,x) \notin \mathbb{Z}$ und damit $w \notin L^{\#}$.
Insgesamt folgt also, dass $w \in L_{ev}^{\#} \setminus L^{\#} = Sh(L)$.

Allgemeiner kann man den Begriff des Schattens auch für Gitter, die ganz über $\mathbb{Z}_2$ sind, definieren. Analog setzt man $L_{ev} = \{x \in L \mid (x,x) \in 2\mathbb{Z}_2\}$ und dann $\mathrm{Sh}(L) = L_{ev}^{\#} \setminus L^{\#}$. Dabei ist nun natürlich $L^{\#} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x,l) \in \mathbb{Z}_2 \ \ \forall\, l \in L\}$.

Definition 4.1.4 Sei $\Pi \subseteq \mathbb{P}$. Analog zum Π-Dual eines Gitters definiteren wir den Π-**Schatten** Sh_Π. Ist $2 \in \Pi$, so defnieiren wir

$$\mathrm{Sh}_\Pi(L) = \mathrm{Sh}(L^{\#_{\overline{\Pi}}}).$$

Ist $2 \notin \Pi$, so defnieiren wir

$$\mathrm{Sh}_\Pi(L) = \sqrt{l_2}\,\mathrm{Sh}(\sqrt{l_2}L^{\#_{\overline{\Pi}}}),$$

wobei l_2 die Stufe von $L^{\#,\{2\}}$ ist.

Bemerkung 4.1.5 Es ist $\mathrm{Sh}_{\mathbb{P}}(L) = \mathrm{Sh}(L)$ eine Restklasse nach $L^{\#}$ und $\mathrm{Sh}_{\emptyset}(L)$ eine Restklasse nach L.

Satz 4.1.6 *Sei L gerader Dimension $n = 2k$, dann gilt*

$$\theta_{\mathrm{Sh}(L)}(z) = \sqrt{\det(L)}\,\left(\tfrac{\mathrm{i}}{z}\right)^k \theta_L\left(1-\tfrac{1}{z}\right)$$

Beweis:

(i) Zeige, dass $\theta_{L_{ev}}(z) = \frac{1}{2}\left(\theta_L(z) + \theta_L(z+1)\right)$. Es ist

$$\begin{aligned}\theta_{L_{ev}}(z) &= \frac{1}{2}\Big(\sum_{x\in L} \mathrm{e}^{\pi\,\mathrm{i}\,z\,(x,x)} + \sum_{x\in L}(-1)^{(x,x)}\,\mathrm{e}^{\pi\,\mathrm{i}\,z\,(x,x)}\Big)\\ &= \frac{1}{2}\Big(\sum_{x\in L} \mathrm{e}^{\pi\,\mathrm{i}\,z\,(x,x)} + \sum_{x\in L} \mathrm{e}^{\pi\,\mathrm{i}\,(z+1)\,(x,x)}\Big)\\ &= \frac{1}{2}(\theta_L(z) + \theta_L(z+1)).\end{aligned}$$

(ii) Wegen $\mathrm{Sh}(L) = L^{\#}_{ev} \setminus L^{\#}$ und $L^{\#} \subseteq L^{\#}_{ev}$, gilt mit der Theta-Transformationsformel, dass

$$\begin{aligned}\theta_{\mathrm{Sh}(L)}(z) &= \theta_{L^{\#}_{ev}}(z) - \theta_{L^{\#}}(z)\\ &= (\tfrac{\mathrm{i}}{z})^k \sqrt{\det(L_{ev})}\,\theta_{L_{ev}}(-\frac{1}{z}) - (\tfrac{\mathrm{i}}{z})^k \sqrt{\det(L)}\,\theta_L(-\frac{1}{z})\\ &= (\tfrac{\mathrm{i}}{z})^k 2\sqrt{\det(L)}\;\frac{1}{2}\left(\theta_L(-\frac{1}{z}) + \theta_L(-\frac{1}{z}+1)\right) - (\tfrac{\mathrm{i}}{z})^k \sqrt{\det(L)}\,\theta_L(-\frac{1}{z})\\ &= (\tfrac{\mathrm{i}}{z})^k \sqrt{\det(L)}\;\theta_L(1-\frac{1}{z}).\end{aligned}$$

Satz 4.1.7 *Sei L ein 2-modulares Gitter der Dimension $n = 2k$. Dann gilt, dass*

$$\theta_{\mathrm{Sh}_{\emptyset}(L)}(z) = \theta_{\mathrm{Sh}(L)}(2z).$$

Beweis: Es ist

$$\theta_{\mathrm{Sh}_{\emptyset}(L)}(z) = \theta_{\sqrt{2}\,\mathrm{Sh}(\sqrt{2}L^{\#})}(z) = \theta_{\mathrm{Sh}(\sqrt{2/2}\,L)}(2z) = \theta_{\mathrm{Sh}(L)}(2z).$$

Beispiel 4.1.8 Betrachen wir das Standardgitter $\mathbb{Z}$. Das Gitter ist unimodular und es gilt, dass $(\mathbb{Z}_{ev})^{\#} = \left(\frac{1}{2}+\mathbb{Z}\right)\,\dot\cup\,\mathbb{Z}$. Daraus folgt, dass $\mathrm{Sh}(\mathbb{Z}) = \frac{1}{2}+\mathbb{Z}$ und somit ist

$$\theta_{Sh(\mathbb{Z})}(z) = 2\sum_{m=0}^{\infty} \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i} z (m+\frac{1}{2})^2} = 2\,\mathrm{e}^{\pi \mathrm{i} z \frac{1}{4}} \sum_{m=0}^{\infty} \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i} z m (m+1)}$$

Satz 4.1.9 *Sei L ein unimodulares Gitter der Dimension n. Dann gilt, dass*

$$\theta_{\mathrm{Sh}(L)}(z) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{8} \rfloor} a_j \, \theta_{\mathrm{Sh}(\mathbb{Z})}^{n-8j}(z) \theta_{\mathrm{E}_8}^{j}(z)$$

Beweis: Nach Folgerung 2.4.13 ist $\theta_L = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{8} \rfloor} a_j \theta_{\mathbb{Z}}^{n-8j} \theta_{\mathrm{E}_8}^{j}$. Da E_8 ein gerades unimodulares Gitter ist, erhalten wir mit der Theta-Transformationsformel und Satz 4.1.6, dass

$$\begin{aligned}
\theta_{\mathrm{Sh}(L)}(z) &= (\frac{\mathrm{i}}{z})^{\frac{n}{2}} \theta_L(1-\frac{1}{z}) \\
&= (\frac{\mathrm{i}}{z})^{\frac{n}{2}} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{8} \rfloor} a_j \, (\theta_{\mathbb{Z}}(1-\frac{1}{z}))^{n-8j} (\theta_{\mathrm{E}_8}(1-\frac{1}{z}))^{j} \\
&= (\frac{i}{z})^{\frac{n}{2}} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{8} \rfloor} a_j \, (\frac{\mathrm{i}}{z})^{-\frac{n-8j}{2}} (\theta_{\mathrm{Sh}(\mathbb{Z})}(z))^{n-8j} (\theta_{\mathrm{E}_8}(-\frac{1}{z}))^{j} \\
&= (\frac{\mathrm{i}}{z})^{\frac{n}{2}} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{8} \rfloor} a_j \, (\frac{\mathrm{i}}{z})^{-\frac{n-8j}{2}} (\theta_{\mathrm{Sh}(\mathbb{Z})}(z))^{n-8j} (\frac{\mathrm{i}}{z})^{-4j} (\theta_{\mathrm{E}_8^{\#}}(z))^{j} \\
&= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{8} \rfloor} a_j \, (\theta_{\mathrm{Sh}(\mathbb{Z})}(z))^{n-8j} (\theta_{\mathrm{E}_8}(z))^{j}.
\end{aligned}$$

Allgemeiner kann man sagen:

Definition 4.1.10 Es sei

$$\mathcal{M}'(\Gamma_0(N), \chi) = < \theta_L \mid L \text{ liegt im Geschlecht der stark } N-\text{modularen Gitter}, \dim(L) \in \mathbb{N} >$$

$$= \bigoplus_k < \theta_L \mid L \text{ liegt im Geschlecht der stark } N-\text{modularen Gitter } \dim(L) = 2k \text{ mit } k \in \mathbb{N} >$$

$$= \bigoplus_k \mathcal{M}'_k(\Gamma_0(N), \chi).$$

Wir defninieren die Abbildung

$$\mathrm{Sh} : \mathcal{M}'_k(\Gamma_0(N), \chi) \longrightarrow \mathrm{M}, \;\; f_k \longmapsto N^{\frac{k}{2}} (\frac{\mathrm{i}}{z})^k f_k(1-\frac{1}{z}),$$

wobei M den Raum der meromorphen Funktionen bezeichnet. Diese Abbildung kann auf $\mathcal{M}'(\Gamma_0(N), \chi)$ fortgesetzt werden, indem
$f = \sum_k f_k \mapsto \sum_k N^{\frac{k}{2}} (\frac{\mathrm{i}}{z})^k f_k(1-\frac{1}{z})$. Ebenso wird $f_k \cdot f_l \mapsto N^{\frac{k}{2}} (\frac{\mathrm{i}}{z})^k f_k(1-\frac{1}{z}) \cdot N^{\frac{l}{2}} (\frac{\mathrm{i}}{z})^l f_l(1-\frac{1}{z})$.
Wie man also leicht sieht, ist Sh ein Ringhomomorphismus.

Folgerung 4.1.11 *Sei L ein stark N-modulares Gitter der Dimension $2k$. Dann ist $\theta_L \in \mathcal{M}'(\Gamma_0(N),\chi)$ und es gilt nach Satz 4.1.6, dass*

$$\mathrm{Sh}(\theta_L) = \theta_{\mathrm{Sh}(L)}.$$

Bemerkung 4.1.12 Sei L ein unimodulares Gitter der Dimension n. Die Quadratlänge der charakteristischen Vektoren von L ist konguent n modulo 8.

Beweis: Nach Satz 4.1.9 ist

$$\theta_{\mathrm{Sh}(L)}(z) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{8} \rfloor} a_j \, \theta_{\mathrm{Sh}(\mathbb{Z})}^{n-8j}(z)\theta_{\mathrm{E}_8}^{j}(z).$$

Weiter ist nach Beispiel 4.1.8

$$\theta_{\mathrm{Sh}(\mathbb{Z})}^{n-8j}(z) = 2^{n-8j}\, \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i} z \frac{n-8j}{4}} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i} z m(m+1)} \right)^{n-8j}.$$

Da $m(m+1)$ für alle $m \in \mathbb{N}$ gerade ist und E_8 ein gerades Gitter ist, folgt,
dass $(l,l) \equiv \frac{n}{4}$ modulo 2 für alle $l \in \mathrm{Sh}(L)$. Ist $l \in \mathrm{Sh}(L)$, so ist $2l \in \chi(L)$. Insgesamt folgt, da $(2l,2l) = 4(l,l) \equiv n$ modulo 8 genau dann, wenn $(l,l) \equiv \frac{n}{4}$ modulo 2, die Behauptung. □

Folgerung 4.1.13 *Ist L ein gerades unimodulares Gitter, so ist der Nullvektor ein charakteristischer Vektor von L. Nach Bemerkung 4.1.12 ist somit die Dimension eines geraden unimodularen Gitters durch 8 teilbar.*

4.2 Stark modulare Gitter und ihr Schatten

Wir werden nun Eigenschaften von stark modularen Gittern mit langem Schatten untersuchen. Dabei benutzen wir Ergebnisse aus [RS98].

Sei L ein stark N-modulares Gitter mit $N \in \mathcal{N} := \{1,2,3,5,6,7,11,14,15,23\}$.
Es heißt

$$D_N := 24\sigma_0(N) \,/\, \sigma_1(N)$$

die **kritische Dimension**. In unserem Fall ergibt sich

N	1	2	3	5	6	7	11	14	15	23
D_N	24	16	12	8	8	6	4	4	4	2

Satz 4.2.1 *Sei $N \in \mathcal{N}$. Weiter sei L ein stark N-modulares Gitter der Dimension n, das rational äquivalent zu C_N^l ist. Definiere $l := n / \dim(C_N)$. Dann gilt, dass*

$$\min(L) \leq \begin{cases} 3, & \text{falls } N \text{ ungerade und } n = D_N - \dim(C_N) \\ 2\lfloor \frac{n}{D_N} \rfloor + 2, & \text{sonst} \end{cases}.$$

*Die Gitter, deren Minimum gleich der oben angegebenen Schranke ist, heißen **extremal**.*

Beweis: Um die Behauptung dieses Satzes zu zeigen, benutzt man die Ergebnisse aus Satz 4.2.2. Dieser Satz sagt, dass

$$\theta_L(z) = g_1^{(N)}(z)^k \sum_{i=0}^{\lfloor kl_N \rfloor} c_i g_2^{(N)}(z)^i$$

beziehungsweise, dass

$$\theta_{\mathrm{Sh}}(z) = s_1^{(N)}(z)^k \sum_{i=0}^{\lfloor kl_N \rfloor} c_i s_2^{(N)}(z)^i,$$

wobei die Funktionen g_1, g_2, s_1, s_2 im Folgendem definiert werden. Eine Strategie, um die Behauptung zu zeigen, ist zu benutzen, dass die Koeffizienten c_i in der Theta-Reihe des Gitters gleich den Koeffizienten der Theta-Reihe des Schattens sind. Nimmt man an, dass das Minimum des Gitters größer als behauptet ist, so kann man einen Widerspruch einleiten, indem man mit der Theta-Reihe des Gitters zeigt, dass ein bestimmter Koeffizient echt kleiner als Null ist und mit der Theta-Reihe des Schattens zeigt, dass dieser Koeffizient größer oder gleich Null ist. Für den genaueren Beweis dieses Satzes verweisen wir auf [RS98, Theorem 2]. □

Sei

$$\Gamma_0(4N)^+ := \langle \Gamma_0(4N), \mathrm{W}_m \mid m || 4N \rangle .$$

Für ein Untergruppe $U \leq \Gamma$ definieren wir

$$\frac{1}{2}U := \{ \begin{pmatrix} a & 2b \\ c/2 & d \end{pmatrix}) \mid \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) \in U \}$$

Weiter sei $\chi^{(N)}$ ein Charakter von $\frac{1}{2}\Gamma_0(4N)^+$, so dass θ_{C_N} invariant ist und sei $w_N = \frac{\sigma_0(N)}{2}$ das Gewicht von θ_{C_N}. Dann gilt für ein Gitter L, das die Voraussetzungen von 4.2.1 erfüllt, dass

$$\theta_L \in \mathcal{M}_{l w_N} \left(\frac{1}{2}\Gamma_0(4N)^+, (\chi^{(N)})^l \right)$$

Für den Beweis dieser Behauptung verweisen wir auf [RS98, Seite 18].

Sei $q := \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i} z}$. Weiter sei $N \in \mathcal{N}$ fest und wir setzen

$$g_1^{(N)}(z) := \theta_{C_N}(z) = 1 + 2q + 2ev(N)q^2 + \cdots ,$$

wobei

$$ev(N) := \begin{cases} 1, & \text{falls } N \text{ gerade} \\ 0, & \text{falls } N \text{ ungerade} \end{cases}.$$

Es bezeichen η die Dedekindsche Eta-Funktion

$$\eta(z) := q^{\frac{1}{12}} \prod_{m=1}^{\infty} (1-q^{2m}).$$

Wir setzen

$$\eta^{(N)}(z) := \prod_{d|N} \eta(dz).$$

Ist N ungerade, so definieren wir

$$g_2^{(N)}(z) := \left(\frac{\eta^{(N)}(z/2)\,\eta^{(N)}(2z)}{\eta^{(N)}(z)^2} \right)^{s(N)},$$

ist N gerade, dann definieren wir

$$g_2^{(N)}(z) := \left(\frac{\eta^{(N/2)}(z/2)\,\eta^{(N/2)}(4z)}{\eta^{(N/2)}(z)\,\eta^{(N/2)}(2z)} \right)^{s(N)}.$$

Dann hat $g_2^{(N)}$ die Form

$$g_2^{(N)} = q - s(N)q^2 + \cdots.$$

Sei $\sigma_1(N) := \sum_{d|N} d$ die Summe der Teiler von N. Weiter sei $\mathrm{s}(N) := \frac{24}{\sigma_1(N)}$.

Satz 4.2.2 *Seien $N \in \mathcal{N}$ und L ein stark N-modulares Gitter, das rational äquivalent zu C_N^k ist. Definiere $l_N := \frac{1}{8}\sigma_1(N)$, falls N ungerade ist und $l_N := \frac{1}{6}\sigma_1(N)$, falls N gerade ist. Dann gilt*

$$\theta_L(z) = g_1^{(N)}(z)^k \sum_{i=0}^{\lfloor kl_N \rfloor} c_i g_2^{(N)}(z)^i$$

mit $c_i \in \mathbb{R}$. Die Theta-Reihe des reskalierten Schatten $\mathrm{Sh} := \sqrt{N}\,\mathrm{Sh}(L)$ *von L ist*

$$\theta_{\mathrm{Sh}}(z) = s_1^{(N)}(z)^k \sum_{i=0}^{\lfloor kl_N \rfloor} c_i s_2^{(N)}(z)^i$$

wobei $s_1^{(N)}$ und $s_2^{(N)}$ die zugehörigen Schatten zu $g_1^{(N)}$ und $g_2^{(N)}$ sind. Ist N ungerade, so ist

$$s_1^{(N)}(z) = 2^{\sigma_0(N)} \frac{\eta^{(N)}(2z)^2}{\eta^{(N)}(z)}$$

und

$$s_2^{(N)}(z) = -2^{-\mathrm{s}(N)\sigma_0(N)/2}\left(\frac{\eta^{(N)}(z)}{\eta^{(N)}(2z)}\right)^{\mathrm{s}(N)}.$$

Ist $N = 2$*, so ist*

$$s_1^{(2)}(z) = \frac{2\eta(z)^5\eta(4z)^2}{\eta(z/2)^2\eta(2z)^3}$$

und

$$s_2^{(2)}(z) = -\frac{1}{16}\left(\frac{\eta(z/2)\eta(2z)^2}{\eta(z)^2\eta(4z)}\right)^8.$$

Für $N = 6,14$ *ergibt sich, dass*

$$s_1^{(N)} = s_1^{(2)}(z)s_1^{(2)}\left(\frac{N}{2}z\right)$$

und

$$s_2^{(N)} = -(s_2^{(2)}(z)s_2^{(2)}\left(\frac{N}{2}\right))^{\mathrm{s}(N)/\mathrm{s}(2)}.$$

Beweis: Für den Beweis dieses Satzes verweisen wir auf [RS98, Theorem 3, Korollar 3]. □

Berechnet man die Funktionen aus Satz 4.2.2 genauer, so erhält man die folgenden Ergebnisse. Ist N ungerade, dann ist

$$g_2^{(N)}(z) = q\prod_{m=1}^{\infty}\prod_{d|N}(1+q^{2md})^{\mathrm{s}(N)}\cdot(1+q^{md})^{-\mathrm{s}(N)},$$

$$s_1^{(N)}(z) = 2^{\sigma_0(N)}q^{\frac{\sigma_1(N)}{4}}\prod_{m=1}^{\infty}\prod_{d|N}(1-q^{4md})\cdot(1+q^{2md}),$$

$$s_2^{(N)}(z) = -2^{-\mathrm{s}(N)\frac{\sigma_0(N)}{2}}q^{-2}\prod_{m=1}^{\infty}\prod_{d|N}(1+q^{2md})^{-\mathrm{s}(N)}.$$

Ist $N = 2,6,14$, dann ist

$$g_2^{(N)} = q\prod_{m=1}^{\infty}\prod_{d|(N/2)}(1+q^{4md})^{\mathrm{s}(N)}\cdot(1+q^{md})^{-\mathrm{s}(N)},$$

$$s_1^{(2)}(z) = 2q^{\frac{1}{2}}\prod_{m=1}^{\infty}\frac{(1-q^m)^2\cdot(1+q^m)^4\cdot(1+q^{4m})^2}{(1+q^{2m})},$$

$$s_1^{(6)}(z) = 4q^2\prod_{m=1}^{\infty}\frac{(1-q^m)^2\cdot(1+q^m)^4\cdot(1+q^{4m})^2\cdot(1-q^{3m})^2\cdot(1+q^{3m})^4\cdot(1+q^{12m})^2}{(1+q^{2m})\cdot(1+q^{6m})},$$

$$s_1^{(14)}(z) = 4q^4 \prod_{m=1}^{\infty} \frac{(1-q^m)^2 \cdot (1+q^m)^4 \cdot (1+q^{4m})^2 \cdot (1-q^{7m})^2 \cdot (1+q^{7m})^4 \cdot (1+q^{28m})^2}{(1+q^{2m}) \cdot (1+q^{14m})},$$

$$s_2^{(2)}(z) = -\frac{1}{16} q^{-1} \prod_{m=1}^{\infty} \left(\frac{(1+q^{2m})}{(1+q^m) \cdot (1+q^{4m})} \right)^8,$$

$$s_2^{(6)}(z) = -\frac{1}{4} q^{-1} \prod_{m=1}^{\infty} \left(\frac{(1+q^{2m}) \cdot (1+q^{6m})}{(1+q^m) \cdot (1+q^{4m}) \cdot (1+q^{3m}) \cdot (1+q^{12m})} \right)^2,$$

$$s_2^{(14)}(z) = -\frac{1}{2} q^{-1} \prod_{m=1}^{\infty} \frac{(1+q^{2m}) \cdot (1+q^{14m})}{(1+q^m) \cdot (1+q^{4m}) \cdot (1+q^{7m}) \cdot (1+q^{28m})}.$$

Folgerung 4.2.3 *Ist N ungerade, dann beginnt* $s_1^{(N)}$ *mit* $q^{\sigma_1(N)/4}$ *und* $s_2^{(N)}$ *beginnt mit* q^{-2}. *Ist N gerade, dann beginnt* $s_1^{(N)}$ *mit* $q^{\sigma_1(\frac{N}{2})/2}$ *und* $s_2^{(N)}$ *beginnt mit* q^{-1}.

5 Bekannte Ergebnisse

5.1 Unimodulare Gitter von Minimum 2 mit langem Schatten

Wir wollen den ersten Abschnitt des Artikels [Elk95b] von N.D. Elkies erläutern, in dem Elkies unimodulare Gitter und deren Schatten untersucht. Dieser Abschnitt soll die Anwendung der Theorie der Modulformen auf Gittern motivieren.

Bemerkung 5.1.1 Sei L ein ganzes Gitter, so gilt

$$L \cong \mathbb{Z}^r \perp L_0,$$

wobei $\min(L_0) = 2$.

Beweis: Sei $v \in L$ mit $(v,v) = 1$. Dann ist der von v erzeugte bilineare Modul $< v >$ regulär und nach Satz 2.1.5 kann man v orthogonal abspalten. □

Sei im weiteren L ein unimodulares Gitter. Geht man zu dem in Bemerkung 5.1.1 eingeführtem reduzierten Gitter L_0 über, so ändert sich der Rang des zu betrachtenden Gitters um r. Außerdem ändert sich das Minimum der charakteristischen Vektoren. Ist $a \in \mathbb{Z}$ mit $\min(\chi(L)) = \dim(L) - 8a$, so ist $\min(\chi(L_0)) = \dim(L_0) - 8a$. Um also unimodulare Gitter und deren Schatten zu untersuchen, kann man also von einem Gitter mit Minimum 2 ausgehen und später beliebig viele $\mathbb{Z}$ orthogonal dazuaddieren. Elkies betrachtet deswegen ohne Einschränkung Gitter von Minimum 2.
Das Ziel ist es nun den folgenden Satz zu beweisen.

Satz 5.1.2 *Sei L ein ganzes, unimodulares Gitter im $\mathbb{R}^n$, das keine Vektoren der Länge 1 enthält. Es gilt:*

(i) *L hat mindestens $2n(23-n)$ Vektoren der Länge 2.*

(ii) *L hat genau $2n(23-n)$ Vektoren der Länge 2 genau dann wenn L keine charakteristischen Vektoren der Länge echt kleiner als $n-8$ enthält.*

(iii) *Hat L genau $2n(23-n)$ Vektoren der Länge 2, dann ist die Anzahl der charakteristischen Vektoren der Länge $n-8$ gleich $2^{n-11}n$.*

Beweis: Nach Folgerung 2.4.13 ist

$$\theta_L = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{8} \rfloor} a_j \theta_{\mathbb{Z}}^{n-8j} \theta_{\mathrm{E}_8}^{j}$$

und nach Satz 4.1.9 ist

$$\theta_{\mathrm{Sh}(L)}(z) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{8} \rfloor} a_j \, \theta_{\mathrm{Sh}(\mathbb{Z})}^{n-8j}(z) \theta_{\mathrm{E}_8}^{j}(z).$$

Dabei ist

$$\theta_{\mathrm{Sh}(\mathbb{Z})}^{n-8j}(z) = 2^{n-8j}\, \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i} z \frac{n-8j}{4}} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i} z m(m+1)} \right)^{n-8j} = 2^{n-8j}\, \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i} z \frac{n-8j}{4}} (1 + \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} z} + \mathrm{e}^{6\pi \mathrm{i} z} + \mathrm{e}^{12\pi \mathrm{i} z} + \cdots)^{n-8j}$$

und

$$\theta_{E_8}(t) = 1 + 240 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^3\, \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} m t}}{1 - \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} m t}} = 1 + 240\, \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} t} + 2160\, \mathrm{e}^{4\pi \mathrm{i} t} + \cdots$$

Hier sieht man direkt, dass der kleinste Exponent von $\theta_{\mathrm{Sh}(\mathbb{Z})}$, das heißt $n - 8\lfloor \frac{n}{8} \rfloor$, gleich der Länge des kürzesten charakteristischen Vektors ist. Zeigen wir zuerst Teil (ii) der Behauptung: Angenommen L hat keine charakteristischen Vektoren der Länge echt kleiner als $n-8$, dann ist θ_L eine Linearkombination aus $\theta_{\mathbb{Z}}^n$ und $\theta_{\mathbb{Z}}^{n-8}\theta_{E_8}^8$. Ausserdem wissen wir, dass L keine Vektoren der Länge 1 und einen Vektor der Länge 0 enthält. Unter Benutzung der Tatsache, dass $\theta_{\mathbb{Z}}^n = \theta_{\mathbb{Z}^n}$ folgt einerseits, dass $\mathbb{Z}^n$ genau $2n$ Vektoren der Länge 1 und einen Vektor der Länge 0 enthält und andererseits, dass $\mathbb{Z}^{n-8}E_8$ genau $2(n-8)$ Vektoren der Länge 1 und einen der Länge 0 enthält. Daraus folgt, dass $a_0 + a_1 = 1$ und $2na_0 + a_1 2(n-8) = 0$. Somit ist also $a_0 = 1 - \frac{n}{8}$ und $a_1 = \frac{n}{8}$. Die Theta-Reihe von L hat also folgende Gestalt.

$$\theta_L = \theta_{\mathbb{Z}}^n - \frac{n}{8}\theta_{\mathbb{Z}}^{n-8}(\theta_{\mathbb{Z}}^8 - \theta_{E_8}) = 1 + 0\, \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i} t} + 2n(23-n)\, \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} t} + \cdots . \quad (*)$$

Also ist eine Richtung von (ii) gezeigt.
Nehmen wir nun an, L habe höchstens $2n(23-n)$ Vektoren der Länge 2. Daraus folgt direkt, dass $n < 24$, da die Anzahl von Vektoren natürlich nicht negativ sein darf. Somit sind höchstens die Koeffizienten a_0, a_1 und a_2 ungleich 0. Mit den gleichen Überlegungen wie zuvor, folgt dann, dass

$$\theta_L = \theta_{\mathbb{Z}}^n - \frac{n}{8}\theta_{\mathbb{Z}}^{n-8}(\theta_{\mathbb{Z}}^8 - \theta_{E_8}) + \frac{N_2 - (2n(23-n))}{16^2}\theta_{\mathbb{Z}}^{n-16}(\theta_{\mathbb{Z}}^8 - \theta_{E_8})^2.$$

Es bezeichne N_i die Anzahl der Vektoren der Länge i in L und N_i' die Anzahl der Vektoren der Länge i in $\chi(L)$. So erhalten wir für die Anzahl der charakteristischen Vektoren der Länge $n-16$:

$$N_{n-16}' = 2^{n-16}\left(\frac{N_2 - (2n(23-n))}{16^2} \right) = 2^{n-24}\left(N_2 - (2n(23-n))\right)$$

Da $N'_{n-16} \geq 0$ folgt, dass $N_2 \geq 2n(23-n)$. Damit der Teil (i) des Satzes gezeigt.
Man erhält nur dann $N_2 = 2n(23-n)$, wenn N'_{n-16} verschwindet. Somit folgt (ii).
Um (iii) zu zeigen benutzen wir (*) und erhalten, dass

$$\theta_{\mathrm{Sh}(L)} = \theta^n_{\mathrm{Sh}(\mathbb{Z})} - \frac{n}{8}\theta^{n-8}_{\mathrm{Sh}(\mathbb{Z})}(\theta^8_{\mathrm{Sh}(\mathbb{Z})} - \theta_{E_8}) = 2^{n-11} n\, \mathrm{e}^{(n-8)\pi i t} + \cdots$$

Somit ist der Satz bewiesen. □

5.2 Unimodulare Gitter von Minimum größer als 3 mit langem Schatten

Unter Zuhilfenahme von Theta-Reihen mit sphärischen Koeffizienten untersuchten Nebe und Venkov in [NV03] unimodulare Gitter mit Minimum größer gleich 3, deren charakteristische Vektoren Minimum größer gleich $n-16$ haben. Folgende Ergebnisse wurden gefunden.

Satz 5.2.1 *Ist L ein ungerades unimodulares Gitter der Dimension n, $\min(L) \geq 3$ und $\min(\chi(L)) \geq n-16$, dann ist $23 \leq n \leq 46$.*

Satz 5.2.2 *Ist L ein ungerades unimodulares Gitter der Dimension 46, $\min(L) = 3$ und $\min(\chi(L)) = 30$, dann gilt $L \cong O_{23} \perp O_{23}$, wobei O_{23} das kürzere Leech Gitter ist.*

Satz 5.2.3 *Es gibt kein unimodulares Gitter L der Dimension 45 und $\min(L) = 3$, so dass gilt $\min(\chi(L)) = 45-16$.*

Satz 5.2.4 *Es gibt kein unimodulares Gitter L der Dimension 44 und $\min(L) = 3$, so dass gilt $\min(\chi(L)) = 44-16$.*

5.3 Stark modulare Gitter mit langem Schatten

Hier werden die wesentlichen Ergebnisse aus [Neb04] zitiert.

Definieren wir

$$\min_0(\mathrm{Sh}(L)) := \min\{(v,v) \in \mathrm{Sh}(L) \mid v \in \mathrm{Sh}(L)\}$$

und für $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $k \in \mathbb{N}$

$$M^{(N)}(m,k) := \begin{cases} \frac{1}{N}(k\frac{\sigma_1(N)}{4} - 2m), & \text{falls } N \text{ ungerade} \\ \frac{1}{N}(k\frac{\sigma_1(N/2)}{2} - m), & \text{falls } N \text{ gerade} \end{cases}$$

Satz 5.3.1 *Sei $N \in \mathcal{N}$ und L ein stark N-modulares Gitter, das rational äquivalent zu C_N^k ist. Dann gilt:*

(i) *Für ein $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ist $\min_0(\mathrm{Sh}(L)) = M^{(N)}(m,k)$.*

(ii) *Ist $\min_0(\mathrm{Sh}(L)) = M^{(N)}(0,k)$, dann ist $L \cong C_N^k$.*

(iii) *Ist $\min_0(\mathrm{Sh}(L)) = M^{(N)}(m,k)$, dann ist $L \cong C_N^a \perp L'$, wobei L' ein stark N-modulares Gitter, das rational äquivalent zu C_N^{k-a} ist, mit $\min(L') \geq 2$ und $\min_0(Sh(L')) = M^{(N)}(m,k-a)$.*

(iv) *Ist $\min_0(\mathrm{Sh}(L)) = M^{(N)}(1,k)$ und $\min(L) \geq 2$, dann ist die Anzahl der Vektoren der Länge 2 in L gleich*

$$2k(\mathrm{s}(N) + ev(N) - (k+1)).$$

Insbesondere ist $k \leq k_{\max}(N)$ mit

$$k_{\max}(N) = \mathrm{s}(N) - 1 + ev(N)$$

und falls $k = k_{\max}(N)$, dann ist $\min(L) \geq 3$.

Für den Beweis dieses Satzes verwendet man hauptsächlich 4.2.2. So folgt (i) direkt mit 4.2.3.

Definition 5.3.2 Sei L ein Gitter. Ist $\min_0(\mathrm{Sh}(L)) = M^{(N)}(m,k)$, so heißt der Schatten **m+1 längster Schatten**.

Die folgende Tabelle gibt die maximale Dimension $n_{\max}(N) = \sigma_0(N)k_{\max}(N)$, in der die stark N-modualren Gitter, die rational äquivalent zu C_N^k sind, mit Minimum 2 und 2 längstem Schatten existieren können, an:

N	1	2	3	5	6	7	11	14	15	23
$k_{\max}$	23	8	5	3	2	2	1	1	0	0
$n_{\max}$	23	16	10	6	8	4	2	4	0	0

6 Neue Erbebnisse

6.1 Stark N-modulare Gitter mit langem Schatten

Sei $N \in \{1,2,3,5,6,7,11,14,15,23\}$ und $k \in \mathbb{N}$. Es bezeichne $\mathcal{L}_N(k)$ die Menge aller Gitter L, die folgende Eigenschaften haben.

1. L ist stark N-modular.
2. L hat Minimum 3 und sein Schatten hat Minimum $M^N(2,k)$.
3. L ist rational äquivalent zu C_N^k.

Weiter bezeichne

$$\mathcal{L}_N := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{L}_N(k)$$

und

$$\mathcal{L} := \bigcup_{N\in\mathcal{N}} \mathcal{L}_N.$$

Nach Satz 4.2.2 können wir mit geeigneten Koeffizienten die Theta-Reihen der Gitter aus $\mathcal{L}$ berechnen. Ist $L \in \mathcal{L}_N(k)$, so hat seine Theta-Reihe die folgende Form

$$\theta_L(z) = g_1^{(N)}(z)^k \sum_{i=0}^{\lfloor kl_N \rfloor} c_i g_2^{(N)}(z)^i$$

mit $c_i \in \mathbb{R}$. Die Theta-Reihe des rescalierten Schatten $\mathrm{Sh} := \sqrt{N}\,\mathrm{Sh}(L)$ von L ist

$$\theta_{\mathrm{Sh}(L)}(z) = s_1^{(N)}(z)^k \sum_{i=0}^{\lfloor kl_N \rfloor} c_i s_2(N)(z)^i.$$

Dabei sind nach Satz 4.2.2

$$g_1^{(N)}(z) := \theta_{\mathrm{C}_N}(z) = 1 + 2q + 2ev(N)q^2 + \cdots,$$

wobei

$$ev(N) := \begin{cases} 1, & \text{falls } N \text{ gerade} \\ 0, & \text{falls } N \text{ ungerade} \end{cases}$$

und

$$g_2^{(N)} = q - s(N)q^2 + \cdots .$$

Nach Folgerung 4.2.3 wissen wir ausserdem, dass $s_1^{(N)}$ mit $q^{\sigma_1(N)/4}$ und $s_2^{(N)}$ mit q^{-2} beginnt, falls N ungerade und $s_1^{(N)}$ mit $q^{\sigma_1(\frac{N}{2})/2}$ und $s_2^{(N)}$ mit q^{-1} beginnt, falls N gerade ist.

Bemerkung 6.1.1 Ist $N \in \mathcal{N}$ ungerade, so können wir wegen der Form von $s_1^{(N)}$ und $s_2^{(N)}$ folgern, dass die Länge der Schattenvektoren im folgendem Verhältnis zur Dimension n von $L \in \mathcal{L}_N$ steht. Sei $s \in \mathrm{Sh}(L)$ und $(s,s) \equiv \bar{s} \mod 2$, dann gilt

N	1	3	5	7	11	15	23
$\bar{s}$	$\frac{n}{4}$	$\frac{n}{2}$	$\frac{3n}{4}$	n	$\frac{3n}{4}$	$\frac{3n}{4}$	$3n$

.

Beweis: Wegen $s_1^{(N)}(z) = 2^{\sigma_0(N)} q^{\frac{\sigma_1(N)}{4}} \prod_{m=1}^{\infty} \prod_{d|N} (1-q^{4md}) \cdot (1+q^{2md})$ und $s_2^{(N)}(z) = -2^{-\mathrm{s}(N)\frac{\sigma_0(N)}{2}} q^{-2} \prod_{m=1}^{\infty} \prod_{d|N} (1+q^{2md})^{-\mathrm{s}(N)}$ folgt direkt die Behauptung. □

Folgerung 6.1.2 *Seien $N \in \mathcal{N}$ ungerade und $L \in \mathcal{L}_N$ gerade der Dimension n. Dann gilt*

N	*1*	*3*	*5*	*7*	*11*	*15*	*23*
n	$\equiv_8 0$	$\equiv_4 0$	$\equiv_8 0$	$\equiv_2 0$	$\equiv_8 0$	$\equiv_4 0$	$\equiv_2 0$

.

Da wir Gitter mit Schattenminimum $M^N(2,k) = \begin{cases} \frac{1}{N}(k\frac{\sigma_1(N)}{4} - 4), & \text{falls } N \text{ ungerade} \\ \frac{1}{N}(k\frac{\sigma_1(N/2)}{2} - 2), & \text{falls } N \text{ gerade} \end{cases}$ betrachten wollen, folgt wegen der Form von $s_1^{(N)}$ und $s_2^{(N)}$, dass $c_i = 0$ für alle $i \geq 3$. Benutzen wir nun noch, dass $\min(L) = 3$, dann erhalten wir folgenden Bedingungen.

1 . Fall: Sei N ungerade.
Dann ist $c_0 = 1$, $c_0 \cdot 2k + c_1 = 0$ und $c_0 \frac{k(k-1)}{2} 4 + c_1(2k - s(N)) + c_2 = 0$.
Daraus folgt, dass $c_0 = 1$ und $c_1 = -2k$ und $c_2 = -2k(-1-k+s(N))$.
Es ist dann

$$g_1^{(N)} = 1 + 2q + 2h(N)q^3 + \ldots \qquad h(N) := \begin{cases} 2 & \text{, falls } 3|N \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

und

$$g_2^{(N)} = q - s(N)q^2 + \frac{s(N)(s(N)+1)}{2} q^3.$$

Daraus ergibt sich die Anzahl der Vektoren der Norm 3 als

$$\begin{array}{ll} (\frac{14}{3} - 5s(N) + 3s(N)^2) \cdot k + (1-s(N)) \cdot 4k^2 + \frac{4}{3}k^3 & \text{, falls } 3|N \\ (\frac{8}{3} - 5s(N) + 3s(N)^2) \cdot k + (1-s(N)) \cdot 4k^2 + \frac{4}{3}k^3 & \text{, falls } 3 \nmid N \end{array} .$$

2 . Fall: Sei N gerade.
Dann ist $c_0 = 1$, $c_0 \cdot 2k + c_1 = 0$ und $c_0(2k + \frac{k(k-1)}{2}4) + c_1(2k - s(N)) + c_2 = 0$.
Somit ist $c_0 = 1$ und $c_1 = -2k$ und $c_2 = -2k(-k + s(N))$. Es ist dann

$$g_1^{(N)} = 1 + 2q + 2q^2 + f_1(N)q^3 ... \qquad f_1(N) := \begin{cases} 6 & \text{, falls } N = 6 \\ 4 & \text{, sonst} \end{cases}$$

und

$$g_2^{(N)} = q - s(N)q^2 + f_2(N)q^3 + ... \qquad f_2(N) := \begin{cases} 28 & \text{, falls } N = 2 \\ 1 & \text{, falls } N = 6 \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}.$$

Daraus ergibt sich die Anzahl der Vektoren der Norm 3 als

$$\begin{array}{ll} \frac{608}{3}k - 32k^2 + \frac{4}{3}k^3 & \text{falls } N = 2 \\ \frac{56}{3}k - 8k^2 + \frac{4}{3}k^3 & \text{falls } N = 6 \\ \frac{20}{3}k - 4k^2 + \frac{4}{3}k^3 & \text{falls } N = 14 \end{array}.$$

Die Koeffizienten c_i sind nun also eindeutig bestimmt. Man kann nun die ersten Terme der Theta-Reihen, erzeugt von $g_1^{(N)}$ und $g_2^{(N)}$, berechnen. Enthält die q Entwicklung einer solchen Theta-Reihe einen negativen Koeffizienten, so kann es zu dieser Theta-Reihe natürlich kein Gitter geben, da die Anzahl von Vektoren einer bestimmten Länge nicht negativ sein kann.

Bemerkung 6.1.3 Sei $L \in \mathcal{L}_1(k)$, so folgt, dass $k \geq 23$.

Beweis: Da $L \in \mathcal{L}_1$, ist L ganz und unimodular. Die Behauptung folgt direkt mit Satz 5.1.2. □

Wegen der Form von $\theta_L(z)$ und der Bedingung $c_0, c_1, c_2 \neq 0$, bekommen wir eine untere Schranke an die Dimension der Gitter aus $\mathcal{L}$.

N	1	2	3	5	6	7	11	14	15	23
$k_{\min}$	23	4	4	3	1	2	2	1	1	1
$n_{\min}$	23	8	8	6	4	4	4	4	4	2

Bemerkung 6.1.4 Die oben angegebene Schranke kann man mit Hilfe von Satz 4.2.1 deutlich verbessern und erhält:

N	1	2	3	5	6	7	11	14	15	23
$k_{\min}$	23	8	5	3	2	2	2	1	1	1
$n_{\min}$	23	16	10	6	8	4	4	4	4	2

Satz 6.1.5 *Sei L ein stark N-modulares Gitter mit Minimum 3 und* $\min_0(\mathrm{Sh}(L)) = M^N(1,k)$. *Dann ist* $M := L \perp L \in \mathcal{L}_N(2k)$.

Beweis: Klar, dass M Minimum 3 hat und stark N-modular ist. Da $\theta_{L\perp L} = \theta_L \cdot \theta_L$, erhält man mit der Schattentransformation, dass $\theta_{\mathrm{Sh}(L\perp L)} = \theta_{\mathrm{Sh}(L)} \cdot \theta_{\mathrm{Sh}(L)}$. Somit ist $\min_0(\mathrm{Sh}(L \perp L)) = 2 \cdot \min_0(\mathrm{Sh}(L))$. Ist N ungerade, so folgt, dass

$$\min_0(\mathrm{Sh}(M)) = 2 \cdot M^N(1,k) = 2 \cdot \tfrac{1}{N}(k\,\tfrac{\sigma_1(N)}{4} - 2) = \tfrac{1}{N}(k\,\tfrac{\sigma_1(N)}{2} - 4) = M^N(2,2k).$$

Ist N gerade, so folgt, dass

$$\min_0(\mathrm{Sh}(M)) = 2 \cdot M^N(1,k) = 2 \cdot \tfrac{1}{N}(k\,\tfrac{\sigma_1(N/2)}{2} - 1) = \tfrac{1}{N}(k\sigma_1(N/2) - 2) = M^N(2,2k). \qquad \square$$

6.2 Anwendung gerader Gitter zur Klassifikation ungerader Gitter

Wir wollen nun, wenn möglich, zu den berechneten Theta-Reihen, Gitter finden. Dabei ist eine Vorgehensweise die Knesersche Nachbarschaftsmethode direkt auf die Gitter C_N^k anzuwenden. Ist deren Geschlecht bestimmt, so wissen wir nämlich nach Satz 3.2.34, dass die gesuchten Gitter aus $\mathcal{L}_N(k)$ darin liegen müssen.

In hohen Dimensionen ist die Nutzung der Kneserschen Nachbarschaftmethode, mit Hilfe des Rechners, aus technischen Gründen nicht möglich. Jedoch kann man in einigen Fällen die Laufzeit des Algorithmus deutlich verringern. Die Idee dabei ist einen geraden 2-Nachbar von C zu konstruieren und darauf die Knesersche Nachbarschaftmethode mit $p = 2$ anzuwenden.
Dabei muss nachgeprüft werden, ob gerade 2-Nachbarn von C existieren.

Bemerkung 6.2.1 Sei L ein ungerades Gitter und M ein gerader 2-Nachbar von L, so gilt, dass

$$M \subseteq L_{ev}^{\#} \cap \frac{1}{2}L.$$

Beweis: Da M ein gerader Nachbar von L ist und L ungerade ist, folgt dass $L_{ev} \subseteq M$. Da außerdem $|M/L_{ev}| = 2$, gilt, dass $M =< L_{ev}, v >$ mit $2v \in L_{ev}$ und $v \notin L_{ev}$. Daraus folgt, dass $v \in \frac{1}{2}L_{ev} \subseteq \frac{1}{2}L$. Somit wissen schon, dass $M \subseteq \frac{1}{2}L$. Da M und L_{ev} ganze Gitter sind, ist $M \subseteq L_{ev}^{\#}$ und es folgt die Behauptung. $\square$

6.2.1 Gitter mit ungerader Determinante

Wir wollen nun gerade 2-Nachbarn von C_N^k mit ungerader Determinante, also mit $N \in \{3,5,7,11,15,23\} := \mathcal{N}_o$, suchen. In diesem Abschnitt sei also $N \in \mathcal{N}_o$ und

$$C := C_N^k = \begin{cases} < e_1,...,e_k > \perp < e_{k+1},...,e_{2k} > & N \neq 15 \\ < e_1,...,e_k > \perp < e_{k+1},...,e_{2k} > \perp < e_{2k+1},...,e_{3k} > \perp < e_{3k+1},...,e_{4k} > & N = 15 \end{cases}.$$

Weiter bezeichne Z_i die zyklische Gruppe der Ordnung i.

Satz 6.2.2 *Es gilt, dass*

$$(\frac{1}{2}C \cap C_{ev}^{\#})/C_{ev} \cong Z_2 \times Z_2 .$$

Beweis: Sei $n = \dim(C)$, d.h. $n = 4k$ für geeignetes k, falls $N = 15$ und $n = 2k$ für geeignetes k sonst. Da $C_{ev} = \langle 2e_1, e_2 + e_1, ..., e_n + e_1 \rangle$ und $C_{ev}^{\#} = \langle e_1, ..., e_{n-1}, \frac{1}{2}(e_1 + ... + e_n) \rangle$ mit

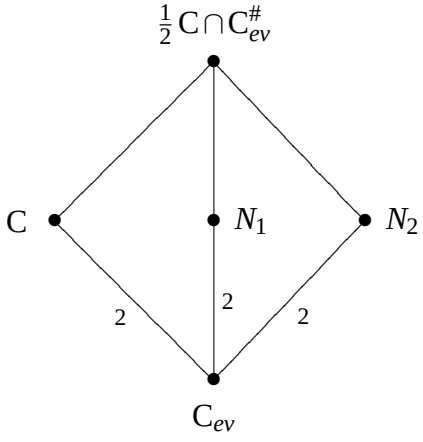
$i)$ $e_i + C_{ev} = e_j + C_{ev}$ für alle $1 \leq i, j \leq n$

$ii)$ $\frac{1}{2}(e_1 + ... + e_n) + C_{ev} \neq \frac{1}{2}(-e_1 + ... + e_n) + C_{ev}$

$iii)$ $\frac{1}{2}(-e_1 + ... + e_n) + C_{ev} = \frac{1}{2}(e_1 + ... - e_j + ... + e_n) + C_{ev}$ für alle $1 \leq j \leq n$

erhalten wir, dass
$(\frac{1}{2}C \cap C_{ev}^{\#}/C_{ev}) =< e_1 + C_{ev},\ \frac{1}{2}(e_1 + ... + e_n) + C_{ev},\ \frac{1}{2}(-e_1 + ... + e_n) + C_{ev},\ C_{ev} >$.
Da nur die Gruppen Z_4 und $Z_2 \times Z_2$ der Ordnung 4 existieren, genügt es zu zeigen, dass $\frac{1}{2}C \cap C_{ev}^{\#}/C_{ev}$ kein Element der Ordnung 4 enthält. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Elemente $(\frac{1}{2}(e_1 + ... + e_n) + C_{ev})$ und $(\frac{1}{2}(-e_1 + ... + e_n) + C_{ev})$ nicht die Ordnung vier haben, das heißt also wenn $(e_1 + ... + e_n) \in C_{ev}$ und $(-e_1 + ... + e_n) \in C_{ev}$. So erhalten wir, dass $\frac{1}{2}C \cap C_{ev}^{\#}/C_{ev} \cong Z_2 \times Z_2$ genau dann wenn $k(1+N) \equiv 0 \bmod 2$ für $N \neq 15$ beziehungsweise $k(1+3+5+15) = 24k \equiv 0 \bmod 2$ für $N = 15$. Es folgt die Behauptung. □

Folgerung 6.2.3 $C = \langle C_{ev}, e_1 \rangle$, $N_1 := \langle C_{ev}, \frac{1}{2}(e_1 + ... + e_n) \rangle$ *und*
$N_2 := \langle C_{ev}, \frac{1}{2}(-e_1 + ... + e_n) \rangle$ *sind die einzigen Untergitter von* $\frac{1}{2}C \cap C_{ev}^{\#}$, *in denen* C_{ev} *Index 2 hat. Das heißt also* N_1 *und* N_2 *sind die einzigen* 2*-geraden Nachbarn von* C.



Diese Struktur von C_N^k vererbt sich auch auf die Gitter aus $\mathcal{L}_N(k)$, wie man an der folgenden Bemerkung sieht.

Bemerkung 6.2.4 Für $N \in \mathcal{N}_o$ sei $L \in \mathcal{L}_N(k)$. Es gilt, dass

$$(\frac{1}{2}L \cap L_{ev}^{\#})/L_{ev} \cong Z_2 \times Z_2 \,.$$

Beweis: Seien X, Y, Vektorräume, sodass $C \subseteq X$ und $L \subseteq Y$ und $\alpha_p : C \otimes \mathbb{Z}_p \to L \otimes \mathbb{Z}_p$ eine Isometrie, deren Existenz klar ist, da C und L im gleichen Geschecht liegen. Zuerst zeigen wir, dass $\alpha_p((C_{ev})_p) = (L_{ev})_p$ für alle $p \in \mathbb{P}$.

$$\begin{aligned}
1.\ \alpha_p((C_{ev})_p) &= \alpha_p(\{x \in C_p \mid (x,x) \equiv_2 0\}) \\
&= \{\alpha_p(x) \mid x \in C_p, (x,x) \equiv_2 0\} \\
&= \{\alpha_p(x) \mid x \in C_p, (\alpha_p(x), \alpha_p(x)) = (x,x) \equiv_2 0\} \\
&= \{y \in L_p \mid (y,y) \equiv_2 0\} \\
&= (L_p)_{ev} = (L_{ev})_p
\end{aligned}$$

Wir zeigen jetzt noch, dass $\alpha_p(C_{ev}^{\#}) = L_{ev}^{\#}$ für alle $p \in \mathbb{P}$.

$$\begin{aligned}
2.\ \alpha_p(C_{ev}^{\#}) &= \alpha_p(\{y \in X_p \mid (y,x) \in \mathbb{Z} \ \forall\, x \in C_{ev}\}) \\
&= \{\alpha_p(y) \mid y \in X_p, (y,x) \in \mathbb{Z} \ \forall\, x \in C_{ev}\} \\
&= \{z \in Y_p \mid (z, \alpha_p(x)) = (\alpha_p^{-1}(z), x) \in \mathbb{Z} \ \forall\, x \in C_{ev}\} \\
&= \{z \in Y_p \mid (z,x) \in \mathbb{Z} \ \forall x \in L_{ev}\} \\
&= L_{ev}^{\#}
\end{aligned}$$

Aus 1. und 2. folgt, dass $\alpha_p(\ ((\frac{1}{2}C \cap C_{ev}^{\#})/C_{ev})_p\ ) = ((\frac{1}{2}L \cap L_{ev}^{\#})/L_{ev})_p$ für alle $p \in \mathbb{P}$ und damit erhalten wir die Behauptung. □

Folgerung 6.2.5 *Das Gitter $L \in \mathcal{L}_N$ besitzt auch genau zwei* 2*-Nachbarn. Analog zum Beweis des vorhergehenden Satzes kann man zeigen, dass die* 2*-Nachbarn von C und die* 2*-Nachbarn von L im gleichen Geschlecht liegen.*

Nun ist noch zu untersuchen, ob die Gitter N_1 und N_2 gerade sind. Dazu müsen wir testen, wann die Norm des Vektors $\frac{1}{2}(e_1 + ... + e_n)$ gerade ist. Dies genügt, da
$(\frac{1}{2}(e_1 + ... + e_n), \frac{1}{2}(e_1 + ... + e_n)) = (\frac{1}{2}(-e_1 + ... + e_n), \frac{1}{2}(-e_1 + ... + e_n))$. Ist die Norm gerade, so folgt, dass sowohl N_1 als auch N_2 gerade 2-Nachbarn von C sind.

Fall 1 : Sei $N \neq 15$, also Primzahl.
Das Gitter N_1 beziehungsweise N_2 ist genau dann gerade, wenn
$(\frac{1}{2}(e_1 + ... + e_{2k}), \frac{1}{2}(e_1 + ... + e_{2k})) \equiv 0 \bmod 2$. Dies ist genau dann der Fall, wenn

$\frac{1}{4}(k+k\cdot N)\equiv 0 \bmod 2$. Daraus ergeben sich folgende Bedingungen an k.
Ist $N=3$, so erhalten wir die Bedingung $k\equiv 0 \bmod 2$.
Ist $N=5$, so erhalten wir die Bedingung $\frac{3}{2}k\equiv 0 \bmod 2$, das heißt also $3k\equiv 0 \bmod 4$.
Ist $N=7$, so erhalten wir die Bedingung $2k\equiv 0 \bmod 2$, das heißt die Bedingung ist für alle $k\in\mathbb{N}$ erfüllt.
Ist $N=11$, so erhalten wir die Bedingung $3k\equiv 0 \bmod 2$, das heißt also $k\equiv 0 \bmod 2$.
Ist $N=23$, so erhalten wir die Bedingung $6k\equiv 0 \bmod 2$, das heißt die Bedingung ist für alle $k\in\mathbb{N}$ erfüllt.

Fall 2 : Sei $N=15$.
Das Gitter N_1 beziehungsweise N_2 ist genau dann gerade, wenn $(\frac{1}{2}(e_1+...+e_{2k}),\frac{1}{2}(e_1+...+e_{2k}))\equiv 0 \bmod 2$, das heißt also $\frac{1}{4}(k+3k+5k+15k)\equiv 0 \bmod 2$. Das ist äquivalent dazu, dass $6k\equiv 0 \bmod 2$. Die Bedingung ist also für alle $k\in\mathbb{N}$ erfüllt.

In den Fällen, in denen ein gerader Nachbar existiert, ist Vorgehensweise, um einen geraden Nacharbn von L zu finden die folgende:

1. Berechne einen geraden Nachbarn N_1 von C.

2. Berechne das Geschlecht von N_1. Dies kann mit $p=2$ durchgeführt werden, da 2 nicht $\det(N)$ teilt. (Es ist nämlich $(e_1+e_i,\frac{1}{2}(e_1+,...,e_n))\equiv_2 1$ für alle $1\leq i\leq n$.)
Dabei speichert man bei der Bestimmung des Geschlechts nach Satz 3.2.24 immer einen gerade und eine ungeraden Nachbarn von N in zwei verschiedene Listen ab.

6.2.2 Gitter mit gerader Determinante

In diesem Abschnitt behandeln wir Gitter aus $\mathcal{L}$ mit gerader Determinante. Es bezeichne also

$$\mathrm{C}:=\mathrm{C}^k_{(2\cdot p)}=\begin{cases} <e_1,...,e_k>\perp<f_1,...,f_k>\perp<g_1,...,g_k>\perp<h_1,...,h_k>, & \text{falls } p\in\{3,7\}\\ <e_1,...,e_k>\perp<g_1,...,g_k>, & \text{falls } p=1\end{cases}$$

und n die Dimension von C.

Analog zu Satz 6.2.2 kann man auch hier $(\frac{1}{2}\mathrm{C}\cap\mathrm{C}^{\#}_{ev})/\mathrm{C}_{ev}$ betrachten. Es gilt, dass

$$(\tfrac{1}{2}\mathrm{C}\cap\mathrm{C}^{\#}_{ev})/\mathrm{C}_{ev}\cong\mathbb{F}_2^{\frac{n}{2}+2}.$$

Beweis: Ist $p=1$, so seien $F:=0$ und $H:=0$. Da $\mathrm{C}_{ev}=\underbrace{\langle 2e_1,e_2+e_1,...,f_k+e_1\rangle}_{=:EF_{ev}}\perp G\perp H$ und $\mathrm{C}^{\#}_{ev}=\langle e_1,...,f_{k-1},\frac{1}{2}(e_1+...+f_k)\rangle\perp G^{\#}\perp H^{\#}$ folgt, dass $\frac{1}{2}\mathrm{C}\cap\mathrm{C}^{\#}_{ev}=\mathrm{C}^{\#}_{ev}\perp\frac{1}{2}G\perp\frac{1}{2}H$.

Wegen

$$\begin{aligned}
&i) \quad e_i + EF_{ev} = e_j + EF_{ev} = f_m + EF_{ev} = f_l + EF_{ev} \text{ für alle } 1 \leq i,j,m,l \leq k \\
&ii) \quad \frac{1}{2}(e_1 + ... + f_k) + EF_{ev} \neq \frac{1}{2}(-e_1 + ... + f_k) + EF_{ev} \\
&iii) \quad \frac{1}{2}(-e_1 + ... + f_k) + EF_{ev} = \frac{1}{2}(e_1 + ... - e_j + ... + f_k) + EF_{ev} \\
&\qquad = \frac{1}{2}(e_1 + ... - f_i + ... + f_k) + EF_{ev} \text{ für alle } 1 \leq j,i \leq k
\end{aligned}$$

erhalten wir, dass

$$\begin{aligned}
(\frac{1}{2}\mathrm{C} \cap \mathrm{C}_{ev}^{\#} / \mathrm{C}_{ev}) &= < e_1 + EF_{ev},\ \frac{1}{2}(e_1 + ... + f_k) + EF_{ev},\ \frac{1}{2}(-e_1 + ... + f_k) + EF_{ev},\ EF_{ev} > \\
&\quad \perp (\frac{1}{2}G) + G \perp (\frac{1}{2}H) + H.
\end{aligned}$$

Um die Behauptung zu zeigen genügt es zu zeigen, dass
$< e_1 + EF_{ev},\ \frac{1}{2}(e_1 + ... + f_k) + EF_{ev},\ \frac{1}{2}(-e_1 + ... + f_k) + EF_{ev},\ EF_{ev} >$ kein Element der Ordnung 4 enthält. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Elemente $(\frac{1}{2}(e_1 + ... + f_k) + EF_{ev})$ und $(\frac{1}{2}(-e_1 + ... + f_k) + EF_{ev})$ nicht Ordnung vier haben, das heißt $(e_1 + ... + f_k) \in EF_{ev}$ und $(-e_1 + ... + f_k) \in EF_{ev}$. Das ist äquivalent dazu, dass $k(1+p) \equiv 0 \bmod 2$. Da diese Bedingung immer erfällt ist, folgt die Behauptung. □

Folgerung 6.2.6 $\mathrm{C}_{(2\cdot p)}^{k}$ *hat also* $(2^{2k+2} - 2)$ 2*-Nachbarn für* $p \in \{3,7\}$.

Verwendet man hier also das Verfahren, das wir bei den Gitter mit ungerader Determinante verwendet haben, so sind sehr viele 2-Nachbarn zu konstruieren, deswegen benutzen wir in diesem Fall meistens den folgenden Satz.

Satz 6.2.7 *Sei L ein ungerades,* $\{2\}$*-modulares Gitter, so dass Dimension und oddity durch 4 teilbar sind. Dann ist* $L' = \sqrt{2}L_{ev}^{\#_2}$ *ein ganzes Gitter und* $L'' = (L')'$ *ist ein gerades* $\{2\}$*-modulares Gitter, das rational äquivalent zu L ist. Weiter ist jede Modularität von L auch eine von* L''*. Die Theta-Reihe von* L'' *ist gegeben durch*

$$\theta_{L''} = \frac{1}{2}\left\{\theta_L(z) + \theta_L(z+1) + \theta_{\mathrm{Sh}_{\emptyset}(L)}(z) + \theta_{Sh_{\emptyset}(L)}(z+1)\right\}.$$

Beweis: Für den Beweis dieses Satzes verweisen wir auf [RS98, Theorem 8]. □

In dem Fall, dass N gleich 2 ist, kann man nach Satz 4.1.7 die Theta-Reihe von L'' leicht bestimmen. Ist jedoch N gleich 6 oder 14, ist es schwer zu sehen welche Form $\theta_{\mathrm{Sh}_{\emptyset}(L)}(z)$ hat. Man kann die Theta-Reihe von L'' jedoch anders bestimmen. Dazu berechnet man die ersten Paar Gitter M_i aus dem Geschlecht von C_N^k. Von diesen berechnet man dann die Theta-Reihen, mit denen man dann die Theta-Reihe der Gitter aus $\mathcal{L}_N(k)$ linear kombinieren kann. Mit den gleichen Linearfaktoren kombiniert man die Theta-Reihen der Gitter M_i'' und erhalt somit die Theta-Reihe von L''.

Folgerung 6.2.8 *Um die Bedingungen des vorhergehenden Satzes zu erfüllen muss 2 die Determinante des Gitters teilen. Denn angenommen* $2 \nmid \det(L)$, *dann ist* $L^{\#_{\{2\}}} = L^{\#} \cap \frac{1}{2^0} L = L$. *Dies leitet einen Widerspruch ein, da gelten würde, dass* $L \ncong \sqrt{2} L^{\#_{\{2\}}}$.
Also können wir diesen Satz bei geeigneter Dimension und oddity anwenden. Die Voraussetzung an die oddity ist durch die Bedingung $n \equiv 0$ *mod* 4 *erfüllt.*

1. *Sei* $L := \mathrm{C}_2^N$. *Dann ist* $N \equiv 0$ *mod* 2, *da* $n \equiv 0$ *mod* 4. *Die Grammatrix von L ist eine Diagonalmartix der Form* $\mathrm{Diag}(2^0 \cdot 1, ..., 2^0 \cdot 1, 2^1 \cdot 1, ..., 2^1 \cdot 1)$. *Es gibt keine Antisquares. Es folgt, dass* $O(L) = N \cdot 1 + N \cdot 1 = 2N \equiv 0$ *mod* 4.

2. *Sei* $L := C_6^N$. *Die Grammatrix von L ist eine Diagonalmartix der Form* $\mathrm{Diag}(2^0 \cdot 1, ..., 2^0 \cdot 1, 2^1 \cdot 1, ..., 2^1 \cdot 1, ..., 2^0 \cdot 3, ..., 2^0 \cdot 3, 2^1 \cdot 3, ..., 2^1 \cdot 3)$. *Es ist* $2^1 \cdot 3$ *der einzige Antisquare. Es folgt, dass* $O(L) = N \cdot 1 + N \cdot 1 + N \cdot 3 + N \cdot 3 + N \cdot 4 = 12N \equiv 0$ *mod* 4.

3. *Sei* $L := C_{14}^N$. *Die Grammatrix von L ist eine Diagonalmartix der Form* $\mathrm{Diag}(2^0 \cdot 1, ..., 2^0 \cdot 1, 2^1 \cdot 1, ..., 2^1 \cdot 1, ..., 2^0 \cdot 7, ..., 2^0 \cdot 7, 2^1 \cdot 7, ..., 2^1 \cdot 7)$. *Es gibt keine Antisqaures. Es folgt, dass* $O(L) = N \cdot 1 + N \cdot 1 + N \cdot 7 + N \cdot 7 = 14N \equiv 0$ *mod* 4.

Wir wollen nun die Konstruktion aus Satz 6.2.7 für $p \in \{3, 7\}$ durchführen.

Es ist $\mathrm{C}_{ev} = \overbrace{< 2e_1,\ e_1 + e_2, ..., e_1 + e_k,\ e_1 + f_1, ..., e_1 + f_k >}^{EF_{ev}} \perp G \perp H$ und
$\mathrm{C}_{ev}^{\#} = (EF_{ev})^{\#} \perp G^{\#} \perp H^{\#}$ mit $(EF_{ev})^{\#} =< e_1, ..., e_k,\ f_1, ..., f_{k-1},\ \frac{1}{2}(\sum_{i=1}^k e_i + \sum_{i=1}^k f_i) >$.
Damit erhalten wir, dass

$$\begin{aligned} \mathrm{C}' &= \sqrt{2}(\mathrm{C}_{ev}^{\#} \cap \frac{1}{2}\,\mathrm{C}_{ev}) = \sqrt{2}((EF_{ev})^{\#} \cap \frac{1}{2} EF_{ev} \perp G^{\#} \cap \frac{1}{2} G \perp H^{\#} \cap \frac{1}{2} H) \\ &= \sqrt{2}(EF_{ev})^{\#} \perp \frac{1}{\sqrt{2}} G \perp \frac{1}{\sqrt{2}} H, \end{aligned}$$

da $\frac{1}{2}(\sum_{i=1}^k e_i + \sum_{i=1}^k f_i) = -k e_1 + \sum_{i=1}^k \frac{1}{2}(e_1 + e_i) + \sum_{i=1}^k \frac{1}{2}(e_1 + f_i) \in \frac{1}{2} EF_{ev}$ und offensichtlich $e_i,\ f_i \in \frac{1}{2} EF_{ev}$. $(*)$
Nun wollen wir diese Konstruktion nochmal durchführen, um C'' zu erhalten. Das Gitter $(EF_{ev})^{\#}$ ist wegen $(\frac{1}{2}(\sum_{i=1}^k e_i + \sum_{i=1}^k f_i)\ , \frac{1}{2}(\sum_{i=1}^k e_i + \sum_{i=1}^k f_i)) = \frac{1}{4}(k + pk) \in \mathbb{Z}$ ganz, da $p \in \{3, 7\}$.
Daraus folgt, dass $\sqrt{2}(EF_{ev})^{\#}$ gerade ist und somit erhalten wir, dass
$(\mathrm{C}')_{ev} = \sqrt{2}(EF_{ev})^{\#} \perp \frac{1}{\sqrt{2}} < 2g_1, (g_1 + g_2), ..., (g_1 + g_k),\ (g_1 + h_1), ..., (g_1 + h_k) >$. Daraus folgt, dass $(\mathrm{C}')_{ev}^{\#} = \frac{1}{\sqrt{2}} EF_{ev} \perp \frac{1}{\sqrt{2}} < g_1, ..., g_{k-1},\ h_1, ..., h_{k-1},\ \frac{1}{2}(\sum_{i=1}^k g_i + \sum_{i=1}^k h_i) >$ und so erhalten wir mit analoger Argumentation zu (*), dass

$$\mathrm{C}'' = \sqrt{2}((\mathrm{C}')_{ev}^{\#} \cap \frac{1}{2}(\mathrm{C}')_{ev}) = EF_{ev} \perp < g_1, ..., g_k,\ h_1, ..., h_{k-1},\ \frac{1}{2}(\sum_{i=1}^k g_i + \sum_{i=1}^k h_i) > .$$

Mit analogen Bezeichnungen kriegen wir folgenden Satz.

Satz 6.2.9 *Sei* $p \in \{3,7\}$*, so ist*

$$C'' = EF_{ev} \perp < g_1,...,g_k,\ h_1,...,h_{k-1},\ \frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{k} g_i + \sum_{i=1}^{k} h_i) >$$

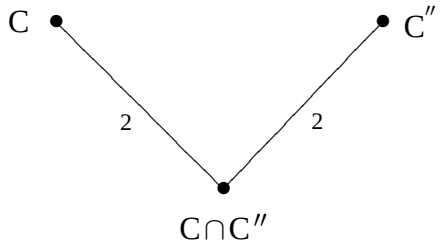
ein gerader Nachbar von $C = C^k_{(2\cdot p)}$.

Beweis: C'' ist gerade, da

$$(\frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{k} g_i + \sum_{i=1}^{k} h_i)\ ,\ \frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{k} g_i + \sum_{i=1}^{k} h_i)) = \frac{1}{4}(k\cdot 2 + k\cdot 2p) = \frac{k}{2}\cdot(1+p).$$

Ausserdem ist $C \cap C'' = EF_{ev} \perp G \perp H$ und somit folgt, dass $|C/C\cap C''| = |C''/C\cap C''| = 2$.□

Die folgende Skizze veranschaulicht dies.



Will man das gerade Teilgitter von C^k_2 konstruieren, so muss man noch eine Fallunterscheidung nach *k*, also nach der Dimension machen. Mit der gleichen Konstruktion erhalt man:

Satz 6.2.10 *Sei* $C := C^k_2$ *und* $\dim(C) = n = 2k$*, so ist*

$$C'' = \begin{cases} C'' =< 2e_1,\ e_2+e_1,...,e_k+e_1 > \perp < f_1,...,f_{k-1},\ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} f_i >, & \textit{falls } n \equiv 0 \textit{ mod } 8 \\ C'' =< 2e_1,\ e_1+e_2,...,e_1+e_k,\ e_1+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} f_i,\ f_1,...,f_{k-1} >, & \textit{sonst} \end{cases}$$

ein gerader Nachbar von C.

Beweis:

1. Sei *n* durch 8 teilbar.
   C'' ist gerade, denn $(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} f_i\ ,\ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} f_i) = \frac{1}{4}\cdot k\cdot 2 = \frac{k}{2}$. Ausserdem gilt, dass $C\cap C'' = \langle 2e_1, e_1+e_2,...,e_1+e_k, f_1,..., f_k\rangle$ und daraus folgt, dass $\left[C/C\cap C''\right] = \left[C''/C\cap C''\right] = 2$.
2. Sei *n* nicht durch 8 teilbar.
   C'' ist gerade, denn $(e_1+k\sum_{i=1}^{k} f_i\ ,\ e_1+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} f_i) = 1+\frac{1}{4}\cdot k\cdot 2 = 1+\frac{k}{2}$. Ausserdem gilt, dass $C\cap C'' = \langle 2e_1, e_1+e_2,...,e_1+e_k, f_1,..., f_k\rangle$. Daraus folgt, dass $\left[C/C\cap C''\right] = \left[C''/C\cap C''\right] = 2$

□

Im folgendem bezeichne $V := \mathrm{C} \cap \mathrm{C}''$.

Bemerkung 6.2.11

$$V^{\#}/V \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\frac{n}{4}} \oplus (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\frac{n}{4}} \oplus (\mathbb{Z}/(2\cdot p)\mathbb{Z})^{\frac{n}{4}}$$

Beweis: Nach 6.2.7 wissen wir, dass $|V^{\#}/V| = 4 \cdot (2\cdot p)^{\frac{n}{2}}$.

1 . Fall Sei $p \in \{3,7\}$.
Dann ist $V = \mathrm{C}_{ev} = \underbrace{< 2e_1, e_1+e_2, ..., e_1+e_{\frac{n}{4}}, e_1+f_1, ..., e_1+f_{\frac{n}{4}} >}_{=:W} \perp G \perp H$. Es ist also
$V^{\#} =< \frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{\frac{n}{4}} e_i + \sum_{i=1}^{\frac{n}{4}} f_i), e_1, W >_{\perp} G^{\#} \perp H^{\#}$. Es sind $2^{\frac{n}{4}}, (2\cdot p)^{\frac{n}{4}}$ Elementarteiler von V. Nun genügt es die Elementarteiler von W zu betrachten. Für die haben wir jetzt nur noch 2 Möglichkeiten, entweder $p^{\frac{n}{4}}, 4$ oder $p^{\frac{n}{4}}, 2^2$. Die erste Möglichkeit tritt genau dann ein, wenn $W^{\#}/W$ ein Element der Ordnung 4 enthält. Da $e_1 + W$ Ordnung 2 hat, müsste dann $\frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{\frac{n}{4}} e_i + \sum_{i=1}^{\frac{n}{4}} f_i) + W$ Ordnung 4 haben das heißt
$\sum_{i=1}^{\frac{n}{4}} e_i + \sum_{i=1}^{\frac{n}{4}} f_i \notin W$. Das ist äquivalent dazu, dass
$(\sum_{i=1}^{\frac{n}{4}} e_i + \sum_{i=1}^{\frac{n}{4}} f_i\,, \sum_{i=1}^{\frac{n}{4}} e_i + \sum_{i=1}^{\frac{n}{4}} f_i) = \frac{n}{4} + p\frac{n}{4} = \frac{n}{4}(1+p) \equiv_2 1$. Dies leitet jedoch einen Widerspruch ein, da $1+p$ gerade ist.

2 . Fall Sei $p = 1$. Dann ist $V = M_{ev} = \underbrace{< 2e_1, e_1+e_2, ..., e_1+e_{\frac{n}{2}} >}_{=:W} \perp F$. Es ist also
$V^{\#} =< \frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} e_i), e_1, W >_{\perp} F^{\#}$. Die Elementarteiler sind $2^{\frac{n}{2}}$. Für die Elementarteiler von W haben wir jetzt nur noch die 2 Möglichkeiten, nämlich 4 oder 2^2. Die erste Mölichkeit tritt genau dann ein, wenn $W^{\#}/W$ ein Element der Ordnung 4 enthält, das heißt $\frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} e_i)$ hat Ordnung 4. Das ist äquivalent dazu, dass
$(\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} e_i\,, \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} e_i) = \frac{n}{2} \equiv_2 1$. Dies leitet einen Widerspruch ein, da n durch 4 teilbar ist. □

Folgerung 6.2.12 *Es gilt, dass* $2\mathrm{C}'' + (2\cdot p)(\mathrm{C}'')^{\#} \subseteq V$.

Beweis: Nach 6.2.11 ist $(2p)V^{\#} \subseteq V$. Deswegen ist $(2p)(\mathrm{C}'')^{\#} \subseteq (2p)V^{\#} \subseteq V$. Da ausserdem $|\mathrm{C}''/V| = 2$ folgt sofort die Behauptung. □

Bemerkung 6.2.13 Es ist

$$\mathrm{C}''/((2\cdot p)(\mathrm{C}'')^{\#} + 2\mathrm{C}'') \cong \mathbb{F}_2^{\frac{n}{2}}$$

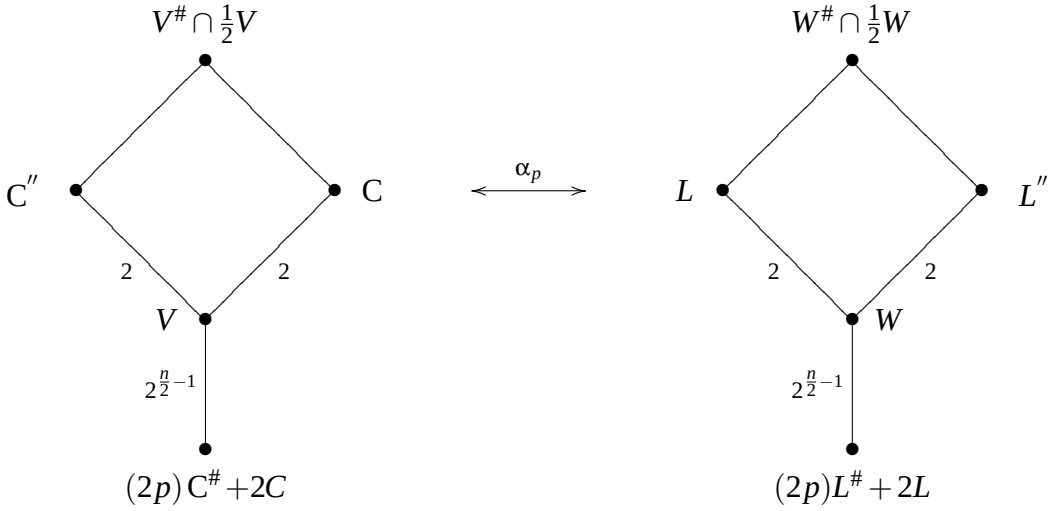
Beweis: Da $\mathrm{C}''/2\mathrm{C}'' \cong \mathbb{F}_2^n$, genügt es den 2-Anteil von $|\mathrm{C}''/(2\cdot p)(\mathrm{C}'')^{\#}|$ zu betrachten.
Sei $\overline{\mathrm{C}''} := \mathrm{C}'' \otimes \mathbb{Z}_2$ bzw. $\overline{\mathrm{C}} := \mathrm{C} \otimes \mathbb{Z}_2$. Dann ist $|\overline{\mathrm{C}''}^{\#}/\overline{\mathrm{C}''}| = \det(\overline{\mathrm{C}''}) = \det(\overline{\mathrm{C}}) = 2^{\frac{n}{2}}$. Damit erhalten wir die Behauptung, da $|\overline{\mathrm{C}''}/2\overline{\mathrm{C}''}^{\#}| = \dfrac{|\overline{\mathrm{C}''}^{\#}/2\overline{\mathrm{C}''}^{\#}|}{|\overline{\mathrm{C}''}^{\#}/\overline{\mathrm{C}''}|} = \dfrac{2^n}{2^{\frac{n}{2}}} = 2^{\frac{n}{2}}$. □

Bemerkung 6.2.14 Die in 6.2.7 definierte Konstruktion $'$ ist invariant unter $\mathbb{Z}_p$ Isometrien für alle $p \in \mathbb{P} \cup \infty$.

Beweis: Die Behauptung folgt mit dem Beweis von Bemerkung 6.2.4. □

Folgerung 6.2.15 *Seien L und M Gitter, die im gleichen Geschlecht liegen, so liegen ihre geraden Nachbarn L'' und M'' auch im gleichen Geschlecht.*

Sei $L \in \mathcal{L}_N$, N gerade und $W := L \cap L''$ und α_p eine $\mathbb{Z}_p$-Isometrie, so gilt für alle $p \in \mathbb{P} \cup \{\infty\}$:



Algorithmus 6.2.16 ***Gegeben:*** *Ein gerader Nachbar* C'' *von* C_N^k.
Gesucht: $\mathcal{L}_N(k)$

1) *Bestimme mit der Kneserschen Nachbarschaftsmethode das Geschlecht von* C''. *Füge alle stark* $(2p)$*-modularen Gitter in eine Liste* $\mathcal{K}$.

2) $\mathcal{L} = \emptyset$

3) *Führe jedes* $K \in \mathcal{K}$ *die folgenden Schritte durch:*

   a) *Konstruktion aller Teilgitter vom Index 2 von* K*:*
      i. $\mathcal{W} := \emptyset$
      ii. *Berechne alle möglichen Vertreter* T_i *der Bahnen von* $\mathrm{Aut}(K)$ *auf* $(2p-1)$*-dimensionalen Teilraum von* $K/2K + (2p)K^{\#} \cong \mathbb{F}_2^{\frac{n}{2}-1}$.
      Definiere $\mathcal{W} := \mathcal{W} \cup \left\{ < T_i, 2K + (2p)K^{\#} > \right\}$.

   b) *Konstruiere alle möglichen Obergitter von* $\mathcal{W}$*:*
      i. *Berechne für jedes* $W \in \mathcal{W}$ *Vertreter* O_i *der* $\mathrm{Aut}(W)$*-Bahnen auf 1-dimensionalen Teilraumen* $W^{\#} \cap \frac{1}{2}W/W$. *Ist* $< O_i, W >$ *stark N-modular und bestitzt es die richtige Theta-Reihe, so* $\mathcal{L} := \mathcal{L} \cup \{ < O_i, W > \}$.

Bemerkung 6.2.17 In dem beschriebenem Algorithmus muss man zwar auch das Geschlecht eines Gitter bestimmen. Da man jedoch das Geschlecht von geraden Gittern bestimmt, kann man $p = 2$ wählen, muss dann aber überprüfen, ob tatsächlich das ganze Geschlecht berechnet worden ist. Dies muss nach Bemerkung 3.2.25 nicht der Fall sein und dann sind die gefundenen Gitter natürlich richtige Ergebnisse, man kann jedoch nicht ausschließen, dass weitere Gitter existieren.

Es gibt allerdings auch Fälle, in denen man die Gitter von Minimum 4 in einem Geschlecht kennt.

Satz 6.2.18 *Das Geschlecht des 16-dimensionalen Gitters* D_4^4 *enthält bis auf Isometrie nur ein Gitter von Minimum 4, das sogenannte Barnes-Wall Gitter* BW_{16}.

Beweis: Für den Beweis dieses Satzes verweisen wir auf [Que95, Theorem 4]. □

Bemerkung 6.2.19 D_4^4 ist ein gerades, 2-modulares Gitter.

Folgerung 6.2.20 *Im Geschlecht der geraden, 2-modularen Gitter ist bis auf Isometrie das Barnes-Wall Gitter das einzige Gitter mit Minimum 4.*

Beweis: Nach Satz 3.2.33 gibt es nur ein Geschlecht von geraden, 2-modularen Gittern. Nach Bemerkung 6.2.19 und Satz 6.2.18 folgt die Behauptung. □

Satz 6.2.21 *Bis auf Isometrie existieren genau drei 20-dimensionale 2-modulare Gitter von Minimum 4 und Determinante* 2^{10}.

Beweis: Für den Beweis dieses Satzes verweisen wir auf [BV01]. □

6.3 Ergebnisse

Im Folgendem werden die erzielten Ergebnisse tabellarisch vorgestellt. Sei also $N \in \mathcal{N}$ und n sei die Dimension von C_N^k. Es bezeichnen mm das größte Minimum, das in dem Geschlecht von C_N^k vorkommt. Weiter bezeichne #, bis auf Isometrie, die Anzahl der gefundenen Gitter, die in $\mathcal{L}_N(k)$ liegen, kv die Anzahl der kürzeten Vektoren eines solchen Gitters.

Erhalten wir die Nichtexistenz durch einen negativen Koeffizienten in der q-Entwicklung der berechneten Theta-Reihe, so schreiben wir ein Minus, sonst, das heißt, wenn das Geschlecht kein Gitter mit den gewünschten Eigenschaften enthält, so schreiben wir eine Null.
Um zu testen, dass bei der Bestimmung des Geschlechts kein Fehler aufgetreten ist, nutzen wir, dass die Theta-Reihen von stark N-modularen Gittern Modulformen sind und somit einen Vektorraum bilden. Wir nehmen uns beliebig viele Theta-Reihen, der im Geschlecht liegenden Gitter und versuchen die mit $g_1^{(N)}$ und $g_2^{(N)}$ berechnete Theta-Reihe linear zu kombinieren. Gelingt dies nicht, so könnte ein Fehler aufgetreten sein. Dieser Test ist besonders dann wichtig, wenn wir kein Gitter mit den gewünschten Eigenschaften gefunden haben. Das Gleiche können wir mit den Schatten Theta-Reihen machen. Natürlich testen wir bei den gefundenen Gittern nochmal, ob diese stark N-modular sind und die Theta-Reihe des Gitters und die des Schattens mit den berechneten übereinstimmen.

Konnte das ganze Geschlecht mit der Kneserschen Nachbarschaftsmethode bestimmt werden, so erhalten wir mit den gefundenen Gittern ganz $\mathcal{L}_N(k)$. Um dies in den Tabellen zu kennzeichnen, schreiben wir ein K als Index an die Anzahl der gefundenen Gitter.
Wurde die Knesersche Nachbarschaftsmethode für ungerade N auf einen geraden Nachbarn von C_N^k angewandt, so wissen wir, wie im obigen Fall, dass außer den gefundenen Gittern keine weiteren existieren können. In diesem Fall schreiben wir ein KG als Index an die Anzahl der gefundenen Gitter.
In dem Fall, dass N gerade ist und wir die Knesersche Nachbarschaftsmethode mit $p = 2$ auf den geraden Nachbarn C'' angewandt haben, können wir nicht unbedingt von einem eindeutigen Ergebniss ausgehen. Es könnte der Fall aufgetreten sein, dass nicht das ganze Geschlecht des geraden Nachbars bestimmt worden ist. Diesen Fall kennzeichnen wir mit dem Index C''. Konnten wir jedoch auf eine andere Art, die später beschrieben wird, zeigen, dass wir das ganze Geschlecht bestimmt haben, so kann man von einem eindeutigen Ergebniss ausgehen. Diesen Fall kennzeichnen wir mit $\mathrm{C}''G$. In dem Fall, in dem wir mögliche gerade Nachbarn kennen, genügt es 2-Nachbarn zu konstruieren. Kennt man sogar alle möglichen Kandidaten für C'', so weiß man eindeutig, dass alle Gitter aus $\mathcal{L}_N(k)$ benachbart mit einem dieser Kandidaten sein müssen. Diesen Fall kennzeichnen wir mit dem Index $2Nach$.
Als letzte Methode nutzen wir Satz 6.1.5. Im Anhang des Artikels [Neb04] ist eine Liste von stark N-modularen Gittern mit $\min_0(\mathrm{Sh}(L)) = M^N(1,k)$. Hat ein solches L Gitter Minimum 3, so wissen wir, dass $L \perp L \in \mathcal{L}_N(2k)$. Hier können wir jedoch nicht von einer Klassifikation des Geschlechts ausgehen. Wir wissen nur, dass ein Gitter mit den gewünschten Eigenschaften existiert. Diesen Fall kennzeichnen wir mit Index $\mathrm{Sh}\,1$.

Sei nun $N = 2$. Nach Satz 4.2.1 gilt für ein Gitter aus $\mathcal{L}_2(k)$, dass $k \geq 8$.

zu $n = 16$ Nach Satz 6.2.7 wissen wir, dass das Gitter C_2^8 den geraden Nachbarn C'' hat. Dieser ist gerade, stark 2-modular. Weiter wissen wir nach Satz 4.1.7, dass für 2-modulare Gitter $\theta_{\mathrm{Sh}_\emptyset(L)}(z) = \theta_{\mathrm{Sh}(L)}(2z)$. Der reskalierte Schatten hat Minimum $M^2(2,8) = 1$, das heißt also $\min_0(\mathrm{Sh}(2)) = 2$. Das Gitter C'' hat die Theta-Reihe $\frac{1}{2}\left\{\theta_L(z) + \theta_L(z+1) + \theta_{\mathrm{Sh}_\emptyset(L)}(z) + \theta_{\mathrm{Sh}_\emptyset(L)}(z+1)\right\}$. Damit erhalten wir, dass C'' Minimum 4 hat. Nach Folgerung 6.2.20 ist also das Barnes-Wall Gitter der gerade Nachbar von C''. Nun genügt es also 2-Nachabrn des Barnes-Wall Gitters zu konstruieren, um die gesuchten Gitter aus $\mathcal{L}_2(8)$ zu finden. Die Konstruktion verläuft analog zu Schritt 2) und 3) von 6.2.16.

zu $n = 20$ Nach Satz 6.2.7 haben die Gitter aus $\mathcal{L}_2(10)$ einen geraden Nachbarn. Dieser muss mit analoger Argumentation zu Fall $n = 16$ Minimum 4 besitzen. Es ist nämlich $M^2(2,10) = \frac{3}{2}$ und somit $\min_0(\mathrm{Sh}(L)) = 3$. Wegen der Form der Theta-Reihe folgt, dass C'' Minimum 4 besitzt. Nach Satz 6.2.21 kommen genau drei Gitter als mögliche gerade Nachbarn für die Gitter aus $\mathcal{L}_2(10)$ in Frage. Mit den unter [NSb] erhaltenen Grammatrizen der drei Gitter konstruiert man nun analog zu Schritt 2) und 3) von 6.2.16 wieder 2-Nachbarn.

N=2

n	16	20
#	1_{2Nach}	32_{2Nach}
kv	256	160

Sei $N = 3$. Nach Satz 4.2.1 gilt für die Gitter aus $\mathcal{L}_3(k)$, dass $k \geq 5$.

N=3

n	10	12	20
#	1_K	1_{KG}	$\geq 1_{Sh1}$
kv	80	64	160
mm	3	3	

Sei $N = 5$. Nach Satz 4.2.1 gilt für die Gitter aus $\mathcal{L}_5(k)$, dass $k \geq 3$.

N=5

n	6	8	10	12	14	16	18	20
#	1_K	1_K	1_K	1_K	-	-	-	-
kv	20	16	20	40				
mm	3	3	3	4				

Sei $N = 6$. Nach Satz 4.2.1 gilt für die Gitter aus $\mathcal{L}_6(k)$, dass $k \geq 2$.

zu $n = 12$ Sei $M \in \mathcal{L}_6(3)$. Nach Satz 6.2.7 ist M ein 2-Nachbar eines geraden stark 6-modularen Gitters M'' mit Minimum 4. M'' hat das 3-adisches Symbol $1^{-n/2}3^{-n/2}$. Nach [SSP99, 3.2] besitzt das Geschlecht der geraden Gitter mit dem genannten Symbol bis auf Isometrie genau 284 Gitter. Unter diesen gibt es 4 Gitter mit Minimum 4 und nur eines hat einen Nachbarn in $\mathcal{L}_6(3)$.

N=6

n	8	12	16
#	1_{K}	$1_{\mathrm{C}''G}$	$\geq 1_{\mathrm{Sh1}}$
kv	16	20	32

Sei $N = 7$. Nach Satz 4.2.1 gilt für die Gitter aus $\mathcal{L}_7(k)$, dass $k \geq 2$.

N=7

n	4	6	8	10	12	14	16	18	20
#	1_{KG}	1_{KG}	1_{KG}	-	-	-	-	-	-
kv	8	8	16						
mm	3	3	3						

Sei $N = 11$. Nach Bemerkung 6.1.4 gilt für die Gitter aus $\mathcal{L}_{11}(k)$, dass $k \geq 2$.

N=11

n	4	6	8	10	12	14	16	18	20
#	1_{K}	-	-	-	-	-	-	-	-
kv	4								
mm	3								

Sei $N = 14$. Nach Satz 4.2.1 gilt für die Gitter aus $\mathcal{L}_{14}(k)$, dass $k \geq 1$.

N=14

n	4	8	12	16
#	1_{K}	1_{K}	-	-
kv	4	8		
mm	3	6		

Sei $N = 15$. Nach Satz 4.2.1 gilt für die Gitter aus $\mathcal{L}_{15}(k)$, dass $k \geq 1$.

N=15

n	4	8	12	16	20	24
#	1_{KG}	-	-	-	-	-
kv	4					
mm	3					

Sei $N = 23$. Nach Satz 4.2.1 gilt für die Gitter aus $\mathcal{L}_{23}(k)$, dass $k \geq 1$.

N=23

n	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
#	1_K	-	-	-	-	-	-	-	-	-
kv	2									
mm	3									

6.3.1 Auftretende Minima im Geschlecht

In kleineren Dimensionen kann man das ganze Geschlecht der stark N-modularen Gitter, die rational äquivalent zu C_N^k sind, mit der Kneserschen Nachbarschaftsmethode bestimmen. Dabei ist es wegen den folgenden Abschnitten interessant die auftretenden Minima der Gitter im Geschlecht und die zugehörigen Schattenminima zu betrachten.

N=2

n	$\min(L)$	$\min_0(\sqrt{2}\,\mathrm{Sh}(L))$	Anzahl der Gitter	Extremales Minimum
2	1	1/2	1	2
4	1	1	1	2
6	2	1/2	1	2
	1	3/2 , 1/4	2	
8	2	1	1	2
	1	1,2	3	

N=3

n	$\min(L)$	$\min_0(\sqrt{3}\,\mathrm{Sh}(L))$	Anzahl der Gitter	Extremales Minimum
2	1	1	1	2
4	1	2	1	2
6	2	1	1	2
	1	1, 3	2	
8	2	2	1	2
	1	2, 4	3	
10	3	3	1	2
	2	1	7	
	1	1, 3, 5	9	

N=5

n	$\min(L)$	$\min_0(\sqrt{5}\,\mathrm{Sh}(L))$	Anzahl der Gitter	Extremales Minimum
2	1	3/2	1	2
4	2	1	1	2
	1	3	1	
6	3	5/2	1	3
	2	1/2	2	
	1	5/2 ,9/2	3	
8	3	2	1	4
	2	2	6	
	1	2, 4, 6	8	
10	3	3/2, 7/2	4	4
	2	3/2, 7/2	51	
	1	3/2, 7/2, 11/2, 15/2	33	

N=6

n	$\min(L)$	$\min_0(\sqrt{6}\,\mathrm{Sh}(L))$	Anzahl der Gitter	Extremales Minimum
4	2	1	1	2
	1	2	1	

N=7

n	$\min(L)$	$\min_0(\sqrt{7}\,\mathrm{Sh}(L))$	Anzahl der Gitter	Extremales Minimum
2	1	2	1	2
4	3	2	1	3
	1	2, 4	2	
6	3	2	1	4
	2	2	3	
	1	2, 4, 6	4	
8	4	2	1	4
	3	2,4	4	
	2	2	19	
	1	2, 4, 6,8	15	

N=11

n	$\min(L)$	$\min_0(\sqrt{11}\,\mathrm{Sh}(L))$	Anzahl der Gitter	Extremales Minimum
2	3	1	1	3
	1	3	1	
4	3	2	1	4
	2	2	1	
	1	4, 6	2	
6	4	1, 3	2	4
	3	1, 3	5	
	2	1, 3	9	
	1	3, 5, 7, 9	8	

N=14

n	$\min(L)$	$\min_0(\sqrt{14}\,\mathrm{Sh}(L))$	Anzahl der Gitter	Extremales Minimum
4	3	3	1	4
	2	1	2	
	1	4, 7	2	

N=15

n	$\min(L)$	$\min_0(\sqrt{15}\,\mathrm{Sh}(L))$	Anzahl der Gitter	Extremales Minimum
4	3	2, 2	2	4
	2	2	1	
	1	4, 6	2	

N=23

n	$\min(L)$	$\min_0(\sqrt{23}\,\mathrm{Sh}(L))$	Anzahl der Gitter	Extremales Minimum
2	3	2	1	4
	1	6	1	
4	5	2, 4	2	6
	4	2	2	
	3	2, 4	3	
	2	2	2	
	1	6, 8, 12	4	

6.4 Extremale stark N-modulare Gitter

6.4.1 Extremale Gitter mit maximalem Schatten

Nach Satz 4.2.2 können wir die Theta-Reihen von stark N-modularen Gitter, die rational äquivalent zu C_N^k sind, bestimmen. Die frei zu wählenden Koeffizienten bestimmen das Minimum des Gitters. Die Theta-Reihe eines solchen Gitters hat die Form

$$\theta_L(z) = g_1^{(N)}(z)^k + c_1 g_1^{(N)}(z)^k g_2^{(N)}(z) + c_2 g_1^{(N)}(z)^k g_2^{(N)}(z)^2 + \cdots$$

Da g_1 von der Form $1+2q+\cdots$ und g_2 von der Form $q-\mathrm{s}(N)q^2$ ist, braucht man $r-1$ geeignet gewählte Koeffinzienten, damit L von Minimum r wird. Dabei sorgt dann der Koeffizient c_i dafür, dass die q-Potenz i verschwindet. Jede weitere Koeffizient c_i, mit $i \geq r$, kann gegebenenfalls auch ungleich Null gewählt werden. Nach 4.2.1 kennen wir eine obere Schranke an das Minimum von L. Sukzessiv kann man also die Koeffizienten C_i so wählen, dass man eine geeignete Theta-Reihe erhält. Bestimmt man dabei genau die ersten $r-1$ Koeffizienten, so bestimmt man auf diese Art ein Gitter mit maximalem Schatten, denn es beginnt s_1 mit $q^{\sigma_1(N)/4}$ und s_2 mit q^{-2}, falls N ungerade ist und es beginnt s_1 mit $q^{\sigma_1(\frac{N}{2})/2}$ und s_2 mit q^{-1}, falls N gerade ist. Auf diese Art wurden die Theta-Reihen von ungeraden stark N-modularen Gittern bis Dimension 80 bestimmt. Dabei erhält man die folgenden möglichen Existenzbedingungen.

N	k
2	$2 \leq k \leq 7 \ \vee \ 10 \leq k \leq 15 \ \vee \ 18 \leq k \leq 23 \ e \vee \ 26 \leq k \leq 31 \ \vee \ 34 \leq k \leq 39$
3	$2 \leq k \leq 6 \ \vee \ 8 \leq k \leq 11 \ \vee \ 14 \leq k \leq 17 \ \vee \ 19 \leq k \leq 23 \ \vee \ 25 \leq k \leq 29$ $\vee \ 32 \leq k \leq 35 \vee \ 38 \leq k \leq 40$
5	$2 \leq k \leq 7 \ \vee \ 9 \leq k \leq 11 \ \vee \ 13 \leq k \leq 15 \ \vee \ 17 \leq k \leq 19 \ \vee \ 22 \leq k \leq 23$ $\vee \ 26 \leq k \leq 27 \vee \ 30 \leq k \leq 31 \vee \ 34 \leq k \leq 35 \vee \ 38 \leq k \leq 39$
6	$k \in \{1,3,5,7,9,11,13,15,17,19\}$
7	$1 \leq k \leq 5 \ \vee \ 7 \leq k \leq 8 \ \vee \ 10 \leq k \leq 11$
11	$1 \leq k \leq 3$
14	$k = 2$
15	$k = 1$
23	$k = 1$

6.4.2 s-Extremale Gitter

Sei $N \in \mathcal{N}$. In diesen Abschnitt ist mit Gitter stets ein stark N-modulare Gitter, das rational äquivalent zu C_N^k ist, gemeint.
Wir haben zuvor extremale Gitter mit maximalem Schatten behandelt. Nun wollen wir sowohl des Minimum des Gitters, als auch das Minimum des zugehörigen Schattens maximieren.

In [Gab] führt Gaborit für unimodulare Gitter den Begriff s-extremal ein. Er zeigt, dass für ein ungerades unimodulares Gitter L der Dimension n gilt

$$2\min(L) + \min_0(\mathrm{Sh}(L)) \leq 2 + \tfrac{n}{4}.$$

Gitter, die diese Schranke erreichen, heißen **s-extremal**.

In [NSa] wird der Begriff auf ungerade stark N-modulare Gitter verallgemeinert. Dabei erhält man die Schranken:
Ist N ungerade, so ist $2\min(L) + \min_0(\sqrt{N}\,\mathrm{Sh}(L)) \leq 2 + k\frac{\sigma_1(N)}{4}$.
Ist N gerade, so ist $\min(L) + \min_0(\sqrt{N}\,\mathrm{Sh}(L)) \leq 1 + k\frac{\sigma_1(N/2)}{2}$.

Definition 6.4.1 Ein Gitter, das die obige Schranke erreicht heißt **s-extremal**.

Satz 6.4.2 *Die Theta-Reihe eines s-extremalen Gitters ist eindeutig bestimmt.*

Beweis: Sei L ein s-extremales Gitter mit $\min(L) = m$.
Ist N ungerade, so ist $\min_0(\sqrt{N}\,\mathrm{Sh}(L)) = k\frac{\sigma_1(N)}{4} - 2(m-1)$.
Ist N gerade, so ist $\min_0(\sqrt{N}\,\mathrm{Sh}(L)) = k\frac{\sigma_1(N/2)}{2} - (m-1)$.
Nach Satz 4.2.2 ist

$$\theta_L(z) = g_1^{(N)}(z)^k \sum_{i=0}^{\lfloor kl_N \rfloor} c_i g_2^{(N)}(z)^i$$

mit $c_i \in \mathbb{R}$ und

$$\theta_{\mathrm{Sh}}(z) = s_1^{(N)}(z)^k \sum_{i=0}^{\lfloor kl_N \rfloor} c_i s_2^{(N)}(z)^i,$$

wobei $\mathrm{Sh} := \sqrt{N}\,\mathrm{Sh}(L)$. Wegen der Form $s_1^{(N)}$ und $s_2^{(N)}$ beziehungsweise $g_1^{(N)}$ und $g_2^{(N)}$ (siehe 4.2.3), können wir wegen des Minimums des Schatten einerseits folgern, dass $c_i = 0$ für alle $i \geq m$ und wegen des Minimums des Gitters andererseits, dass c_i für $0 \leq i \leq m-1$ eindeutig bestimmt ist. □

Bemerkung 6.4.3 Die im Abschnitt 6.3, 6.4.1, [Neb04], [NV03], [Elk95b] und [Elk95a] untersuchten Gitter sind s-extremal.

Mit Hilfe des Programs Magma wurden die ersten Paar Koeffizienten, in der q-Entwicklung der Theta-Reihen, bis Dimension 160 berechnet. Die folgenden Tabellen zeigen auf, wann ein s-extrmales Gitter mit Gitterminimum m existieren kann. Eine Tabellen bezieht sich auf ein $N \in \mathcal{N}$.
Betrachtet man die Bedingungen für die Existenz beziehungsweise die Theta-Reihen genauer, so ist das Folgende auffällig. Ist das Minimum m des Gitters gerade, so ist der zweite Koeffizient in der q-Entwicklung der Theta-Reihe negativ. Es liegt also die Vermutung nah, dass man eine genaue Schranke angeben kann, wann s-extremale Gitter mit geradem Gitterminimum existieren, indem man die Theta-Reihen solcher Gitter genauer untersucht.

	N=1
m	Existenz bis $k = 160$
1	Existiert immer
2	$8 \leq k \leq 23$
3	$23 \leq k \leq 160$
4	$25 \leq k \leq 47$
5	$48 \leq k \leq 160$
6	$48 \leq k \leq 71$
7	$72 \leq k \leq 160$
8	$72 \leq k \leq 95$
9	$96 \leq k \leq 129$ und $k = 133, 138, 142, 147$ und $151 \leq k \leq 160$
10	$96 \leq k \leq 119$
11	$120 \leq k \leq 148$
12	$120 \leq k \leq 143$
13	$144 \leq k \leq 160$
14	$144 \leq k \leq 160$

	N=2
m	Existenz bis $k = 80$
1	Existiert immer
2	$2 \leq k \leq 8$
3	$8 \leq k \leq 80$
4	$10 \leq k \leq 15$
5	$16 \leq k \leq 80$
6	$18 \leq k \leq 23$
7	$24 \leq k \leq 80$
8	$26 \leq k \leq 31$
9	$32 \leq k \leq 41$ und $64 \leq k \leq 80$
10	$34 \leq k \leq 39$
11	$40 \leq k \leq 48$
12	$42 \leq k \leq 47$
13	$48 \leq k \leq 55$
14	$50 \leq k \leq 55$
15	$56 \leq k \leq 63$
16	$58 \leq k \leq 63$
17	$64 \leq k \leq 71$
18	$66 \leq k \leq 71$
19	$72 \leq k \leq 78$
20	$74 \leq k \leq 79$
21	$k = 80$
22	keine Existenz bis $k = 80$
23	keine Existenz bis $k = 80$
24	keine Existenz bis $k = 80$
25	keine Existenz bis $k = 80$
26	keine Existenz bis $k = 80$

	N=3
m	Existenz bis $k = 80$
1	Existiert immer
2	$2 \leq k \leq 5$
3	$5 \leq k \leq 80$
4	$6 \leq k \leq 11$
5	$12 \leq k \leq 16$ und $30 \leq k \leq 80$
6	$13 \leq k \leq 17$
7	$18 \leq k \leq 22$ und $52 \leq k \leq 80$
8	$19 \leq k \leq 23$
9	$24 \leq k \leq 27$ und $73 \leq k \leq 80$
10	$25 \leq k \leq 29$
11	$30 \leq k \leq 33$
12	$32 \leq k \leq 35$
13	$36 \leq k \leq 39$
14	$38 \leq k \leq 41$
15	$42 \leq k \leq 45$
16	$44 \leq k \leq 47$
17	$48 \leq k \leq 51$
18	$50 \leq k \leq 53$
19	$54 \leq k \leq 57$
20	$56 \leq k \leq 59$
21	$60 \leq k \leq 63$
22	$62 \leq k \leq 65$
23	$66 \leq k \leq 69$
24	$68 \leq k \leq 71$
25	$72 \leq k \leq 75$
26	$74 \leq k \leq 77$

	$N = 5$
m	Existenz bis $k = 80$
1	Existiert immer
2	$2 \leq k \leq 3$
3	$3 \leq k \leq 6$ und $19 \leq k \leq 80$
4	$4 \leq k \leq 7$
5	$8 \leq k \leq 10$ und $37 \leq k \leq 80$
6	$9 \leq k \leq 11$
7	$12 \leq k \leq 13$ und $51 \leq k \leq 80$
8	$13 \leq k \leq 15$
9	$16 \leq k \leq 17$ und $60 \leq k \leq 80$
10	$17 \leq k \leq 19$
11	$20 \leq k \leq 21$ und $69 \leq k \leq 80$
12	$22 \leq k \leq 23$
13	$24 \leq k \leq 25$ und $77 \leq k \leq 80$
14	$26 \leq k \leq 27$
15	$28 \leq k \leq 29$
16	$30 \leq k \leq 31$
17	$32 \leq k \leq 33$
18	$34 \leq k \leq 35$
19	$36 \leq k \leq 37$
20	$38 \leq k \leq 39$
21	$40 \leq k \leq 41$
22	$k = 43$
23	$44 \leq k \leq 45$
24	keine Existenz bis $k = 80$
25	$k = 49$
26	keine Existenz bis $k = 80$
27	keine Existenz bis $k = 80$
28	keine Existenz bis $k = 80$
29	keine Existenz bis $k = 80$
30	keine Existenz bis $k = 80$
31	keine Existenz bis $k = 80$
32	keine Existenz bis $k = 80$
33	keine Existenz bis $k = 80$
34	keine Existenz bis $k = 80$
35	keine Existenz bis $k = 80$
36	keine Existenz bis $k = 80$
37	keine Existenz bis $k = 80$
38	keine Existenz bis $k = 80$
39	keine Existenz bis $k = 80$
40	keine Existenz bis $k = 80$
41	keine Existenz bis $k = 80$

	$N = 6$
m	Existenz bis $k = 40$
1	Existiert immer
2	$1 \leq k \leq 2$
3	$2 \leq k \leq 40$
4	$k = 3$
5	$4 \leq k \leq 40$
6	$k = 5$
7	$6 \leq k \leq 9$ und $18 \leq k \leq 40$
8	$k = 7$
9	$8 \leq k \leq 9$ und $27 \leq k \leq 40$
10	$k = 9$
11	$10 \leq k \leq 11$ und $35 \leq k \leq 40$
12	$k = 11$
13	$12 \leq k \leq 13$ und $38 \leq k40$
14	$k = 13$
15	$14 \leq k \leq 15$
16	$k = 15$
17	$16 \leq k \leq 17$
18	$k = 17$
19	$18 \leq k \leq 19$
20	$k = 19$
21	$20 \leq k \leq 21$
22	$k = 21$
23	$22 \leq k \leq 23$
24	$k = 23$
25	$24 \leq k \leq 25$
26	$k = 25$
27	$k = 26$
28	keine Existenz bis $k = 40$
29	$k = 28$
30	keine Existenz bis $k = 40$
31	$k = 30$
32	keine Existenz bis $k = 40$
33	$k = 32$
34	keine Existenz bis $k = 40$
35	$k = 34$
36	keine Existenz bis $k = 40$
37	$k = 36$
38	keine Existenz bis $k = 40$
39	$k = 38$
40	keine Existenz bis $k = 40$
41	$k = 40$

	$N = 7$
m	Existenz bis $k = 80$
1	Existiert immer
2	$1 \leq k \leq 2$
3	$2 \leq k \leq 4$ und $19 \leq k \leq 80$
4	$3 \leq k \leq 5$
5	$6 \leq k \leq 7$ und $37 \leq k \leq 80$
6	$7 \leq k \leq 8$
7	$9 \leq k \leq 10$ und $53 \leq k \leq 80$
8	$10 \leq k \leq 11$
9	$k = 12$ und $63 \leq k \leq 80$
10	keine Existenz bis $k = 80$
11	$k = 15$ und $72 \leq k \leq 80$
12	keine Existenz bis $k = 80$
13	keine Existenz bis $k = 80$
14	keine Existenz bis $k = 80$
15	keine Existenz bis $k = 80$
16	keine Existenz bis $k = 80$
17	keine Existenz bis $k = 80$
18	keine Existenz bis $k = 80$
19	keine Existenz bis $k = 80$
20	keine Existenz bis $k = 80$
21	keine Existenz bis $k = 80$
22	keine Existenz bis $k = 80$
23	keine Existenz bis $k = 80$
24	keine Existenz bis $k = 80$
25	keine Existenz bis $k = 80$
26	keine Existenz bis $k = 80$
27	keine Existenz bis $k = 80$
28	keine Existenz bis $k = 80$
29	keine Existenz bis $k = 80$
30	keine Existenz bis $k = 80$
31	keine Existenz bis $k = 80$
32	keine Existenz bis $k = 80$
33	keine Existenz bis $k = 80$
34	keine Existenz bis $k = 80$
35	keine Existenz bis $k = 80$
36	keine Existenz bis $k = 80$
37	keine Existenz bis $k = 80$
38	keine Existenz bis $k = 80$
39	keine Existenz bis $k = 80$
40	keine Existenz bis $k = 80$
41	keine Existenz bis $k = 80$

	$N = 11$
m	Existenz bis $k = 80$
1	Existiert immer
2	$k = 1$
3	$1 \leq k \leq 2$ und $20 \leq k \leq 80$
4	$2 \leq k \leq 3$
5	$k = 4$ und $39 \leq k \leq 80$
6	keine Existenz bis $k = 80$
7	$k = 6$ und $53 \leq k \leq 80$
8	keine Existenz bis $k = 80$
9	$62 \leq k \leq 80$
10	keine Existenz bis $k = 80$
11	$76 \leq k \leq 80$
12	keine Existenz bis $k = 80$
13	keine Existenz bis $k = 80$
14	keine Existenz bis $k = 80$
15	keine Existenz bis $k = 80$
16	keine Existenz bis $k = 80$
17	keine Existenz bis $k = 80$
18	keine Existenz bis $k = 80$
19	keine Existenz bis $k = 80$
20	keine Existenz bis $k = 80$
21	keine Existenz bis $k = 80$
22	keine Existenz bis $k = 80$
23	keine Existenz bis $k = 80$
24	keine Existenz bis $k = 80$
25	keine Existenz bis $k = 80$
26	keine Existenz bis $k = 80$
27	keine Existenz bis $k = 80$
28	keine Existenz bis $k = 80$
29	keine Existenz bis $k = 80$
30	keine Existenz bis $k = 80$
31	keine Existenz bis $k = 80$
32	keine Existenz bis $k = 80$
33	keine Existenz bis $k = 80$
34	keine Existenz bis $k = 80$
35	keine Existenz bis $k = 80$
36	keine Existenz bis $k = 80$
37	keine Existenz bis $k = 80$
38	keine Existenz bis $k = 80$
39	keine Existenz bis $k = 80$
40	keine Existenz bis $k = 80$
41	keine Existenz bis $k = 80$

	$N = 14$
m	Existenz bis $k = 40$
1	Existiert immer
2	$k = 1$
3	$1 \leq k \leq 2$ und $6 \leq k \leq 40$
4	keine Existenz bis $k = 40$
5	$k = 2$ und $12 \leq k \leq 40$
6	$k = 2$
7	$k = 3$ und $21 \leq k \leq 40$
8	keine Existenz bis $k = 40$
9	$k = 4$ und $30 \leq k \leq 40$
10	keine Existenz bis $k = 40$
11	$k = 5$ und $34 \leq k \leq 40$
12	keine Existenz bis $k = 40$
13	$k = 6$ und $38 \leq k \leq 40$
14	keine Existenz bis $k = 40$
15	keine Existenz bis $k = 40$
16	keine Existenz bis $k = 40$
17	keine Existenz bis $k = 40$
18	keine Existenz bis $k = 40$
19	keine Existenz bis $k = 40$
20	keine Existenz bis $k = 40$
21	keine Existenz bis $k = 40$
22	keine Existenz bis $k = 40$
23	keine Existenz bis $k = 40$
24	keine Existenz bis $k = 40$
25	keine Existenz bis $k = 40$
26	keine Existenz bis $k = 40$
27	keine Existenz bis $k = 40$
28	keine Existenz bis $k = 40$
29	keine Existenz bis $k = 40$
30	keine Existenz bis $k = 40$
31	keine Existenz bis $k = 40$
32	keine Existenz bis $k = 40$
33	keine Existenz bis $k = 40$
34	keine Existenz bis $k = 40$
35	keine Existenz bis $k = 40$
36	keine Existenz bis $k = 40$
37	keine Existenz bis $k = 40$
38	keine Existenz bis $k = 40$
39	keine Existenz bis $k = 40$
40	keine Existenz bis $k = 40$
41	keine Existenz bis $k = 40$

	$N = 15$
m	Existenz bis $k = 40$
1	Existiert immer
2	keine Existenz bis $k = 40$
3	$k = 1$ und $7 \leq k \leq 40$
4	$k = 1$
5	$k = 2$ und $13 \leq k \leq 40$
6	keine Existenz bis $k = 40$
7	$k = 3$ und $22 \leq k \leq 40$
8	keine Existenz bis $k = 40$
9	$k = 4$ und $29 \leq k \leq 40$
10	keine Existenz bis $k = 40$
11	$k = 5$ und $33 \leq k \leq 40$
12	keine Existenz bis $k = 40$
13	$k = 6$ und $37 \leq k \leq 40$
14	keine Existenz bis $k = 40$
15	$k = 40$
16	keine Existenz bis $k = 40$
17	keine Existenz bis $k = 40$
18	keine Existenz bis $k = 40$
19	keine Existenz bis $k = 40$
20	keine Existenz bis $k = 40$
21	keine Existenz bis $k = 40$
22	keine Existenz bis $k = 40$
23	keine Existenz bis $k = 40$
24	keine Existenz bis $k = 40$
25	keine Existenz bis $k = 40$
26	keine Existenz bis $k = 40$
27	keine Existenz bis $k = 40$
28	keine Existenz bis $k = 40$
29	keine Existenz bis $k = 40$
30	keine Existenz bis $k = 40$
31	keine Existenz bis $k = 40$
32	keine Existenz bis $k = 40$
33	keine Existenz bis $k = 40$
34	keine Existenz bis $k = 40$
35	keine Existenz bis $k = 40$
36	keine Existenz bis $k = 40$
37	keine Existenz bis $k = 40$
38	keine Existenz bis $k = 40$
39	keine Existenz bis $k = 40$
40	keine Existenz bis $k = 40$
41	keine Existenz bis $k = 40$

	$N = 23$
m	Existenz bis $k = 80$
1	Existiert immer
2	keine Existenz bis $k = 80$
3	$k = 1$ und $21 \leq k \leq 80$
4	$k = 1$
5	$k = 2$ und $39 \leq k \leq 80$
6	keine Existenz bis $k = 80$
7	$48 \leq k \leq 80$
8	keine Existenz bis $k = 80$
9	$66 \leq k \leq 80$
10	keine Existenz bis $k = 80$
11	keine Existenz bis $k = 80$
12	keine Existenz bis $k = 80$
13	keine Existenz bis $k = 80$
14	keine Existenz bis $k = 80$
15	keine Existenz bis $k = 80$
16	keine Existenz bis $k = 80$
17	keine Existenz bis $k = 80$
18	keine Existenz bis $k = 80$
19	keine Existenz bis $k = 80$
20	keine Existenz bis $k = 80$
21	keine Existenz bis $k = 80$
22	keine Existenz bis $k = 80$
23	keine Existenz bis $k = 80$
24	keine Existenz bis $k = 80$
25	keine Existenz bis $k = 80$
26	keine Existenz bis $k = 80$
27	keine Existenz bis $k = 80$
28	keine Existenz bis $k = 80$
29	keine Existenz bis $k = 80$
30	keine Existenz bis $k = 80$
31	keine Existenz bis $k = 80$
32	keine Existenz bis $k = 80$
33	keine Existenz bis $k = 80$
34	keine Existenz bis $k = 80$
35	keine Existenz bis $k = 80$
36	keine Existenz bis $k = 80$
37	keine Existenz bis $k = 80$
38	keine Existenz bis $k = 80$
39	keine Existenz bis $k = 80$
40	keine Existenz bis $k = 80$
41	keine Existenz bis $k = 80$

7 Gefundene Gitter

Hier sind die Gram-Matrizen der gefundenen stark N-modularen Gitter von Minimum 3 und Schattenminimum $M^{(N)}(2,k)$, die rational äquivalent zu C_N^k sind, zu finden. Es bezeichne n die Dimension der Gitter.

7.1 N=2

$n = 16$

$$Gram(L) = \begin{pmatrix}
3 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 2 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\
0 & 3 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 3 & -1 & -1 & -1 & 0 & -2 & -2 & -2 & 1 & 2 & -2 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & -2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
-1 & -1 & -1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & -2 & -2 \\
-1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 3 & -2 & 0 & 0 & 2 & -1 & -2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\
2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 4 & 1 & 1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\
0 & -1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 4 & 2 & 2 & -2 & -1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\
1 & 1 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 2 & -2 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\
-1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 2 & 4 & -2 & -2 & 2 & -1 & -1 & 0 \\
-1 & 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & 0 & -2 & -2 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\
1 & 1 & 2 & 0 & -1 & -2 & 2 & -1 & -1 & -2 & 1 & 4 & -2 & 2 & 2 & 1 \\
0 & 0 & -2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & -2 & 4 & -1 & -2 & -1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & -2 & -1 & -1 & 0 & 2 & -1 & 4 & 1 & 2 \\
2 & 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 2 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & -2 & 1 & 4 & 2 \\
1 & 2 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 2 & 2 & 4
\end{pmatrix}$$

$n = 20$

$$\begin{pmatrix}
3 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 3 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
-1 & -1 & 0 & 3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
-1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -2 & 0 & 1 & -1 \\
-1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
-1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -2 \\
-1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 4 & 0 & 2 & 0 & -1 & 1 \\
1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & -2 & 0 & -3 \\
-1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & -1 & 4 & 0 & -1 & 2 \\
0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & -2 & 0 & 4 & 1 & 2 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 4 & 0 \\
0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & 2 & 0 & 5
\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}
3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & -1 & 2 & 0 \\
0 & 3 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
-1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -2 & -1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\
-1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & -1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & -1 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & -2 & 1 \\
-1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 4 & 2 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & -2 & -1 & -1 & 2 & 4 & 1 & -1 & 1 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\
1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -2 & 1 & 1 & 4 & 1 & -1 & -1 & -2 & -1 & 1 & 2 & -2 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 4 & -2 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \\
-1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -2 & 4 & 0 & 1 & -1 & -1 & -2 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 4 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\
-2 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 2 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 & 1 & 4 & 1 & 0 & -2 & 1 \\
0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 4 & 0 & -1 & 1 \\
-1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & -1 \\
2 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & -2 & -1 & -1 & 5 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 5
\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}
3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 3 & -1 & -2 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\
1 & -1 & 4 & 2 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\
0 & -2 & 2 & 4 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -2 & -2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\
2 & -1 & 1 & 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & -1 & 2 & 1 & -1 \\
0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 & 4 & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & -2 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -2 \\
1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 4 & 1 & -1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & -2 \\
0 & 1 & -2 & -1 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 4 & -1 & 2 & 0 & -2 & 0 & -2 & -1 & 0 & 2 \\
1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 2 & 0 & -1 & 4 & -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\
0 & -1 & -2 & -1 & 1 & 1 & 2 & -1 & -1 & 1 & 2 & -1 & 4 & -2 & -1 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & -2 & -1 & 1 & -1 & 0 & 2 & -2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & 0 & 4 & 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\
2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 4 & -1 & 0 & 1 & -1 \\
-1 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & -2 & 1 & 2 & -1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 1 & -1 \\
1 & 1 & -1 & -2 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 5 & 2 \\
0 & 2 & -1 & -2 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & -2 & 2 & 2 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 2 & 5
\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}
3 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 2 & -2 & 0 & -1 & -1 \\
0 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\
1 & -1 & 3 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & -2 & 1 & -1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & -1 & -2 & -1 & -1 & -1 & -1 & -2 & 4 & -1 & -1 & -2 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\
-1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 4 & -2 & 1 & 2 & 0 & -2 & 2 & -2 & 2 & -2 \\
1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -2 & 4 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & -2 & 1 & -1 & 4 & 0 & -1 & -1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\
-1 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 4 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & -1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 4 & 2 & -2 & 2 & -2 & -2 \\
2 & -2 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & -2 & 0 & -1 & -2 & 2 & 5 & -2 & 2 & -2 & 0 \\
-2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 & 2 & 1 & -2 & -2 & 5 & -1 & 2 & 1 \\
0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & -1 & 5 & -2 & 1 \\
-1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 & 2 & 0 & -2 & -2 & 2 & -2 & 5 & 1 \\
-1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & -1 & -2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 6
\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}
3 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\
1 & 1 & 3 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\
-1 & 0 & -1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & -2 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -2 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\
1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 1 \\
0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\
1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 3 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & 1 & 0 & 2 & -2 & 2 & 0 & 1 \\
-1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & -1 & -1 & 4 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & -2 \\
-1 & -1 & 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 4 & -1 & 1 & -1 & 1 & -2 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 4 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 4 & -2 & 2 & -1 & 2 \\
1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & -2 & 1 & -1 & -1 & -2 & 4 & -1 & -1 & -2 \\
0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 & 2 & -1 & 4 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & -1 & -1 & 4 & 1 \\
0 & -1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 1 & 5
\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}
3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & -1 \\
0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\
0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\
1 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 2 & -1 & -1 & -2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 3 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 2 & -1 & -2 & -1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\
-1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\
-1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 4 & -2 & -1 & 1 & -1 & -1 & 2 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -2 & 4 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\
1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 4 & 1 & -1 & -1 & -2 \\
1 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 4 & -2 & -2 & -1 \\
-1 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & -2 & 4 & 1 & -1 \\
0 & 2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & -1 & -2 & 1 & 4 & 0 \\
-1 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 2 & 2 & 0 & -2 & -1 & -1 & 0 & 5
\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}
3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\
1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & -1 & 3 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -2 & -2 \\
0 & 0 & 0 & 3 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 3 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
-1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\
-1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\
0 & -1 & 2 & -1 & -2 & 0 & -1 & -1 & -1 & 4 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -2 & -2 \\
-1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 2 & -1 & -2 & -1 & -1 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 4 & 0 & -1 & -1 & -2 & -1 & -2 & 1 & 1 \\
0 & 2 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 4 & 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 2 & 4 & -1 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\
-1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 & -1 & -1 & 4 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & -2 & -1 & 0 & 1 & 4 & 1 & 2 & 1 & 1 \\
2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & -2 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 4 & 1 & 0 & -2 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 4 & 0 & -1 \\
0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 3 \\
-1 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -2 & -1 & 3 & 6
\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}
3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
-1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\
1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & -2 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 & -2 & 2 & 2 \\
0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 4 & 0 & -1 & 2 & 1 & 2 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 \\
1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 4 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 4 & -1 & -2 & -1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\
1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 2 & 2 & -1 & 4 & 1 & 1 & 0 & -2 & 0 & 2 & 2 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 4 & 1 & 0 & -1 & -1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 1 & 4 & 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\
-1 & 0 & 0 & -2 & 1 & -1 & 1 & -2 & -1 & -1 & -2 & -1 & -2 & 0 & 4 & -1 & -2 & -1 & 1 & -1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -2 & 2 \\
0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 2 & 2 & 1 & 0 & -2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\
1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -2 & -1 \\
0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 2 & 1 & -2 & 0 & -2 & 5 & 0 \\
1 & -1 & 0 & 1 & -2 & -1 & 2 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 5
\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}
3 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\
0 & 3 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 3 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 2 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & -1 \\
-1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 3 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & -2 \\
-1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\
0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 3 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & -1 & -1 & 1 & -1 & 2 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -2 \\
0 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 4 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & -2 & -1 & -2 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 4 & 2 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\
-1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 4 & -2 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -2 & -2 & 4 & -1 & 0 & -2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\
2 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & -2 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 2 & -2 & 2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
-1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 2 \\
0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -2 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 4 & 1 & 1 \\
-1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 4 & 0 \\
-1 & 1 & -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 5
\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}
3 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\
0 & 3 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 3 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
-1 & -1 & -1 & 0 & 3 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\
1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\
0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
-1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 1 & -1 & -1 & 0 & -2 \\
1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 4 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 & -1 & -1 \\
0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 1 & 1 & 0 & -2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 4 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -2 & 1 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 2 & 2 & -1 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 4 & 0 & -2 & 2 & -1 & -1 & 1 \\
-1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & -1 & -1 & 1 & -1 \\
0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & -1 & -2 & -2 & -1 & -1 & -2 & 0 & 4 & -2 & 0 & -1 & 1 \\
0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & -1 & -2 & 4 & 0 & -1 & 1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 \\
-1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 4 & -1 \\
2 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 5
\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}
3 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 3 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 2 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 3 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
-1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 3 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \\
0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\
-1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 4 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 2 & -2 \\
-1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 4 & 0 & -2 & 1 & 2 & -1 & -2 & 2 \\
-1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & 1 & -2 & 0 & 4 & 0 & -1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & -2 & 0 & 4 & -1 & -1 & -1 & 2 & -1 \\
2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & 4 & 2 & -2 & -1 & 1 \\
0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & -1 & -1 & 2 & 4 & -2 & -1 & 0 \\
-1 & 2 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -2 & -2 & 4 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 2 & -2 & -1 & 2 & -1 & -1 & 1 & 5 & -2 \\
0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 1 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & -2 & 2 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & -2 & 5
\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}
3 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -2 & 1 & 1 & -1 & 1 & 2 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\
0 & 3 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\
-1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\
0 & -1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & -2 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & -2 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\
-2 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 0 & -2 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\
1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 4 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\
1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -2 & -2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 2 & -2 & -1 \\
-1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 4 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & -2 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -2 & 4 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\
2 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -2 & 1 & 1 & -1 & 1 & 4 & -1 & -2 & -2 & -1 & 2 & 2 & -2 & 2 \\
0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 4 & 0 & 2 & 1 & 0 & -2 & 2 & 1 \\
-1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\
-1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & 4 & 2 & -2 & -1 & 1 & 1 \\
-1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 2 & 4 & 0 & -1 & 1 & 2 \\
0 & 2 & 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & -2 & 0 & 4 & 0 & -1 & 1 \\
2 & 1 & -1 & 0 & 0 & -2 & -2 & 0 & 2 & -1 & 1 & 2 & -2 & -1 & -1 & -1 & 0 & 5 & -2 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -2 & -1 & -1 & -2 & 2 & 0 & 1 & 1 & -1 & -2 & 5 & 0 \\
1 & 0 & 1 & -1 & -2 & 0 & 0 & 2 & -1 & -2 & 1 & 2 & 1 & -2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 5
\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}
3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\
0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & -1 & 1 & 2 & -1 & -1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 1 & -1 \\
0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\
1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -2 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & -1 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 3 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\
0 & -2 & -1 & -1 & -1 & 0 & 4 & 2 & -1 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -2 & 1 \\
1 & -2 & -1 & 1 & 0 & -1 & 2 & 4 & -2 & 0 & -1 & -2 & 2 & 2 & 0 & 2 & 0 & -1 & -1 & 0 \\
-1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 4 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\
-1 & -1 & 0 & -1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & -1 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\
0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & -2 & -1 & 2 & 0 & 4 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\
-1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & -2 & -2 & 2 & -1 & 2 & 4 & -1 & -1 & 1 & -2 & -2 & 1 & 1 & -1 \\
1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 & 0 & -1 & -1 & -1 & 4 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\
0 & -1 & 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 4 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 & -1 & -1 & 4 & -2 & 0 & 0 & 0 & -2 \\
1 & -2 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 2 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & -1 \\
1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & -2 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & -2 & -1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 & -1 & -1 & 1 & -2 & 1 & -1 & -2 & 0 & 5
\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}
3 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -2 & -1 & -1 & 0 & -1 \\
0 & 3 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\
-1 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 2 & -1 \\
1 & -1 & 1 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 & -1 & \\
0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
-1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 2 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & -2 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 1 & -2 & 2 \\
0 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 4 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\
-1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 4 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \\
-1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & -2 & 2 & 2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
-2 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & -1 & 2 \\
-1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & -1 & 2 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 4 & -1 & 2 \\
0 & -2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & -2 & 2 & 1 & 2 & 1 & -1 & -1 & -1 & 4 & -2 \\
-1 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & -1 & 0 & -2 & -1 & 2 & 2 & 2 & -2 & 4
\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}
3 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\
-1 & -1 & 3 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & -1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\
-1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\
-1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & -1 \\
-1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
-1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & -1 & -2 & 1 & -1 & -1 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & -1 & -2 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 4 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 1 & -1 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 2 & -2 & 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \\
0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 4 & 2 & -1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 4 & -1 \\
0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & 4
\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}
3 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\
-1 & 3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\
-1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\
-1 & -1 & 1 & 3 & -1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
-1 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & -1 & -2 & 2 \\
0 & -1 & 0 & 2 & -2 & 1 & -1 & 4 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
-1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & -2 & 0 & 2 & -1 \\
-1 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 2 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\
2 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & -2 & -1 & 4 & -2 & -1 & 1 & 2 & -2 & -1 & 1 & -2 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 2 & -2 & 4 & 2 & 0 & -2 & 2 & 2 & -1 & 2 \\
-1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 4 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & -2 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\
1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & -1 & 4 & -1 & -2 & 0 & -2 \\
0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 1 & -2 & 1 & 4 & 0 & 1 \\
-1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & -2 & 0 & 4 & -1 \\
-1 & 2 & 1 & 0 & -1 & 1 & 2 & 1 & -1 & -1 & 2 & -2 & 2 & 1 & -2 & -2 & 1 & 1 & -1 & 5
\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}
3 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
-1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\
1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & -2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
-1 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 3 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 4 & 0 & 2 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -3 \\
-1 & -1 & -2 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 2 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 4 & -2 & -2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & -2 \\
-1 & 0 & -2 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -2 & 2 & -2 & 4 & 2 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 2 \\
0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -2 & 2 & 4 & -2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -2 & 4 & 0 & 1 & 2 & -1 & -1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 4 & 0 & -1 & 2 & 1 & -1 \\
-1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 4 & 2 & 1 & -1 & -2 \\
0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 2 & -1 & 2 & 4 & -1 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & -1 & 4 & 1 & -1 \\
0 & -1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 4 & -2 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -3 & 0 & -2 & 2 & 0 & 1 & -1 & -2 & -1 & -1 & -2 & 5
\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}
3 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\
-1 & 3 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 1 & -1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\
-1 & 1 & 1 & 3 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & -2 & -2 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -2 & 1 & -2 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -2 & 0 & -2 & -1 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 4 & -2 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\
-1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\
-1 & 0 & 1 & 1 & -1 & -2 & -1 & -1 & 1 & 2 & 4 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 2 & -2 & 2 & 2 \\
0 & 0 & -1 & -1 & -2 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 4 & -2 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 4 & -1 & -2 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\
0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 4 & 2 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\
1 & -1 & -2 & -2 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 2 & -2 & 2 & 4 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\
1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & -1 & 1 \\
-1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 2 \\
0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & -2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 4 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 5 & 0 \\
-1 & 1 & -1 & 1 & -2 & 0 & -1 & -2 & -1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 6
\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}
3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\
0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\
1 & 0 & 3 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 1 & -1 & 3 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -2 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & -2 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -2 & 1 & -2 & 0 \\
-1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -2 & 0 & 4 & 2 & 2 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\
-1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & -2 & -2 & 0 & 2 & 1 & 4 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\
0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 4 & -1 & -2 & 1 & 0 & 1 & -1 \\
0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & -2 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -2 & -1 & 4 & 0 & 1 & -2 & 1 \\
0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 4 & 0 & 2 & -1 \\
-1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 4 & -2 & 0 \\
1 & -1 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & -2 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & -2 & 2 & -2 & 4 & 0 \\
2 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 5
\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}
3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 2 & -1 & -2 & -1 & -1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\
-1 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 1 & -1 & 3 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & -1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 3 & 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\
0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & -2 \\
-1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 4 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
-1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -2 & 0 & 0 \\
-1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 & -1 & 4 & -1 & -2 & -1 & -1 & -1 & 2 & 2 & -1 \\
-1 & -1 & 1 & 0 & -2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 4 & 2 & 2 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\
-1 & -2 & 1 & -1 & -1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & -2 & 2 & 4 & 1 & 0 & -1 & -2 & -2 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & 4 & -1 & -1 & -1 & -1 & 2 \\
1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 4 & 2 & 0 & -1 & 0 \\
2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 2 & 4 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -2 & 2 & -1 & -2 & -1 & 0 & 1 & 4 & 2 & 0 \\
0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 & 2 & 4 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4
\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}
3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -2 & 2 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\
-1 & 3 & 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 3 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 3 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\
0 & -1 & 1 & 0 & 4 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 4 & -1 & -1 & -1 & 2 & 1 & 0 & -1 & -1 & 2 & -2 & -1 & -1 & 1 & -2 \\
1 & -2 & -1 & 1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & -2 & 2 & -1 & -1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 4 & -1 & -1 & 0 & -1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & 4 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & -1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 4 & -2 & 1 & -1 & 1 & -2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
1 & -1 & -1 & -1 & -2 & 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & -2 & 4 & 0 & -1 & 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 & 4 & 0 & -2 & -1 & 0 & -2 & 0 & 2 \\
-2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 4 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\
2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & -2 & -2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\
1 & -1 & -1 & 1 & 0 & -2 & 2 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 1 \\
-1 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & -1 & 0 \\
1 & -1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & -2 & -1 & 1 & 2 & -1 & 4 & 0 & -1 \\
1 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 4 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 2 & 1 & -2 & 1 & 0 & -1 & 1 & 4
\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}
3 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & -1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \\
-1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\
-1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & -1 \\
-1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\
-1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
-1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & 1 & 1 & -2 & -2 \\
-1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 2 & 1 & -2 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\
-1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 4 & 2 & -2 & -1 & -1 & -2 & -2 & -2 & -2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -2 & 0 \\
1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -2 & -1 & -1 & -1 & -2 & -2 & 0 & 4 & -1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\
-1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & -1 & 4 & 2 & 2 & 1 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 2 & 4 & 2 & 0 & 0 & -1 \\
-1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & -2 & 0 & 1 & 2 & 2 & 4 & 1 & 0 & 1 \\
0 & -1 & 1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & -2 & -2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 4 & 2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & -2 & 0 & 1 & -2 & -1 & -2 & -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 5 & 2 \\
1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -2 & 0 & -2 & 0 & 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 2 & 6
\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}
3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -2 & 0 & 2 & 0 & -2 & 1 & -1 & 1 & -2 & 0 \\
-1 & 3 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & -1 & 3 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & -1 & 0 & -2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\
1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\
1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
1 & -1 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 1 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 & 1 & -2 & 2 \\
1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 4 & -1 & -1 & 2 & 0 & -2 & 2 & 0 & 2 & -1 & -1 \\
-2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 4 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\
2 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 4 & -1 & -2 & 1 & -1 & 2 & -2 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 & -2 \\
-2 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -2 & 2 & 2 & -2 & -1 & 4 & -1 & 1 & -1 & 2 & 2 \\
1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & 4 & 0 & 2 & -2 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 2 & -1 \\
1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 2 & -1 & -1 & 2 & 0 & 4 & -1 & 1 \\
-2 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 2 & -2 & 2 & -1 & 5 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 2 & -1 & 1 & 2 & 0 & -2 & 2 & 0 & -1 & 1 & -1 & 5
\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}
3 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\
1 & 3 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\
0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\
0 & 1 & 1 & -1 & 3 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 2 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \\
-1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\
-1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 3 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & -2 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 4 & 1 & -1 & -2 & -1 & 1 & -1 & -2 & 2 & -1 & -1 & -2 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\
-1 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 4 & 0 & 2 & -2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 2 \\
0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 4 & -1 & -1 & 2 & 2 & 0 & 2 & 1 & 2 \\
-1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 2 & -1 & 4 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 2 & 2 \\
0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & -1 & 4 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\
1 & 2 & 2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\
1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -2 & 0 & 2 & -1 & -1 & 1 & 4 & -2 & 2 & 1 & 1 \\
0 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 2 & 2 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -2 & 4 & 0 & -1 & -1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 4 & 2 & 2 \\
-2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & -2 & -1 & 0 & 2 & 1 & 2 & -1 & -1 & 1 & -1 & 2 & 5 & 2 \\
0 & 1 & 1 & -1 & 2 & -1 & 2 & -1 & -2 & 1 & 2 & 2 & 2 & -1 & 2 & 1 & -1 & 2 & 2 & 5
\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}
3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 2 & -1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & -2 & -1 & 2 & 0 & -2 & 1 & -2 & -2 \\
-1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 4 & 1 & 0 & -2 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & -2 & -2 \\
-1 & -2 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -1 & -2 & 2 & 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -2 & -2 & 1 & 0 & 4 & 1 & -2 & 1 & 1 & -1 & 2 & 2 \\
1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 2 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\
0 & -1 & -1 & 1 & -2 & -1 & -1 & -1 & 2 & 2 & 1 & 0 & -2 & -1 & 4 & -2 & -1 & -1 & -1 & -2 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -2 & 4 & 0 & 2 & -1 & 2 \\
0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 4 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 2 & -1 & 4 & -2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & -2 & -2 & 0 & 0 & 2 & 2 & -1 & -1 & 0 & -2 & 4 & 2 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -2 & -2 & 0 & 2 & 2 & 0 & -2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 5
\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}
3 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\
-1 & 3 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 3 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\
1 & -1 & 0 & 0 & 3 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 3 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 3 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\
-1 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
-1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & -1 & 3 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & -2 & -1 & -2 \\
-1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & 4 & -2 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & -2 & 4 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & 1 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 5
\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}
3 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\
0 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 4 & -2 & 1 & 1 & -2 & -2 & 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\
-1 & 1 & 1 & 0 & -2 & 4 & 0 & -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & -2 & 2 \\
-1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 4 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 4 & -2 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & -2 \\
-1 & 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & -1 & -2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\
-1 & 0 & 1 & 0 & -2 & 2 & 1 & -1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -2 & 2 \\
0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -2 & 1 & -1 & 0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 1 \\
0 & -1 & 1 & -2 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -2 & 4 & 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 2 & 1 & -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 4 & -1 & 2 & -1 & -1 & -2 & -1 & 2 \\
-2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 4 & -1 & -1 & 2 & 2 & -2 & 0 \\
1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 4 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & -1 \\
-1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -2 & 2 & -1 & 2 & 1 & -1 & 4 & 2 & -1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & -2 & 2 & -1 & 0 & 2 & 4 & -1 & -1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 2 & -2 & -2 & 1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & -1 & -1 & 4 & 0 \\
-1 & 0 & 2 & -2 & 0 & 2 & 1 & -2 & -1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 6
\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}
3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -2 & -2 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & -2 & 0 \\
0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 3 & 0 & -1 & -2 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 4 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 4 & 2 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -2 & 0 & 2 & 4 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 2 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & -1 & -2 \\
0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 2 & 2 & -1 & 4 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -2 & -1 & 2 \\
-2 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & -2 & -1 & 2 & 1 & -1 & -1 \\
-1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 4 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -2 & 1 & -2 & -1 & 4 & 1 & -1 & -1 & 1 & 2 \\
0 & -1 & 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 2 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 4 & -1 & 0 & 2 & 0 \\
-1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 0 & -1 & 2 & 0 & -1 & -1 & 4 & 2 & -2 & -2 \\
0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 1 & -2 & 1 & 1 & -1 & 0 & 2 & 4 & -1 & -2 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 2 & -2 & -1 & 4 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & -2 & 2 & -1 & 0 & 2 & 0 & -2 & -2 & 1 & 4
\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}
3 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & -2 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 3 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & -1 & 3 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\
-1 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\
1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 2 & 0 & -1 & 0 & -1 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\
0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\
1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\
-2 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 4 & 2 & 2 & 1 & -1 & -1 & -1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\
-1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 4 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\
-1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 4 & 1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
-1 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 4 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\
1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\
1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 4 & 1 & 0 & 1 & -1 & -2 \\
0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 4 & 0 & -1 & 0 & -2 \\
-1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 4 & 1 & 2 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 4 & -1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 & 4 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & -1 & -2 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -2 & -2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 5
\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}
3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\
1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 3 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 3 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & -1 \\
-1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & -1 & -2 & -1 \\
1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\
-1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
-1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & -1 & -1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\
0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 4 & -1 & -1 & -1 & -2 & -2 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 4 & 0 & 1 & 1 & 2 \\
-1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 4 & 1 & 2 & 0 \\
1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & -2 & -1 & 1 & 2 & -1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 4 & 1 & 2 \\
0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & -2 & 1 & 2 & 1 & 4 & 2 \\
1 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & -2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 4
\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}
3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\
-1 & 3 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & -1 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -1 & -1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & -1 & 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
-1 & 2 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\
1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 2 & -1 & -1 & 4 & -1 & -1 & 2 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 2 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & -2 & 1 & 1 & -2 & 1 & -1 & -1 & -2 & -1 \\
0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 & -1 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\
-1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & -2 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -2 & 2 & 2 & -1 & -1 & 4 & -1 & -1 & 1 & 2 & 2 \\
-1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 4 & -1 & -1 & -1 & -2 \\
0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & -2 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 4 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 4 & 1 & 0 \\
2 & -1 & 0 & -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 2 & -2 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 & 5 & 3 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 2 & -1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 3 & 5
\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}
3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\
-1 & 3 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & -2 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\
0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\
-1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & -1 & -2 & -1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 4 & 2 & 1 & 2 & -1 & 1 & 2 & 2 & -1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -2 & 0 & -1 & 2 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
2 & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 4 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\
0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 & 1 \\
-1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 4 & -1 & -2 & 0 & -1 & 1 & -2 \\
0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\
1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & -2 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 2 \\
-1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 4 & -2 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & -2 & -1 & 1 & 1 & -2 & 4 & 0 & 1 \\
1 & -1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 \\
1 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 2 & 0 & 1 & -1 & 4
\end{pmatrix}$$

7.2 N=3

$n = 10$

$$Gram(L) = \begin{pmatrix}
3 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
-1 & 1 & 3 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\
-1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\
1 & 1 & -1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & -1 & 1 & 1 & -1 \\
-1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 3 & -1 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 3 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 3 & -1 \\
1 & 0 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 3
\end{pmatrix}$$

$n = 12$

$$Gram(L) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 4 & -2 & -1 & -2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -2 & 4 & -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 4 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 2 & -1 & 4 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 & -2 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$n = 20$

$$Gram(L) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

7.3 N=5

$n = 6$

$$Gram(L) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$n = 8 Gram(L) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 3 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 4 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -2 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$n = 10$

$$Gram(L) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$n = 12$

$$Gram(L) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

7.4 N=6

$$n = 8 Gram(L) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$n = 12$

$$Gram(L) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & -2 & -2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & -1 & -2 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & -1 & 4 & 2 & -1 & 0 & -2 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & -1 & -2 & 2 & 4 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 5 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 5 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -2 & -1 & 1 & -1 & 5 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & -2 & -2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$n = 16$

$$Gram(L) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

7.5 N=7

$n = 4$

$$Gram(L) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$n = 6$

$$Gram(L) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$n = 8$

$$Gram(L) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

7.6 N=11

$n = 4$

$$Gram(L) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

7.7 N=14

$n = 4$

$$Gram(L) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$n = 8$

$$Gram(L) = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -3 & -3 & -2 & 0 & -2 & -2 \\ 3 & 6 & 0 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 6 & 3 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & 3 & 6 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & 0 & 2 & 6 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 6 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ -2 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

7.8 N=15

$n = 4$

$$Gram(L) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 6 & -2 \\ -1 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

7.9 N=23

$n = 2$

$$Gram(L) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}$$

Literaturverzeichnis

[BV01] C. Bachoc and B. Venkov. Modular forms, lattices and spherical designs. In *Réseaux euclidiens designs sphériques et formes modulaires*, number 37, pages 87–111. 2001.

[CS99] J. H. Conway and N. J. A. Sloane. *Sphere packings, lattices and groups*. Springer, 1999.

[Ebe94] W. Ebeling. *Lattices and Codes*. Vieweg, 1994.

[Elk95a] N. Elkies. A characterization of the lattice $\mathbb{Z}^n$. *Mathematical Research Letters*, 2:321–326, 1995.

[Elk95b] N. Elkies. Lattices and codes with long shadows. *Math. Res. Lett. 2*, 3:321–326, 1995.

[Gab] P. Gaborit. A bound for certain s-extremal lattices and codes. http://www.unilim.fr/pages perso/philippe.gaborit/JNT gaborit.ps.

[Hem03] B. Hemkemeier. *Algorithmische Konstruktionen von Gittern*. PhD thesis, Universität Dortmund, 2003.

[KK98] M. Koecher and A. Krieg. *Elliptische Funktionen und Modulformen*. Springer, 1998.

[Kne57] M. Kneser. Klassenzahlen definiter quadratischer Formen. *Archiv der Math.*, 8(241-250), 1957.

[Kne02] M. Kneser. *Quadratische Formen*. Springer, 2002.

[Neb04] G. Nebe. Strongly modular lattices with long shadow. *Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux*, (16):187–196, 2004.

[NSa] G. Nebe and K. Schindelar. S-extremal strongly modular lattices. in Vorbereitung.

[NSb] G. Nebe and N. Sloane. A catalogue of lattices. Elektronisch erhältlich unter http://www.research.att.com/ njas/lattices/.

[NV03] G. Nebe and B. Venkov. Unimodular lattices with long shadow. *Journal of Number Theory*, 99:307–317, 2003.

[Que95] H.-G. Quebbemann. Modular lattices in euclidean spaces. *Journal of number theory*, 54(2):190–202, 1995.

[Que97] H.-G. Quebbemann. Atkin-Lehner eigenforms and strongly modular lattices. *L' Ens. Math.*, 54:55–65, 1997.

[Rem92] R. Remmert. *Funktionentheorie 1*. Springer, 1992.

[RS98] E. M. Rains and N. J. A. Sloane. The shadow theory of modular and unimodular lattices. *Journal of Number Theory*, 73:359–389, 1998.

[SSP99] R. Scharlau and R. Schulze-Pillot. Extremal lattices. *Algorithmic Algebra and Number Theory*, pages 139–170, 1999.

[Tei05] M. Teider. Siegelsche Thetareihen zu den zehn leechartigen, extremalen, stark modularen, geraden Gittern. Master's thesis, Universität Ulm, http://www.math.rwth-aachen.de/ nebe/dipl/teider.pdf, 2005.