Gitter und Modulformen

Gabriele Nebe
Universität Ulm

Ein **Gitter** L im Euklidischen Vektorraum $(\mathbf{R}^n, (\ ,\ ))$ ist

$$L = \{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i \mid \alpha_i \in \mathbf{Z}\}$$

wo $(b_1, \ldots, b_n)$ eine Basis vom $\mathbf{R}^n$ ist.

Numerische Invarianten von Gittern:

Minimum $\quad \mathrm{min}(L) := \mathrm{min}\{(x,x) \mid 0 \neq x \in L\}$

Determinante $\quad \mathrm{det}(L) := \mathrm{vol}(\mathbf{R}^n/L)^2 = \mathrm{det}((b_i, b_j)_{i,j=1}^n)$

Dichte $\quad \Delta(L) = \frac{V_n}{2^n}\sqrt{\frac{\mathrm{min}(L)^n}{\mathrm{det}(L)}}$

$V_n =$ Volumen der n-dimensionalen Einheitssphäre

$\min(\square) = 2$

$\det(\square) = \det(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}) = 4$

$\Delta(\square) = \frac{V_2}{2^2}\frac{2}{\sqrt{4}} = \frac{\pi}{4} \cong 0,785$

$\min(\hexagon) = 2$

$\det(\hexagon) = \det(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}) = 3$

$\Delta(\hexagon) = \frac{V_2}{2^2}\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \cong 0,907$

Ziel:

Bestimme die dichtesten Gitter gegebener Dimension.

Die dichtesten Gitter in Dimension $n \leq 8$:

n	1	2	3	4	5	6	7	8
	$\mathbf{Z}$	A_2	A_3	D_4	D_5	E_6	E_7	E_8

($n \leq 5$) Korkine, Zolotareff (1878)

($n = 6, 7, 8$) Blichfeldt (1935)

Das **duale Gitter** ist $L^* = \{v \in \mathbf{R}^n \mid (v,x) \in \mathbf{Z} \text{ für alle } x \in L\}$.

L heißt **ganz**, falls $(x,y) \in \mathbf{Z}$ für alle $x, y \in L$, also falls $L \subset L^*$.
L heißt **gerade**, falls $(x,x) \in 2\mathbf{Z}$ für alle $x \in L$.

L heißt **unimodular**, falls $L = L^*$.
Satz. L gerade unimodular $\Rightarrow$ 8 teilt n.

L heißt N-**modular**, falls $L \subset L^*$ und $L \cong \sqrt{N} L^*$

$L \subset L^* \Rightarrow \det(L) = |L^*/L|$.
L N-modular $\Rightarrow \det(L) = N^{n/2}$.

Problem:
Bestimme die dichtesten N-modularen Gitter.
(also die N-modularen Gitter mit größtmöglichem Minimum)

Bei der Lösung hilft die Theorie der Modulformen !
Man kann gewissen (sogenannten **extremalen**) N-modularen Gittern ansehen, daß sie dichteste N-modulare Gitter sind, ohne alle anderen Gitter zu kennen.

Theta-Reihen

Sei $L \subset \mathbf{R}^n$ ein gerades Gitter.

$$\theta_L := \sum_{x \in L} q^{(x,x)/2} = \sum_{m=0}^{\infty} a_m q^{m/2}$$

$$a_m := |\{x \in L \mid (x,x) = m\}|$$

$$q = \exp(2\pi i z), \quad z \in \mathbf{H} = \{z \in \mathbf{C} \mid \Im(z) > 0\}$$

Beispiele:

$$\theta_{\square} = 1 + 4q + 4q^2 + 4q^4 + 8q^5 + \ldots$$

$$\theta_{\hexagon} = 1 + 6q + 6q^3 + 6q^4 + 12q^7 + \ldots$$

Satz: $\theta_L(z)$ ist eine **Modulform** vom Gewicht $\frac{n}{2}$.

Modulformen

Gewicht k, Gruppe $\Gamma \subset \mathsf{SL}_2(\mathbf{R})$, Charakter χ

$$f \in \mathcal{M}_k(\Gamma, \chi) \quad \Leftrightarrow$$

$$f|_k A(z) := (cz+d)^{-k} f(\frac{az+b}{cz+d}) = \chi(A) f(z) \quad \text{für alle } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$$

+ Holomorphiebedingung am Rand von $\mathbf{H}$.

$\mathcal{M}_k(\Gamma, \chi_k)$ ist ein endlich dimensionaler $\mathbf{C}$-Vektorraum.

$$\chi_k \chi_l = \chi_{k+l} \Rightarrow \mathcal{M}(\Gamma, \chi) := \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{M}_k(\Gamma, \chi_k)$$

ist ein endlich erzeugter Ring.

<u>Beispiel:</u>

$$\Gamma = \mathsf{SL}_2(\mathbf{Z}) \Rightarrow \mathcal{M}(\mathsf{SL}_2(\mathbf{Z})) = \mathbf{C}[E_4, E_6].$$

$$\mathcal{M}(1) := \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{M}_{4k}(\mathsf{SL}_2(\mathbf{Z})) = \mathbf{C}[E_4, \Delta]$$

$$E_4 = \theta_{E_8} = 1 + 240q + 2160q^2 + 6720q^3 + \ldots$$

$$\Delta = 1/720(\theta_{E_8}^3 - \theta_{Leech}) = q - 24q^2 + 252q^3 - 1472q^4 + \ldots$$

Satz: L gerades unimodulares Gitter $\Rightarrow \theta_L(z) \in \mathcal{M}_{n/2}(\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}))$.

$$\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) = \langle T := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, S := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \rangle$$

$$L \text{ gerade } \Rightarrow \theta_L(z)|_{\frac{n}{2}} T = \theta_L(z+1) = \theta_L(z)$$

Theta-Transformationsformel:

$$\theta_{L^*}(z) = (\frac{z}{i})^{-n/2} \sqrt{\det(L)} \theta_L(-\frac{1}{z})$$

$$L = L^* \Rightarrow \theta_L(z)|_{\frac{n}{2}} S = (-z)^{-n/2} \theta_L(-\frac{1}{z}) = \theta_{L^*}(z) = \theta_L(z)$$

Folgerung: L gerades unimodulares Gitter $\Rightarrow$

$$\min(L) \leq 2 + 2\lfloor \frac{n}{24} \rfloor.$$

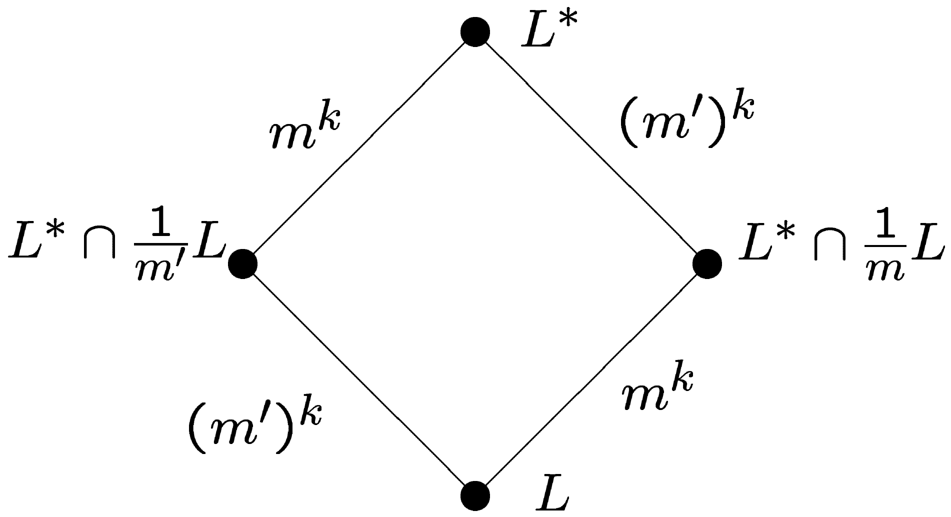
$$\mathcal{M}_{4k}(\mathsf{SL}_2(\mathbf{Z})) = \bigoplus_{n+3m=k} \mathbf{C}E_4^n\Delta^m, \quad \text{Dimension } d := \lfloor \frac{k}{3} \rfloor + 1$$

$$\begin{array}{rclllllllll}
E_4^k & = & 1 & + & 240kq & + & \ldots & & & & \\
\Delta E_4^{k-3} & = & & & q & + & \ldots & & & & \\
\Delta^2 E_4^{k-6} & = & & & & & q^2 & + & \ldots & & \\
\vdots & & & & & & & & & & \\
\vdots & & & & & & & & & & \\
\Delta^{d-1} E_4^{k-3(d-1)} & = & & & & & & & q^{d-1} & + & \ldots \\
\hline
f_{ext}(\mathcal{M}_{4k}(\mathsf{SL}_2(\mathbf{Z}))) & = & 1 & + & 0q & + & \ldots & + & 0q^{d-1} & + & a_{2d}q^d + \ldots
\end{array}$$

L heißt N-**modular**, falls $L \subset L^*$ und $L \cong \sqrt{N} L^*$.

L heißt **stark** N-**modular**, falls L N-modular ist und

$$L \cong \sqrt{m}(L^* \cap \frac{1}{m} L) \text{ für alle exakten Teiler } m \text{ von } N.$$



$$\dim(L) = 2k$$

$$\det(L) = N^k$$

$$N = m \cdot m'$$

Satz: (Quebbemann) Sei $N \in \{1,2,3,5,6,7,11,14,15,23\}$ und L ein gerades stark N-modulares Gitter. Dann liegt

$$\theta_L \in \mathcal{M}(N) = \mathbf{C}[\theta_N, \Delta_N]$$

Gewicht von Δ_N: $k_N := 12\sigma_0(N)/\sigma_1(N)$, wo
$\sigma_0(N)$ Anzahl der Teiler von N
$\sigma_1(N)$ Summe der Teiler von N.

L heißt **extremal**, falls $\min(L) = 2 + 2\lfloor \frac{n}{2k_N} \rfloor$.

N	1	2	3	5	6	7	11	14	15	23
k_N	12	8	6	4	4	3	2	2	2	1

Wie findet man extremale Gitter ?

a) Geschlecht auflisten.

b) Symmetriegruppen untersuchen.

c) Konstruktionen mit Codes.

d) Gezielte Konstruktion mit Modulformen.

a) Geschlecht auflisten. (R. Scharlau, B. Hemkemeier)

Es gibt nur endlich viele gerade Gitter L der Dimension $2k$, Determinante N^k, so daß $\sqrt{N}L^*$ gerade ist. Diese Gitter bilden eine endliche Vereinigung von **Geschlechtern**, welche mit der **Kneserschen Nachbarschaftsmethode** aufgelistet werden können. Das **Mass** des Geschlechts $\mathcal{G}$,

$$\sum_{L \in \mathcal{G}} |\mathrm{Aut}(L)|^{-1} = m(\mathcal{G})$$

kann analytisch bestimmt werden.

Aus den explizit bekannten endlich vielen Gittern kann man dann die stark N-modularen Gitter mit dem richtigen Minimum leicht herausfinden.

Alle exakten Werte in der Tabelle, außer 0* und die vier unterstrichenen Zahlen, sind auf diese Weise gefunden worden.

b) Symmetriegruppen untersuchen. (W. Plesken, N)

Gute Gitter in kleinen Dimensionen sind hochsymmetrisch.

Während der Klassifikation der maximal endlichen rationalen Matrixgruppen wurden viele dichte Gitter gefunden. In höheren Dimensionen ist es sinnvoll von der Maximalität leicht abzuweichen um extremale Gitter zu finden.

c) Konstruktionen mit Codes. (C. Bachoc, N)

Eine Idee von C. Bachoc führte zur Konstruktion einer Serie extremaler Gitter mit Minimum 8:
ein 7-modulares Gitter in Dimension 20
ein 3-modulares Gitter in Dimension 40
und zwei unimodulare Gitter in Dimension 80.
Dazu wurden Codes über $\mathbf{Z}[\frac{1+\sqrt{-7}}{2}]$, $\mathcal{Q}_{\infty,3}$, und der Oktonionen-Maximalordnung benutzt.

Auch andere extremale Gitter kommen von Codes über allgemeineren Ringen.

d) Gezielte Konstruktion mit Modulformen. (B. Venkov, C. Bachoc, N.)

1) Nichtexistenzbeweise bzw. Konstruktion und Vollständigkeitsbeweise der geraden extremalen N-modularen Gitter in Dimension n für

$$(N, n) = (11, 12),\ (7, 18),\ (5, 16),\ (2, 20)$$

2) Beweis der Nichtexistenz ungerader unimodularer Gitter mit Minimum 4 in Dimension 34 und 35.

3) Klassifikation der ungeraden unimodularen Gitter mit Minimum 3 in Dimension 27 und 28 (R. Bacher, B. Venkov).

Theta-Reihen mit harmonischen Koeffizienten.

$$P \in \mathrm{Harm}_t(n) = \{P \in \mathbf{R}[x_1, \ldots, x_n]_t \mid \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} P = 0\}$$

$$\theta_{L,P} := \sum_{x \in L} P(x) q^{(x,x)/2} = \sum_{m=0}^{\infty} (\sum_{x \in L_m} P(x)) q^{m/2}$$

wo $L_m = \{x \in L \mid (x,x) = m\}$.
Ist L gerades unimodulares Gitter, so ist

$$\theta_{L,P} \in \mathcal{M}_{\frac{n}{2}+t}(\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}))$$

Ist L zusätzlich extremal, so ist $L_m = \emptyset$ für $0 < m < d = \lfloor \frac{n}{24} \rfloor + 1$, d.h. für $t > 0$ ist wegen $P(0) = 0$

$$\theta_{L,P} = 0 + 0q + \ldots + 0q^{d-1} + a_d q^d + \ldots$$

Ist $\dim(\mathcal{M}_{\frac{n}{2}+t}) = d$ also $\lfloor \frac{n}{24} \rfloor = \lfloor \frac{n+2t}{24} \rfloor$, so ist $\theta_{L,P} = 0$ also

$$\sum_{x \in L_m} P(x) = 0 \quad \text{für alle } m.$$

Harmonische Polynome.

Für $\alpha \in \mathbf{R}^n$ konstruiert man harmonische Polynome:

$$P_2(x) := (x,\alpha)^2 - \frac{1}{n}(\alpha,\alpha)(x,x)$$

$$P_4(x) := (x,\alpha)^4 - \frac{6}{n+2}(x,\alpha)^2(\alpha,\alpha)(x,x) + \frac{3}{(n+2)(n+4)}(x,x)^2(\alpha,\alpha)^2$$

$t = 2$:

$$\sum_{x \in L_m} (x,\alpha)^2 = \frac{1}{n} m |L_m| (\alpha,\alpha) \text{ für alle } \alpha \in \mathbf{R}^n$$

$t = 2$ und $t = 4$:

$$\sum_{x \in L_m} (x,\alpha)^4 = \frac{3}{n(n+2)} m^2 |L_m| (\alpha,\alpha)^2 \text{ für alle } \alpha \in \mathbf{R}^n$$

Beispiel: Eindeutigkeit des 5-modularen Gitters L in Dimension 16 mit Minimum 6.

Sei $\alpha = y \in L^*_{6/5}$.
Für $x \in L_6$ ist $(\alpha, x) \in \{0, \pm 1, \pm 2\}$.
Mit $n_i := |\{x \in L_6 \mid (x, \alpha) = \pm i\}|$, $i = 0, 1, 2$ gilt:

$n_0 + n_1 + n_2 = |L_6| = 2400$, $n_1 + 4n_2 = 1080$, $n_1 + 16n_2 = 1296$

Lösung: $n_0 = 1374$, $n_1 = 1008$, $n_2 = 18$.
Es gibt also genau 9 Vektoren

$$x = x_1, \ldots, x_9 \in L_6 \text{ mit } (y, x_i) = 2$$

Ebenso findet man genau 9 Vektoren

$$y = y_1, \ldots, y_9 \in L_{6/5} \text{ mit } (x, y_i) = 2$$

$(x_1+\ldots+x_9, y) = 18,\ (y,y) = \frac{6}{5},\ (x_i - x_j, x_i - x_j) \geq 6$ für $i \neq j$
$(x_1+\ldots+x_9, x_1+\ldots+x_9) \leq 9 \cdot 6 + 9 \cdot 8 \cdot 3 = 15^2 \cdot \frac{6}{5}$

$$\Rightarrow (x_i, x_j) = 3 \text{ für alle } i \neq j$$

und $x_1+\ldots+x_9 = 15y$.

Ebenso findet man

$$(y_i, y_j) = 3/5 \text{ für alle } i \neq j$$

sowie

$$(y_i, x_i) = 0 \text{ und } (y_i, x_j) = 1 \text{ für alle } i \neq j \geq 2.$$

Man kennt also die Gram Matrix des von $(y_1, \ldots, y_8, x_1, \ldots, x_8)$ erzeugten Teilgitters M von L^*. Explizite Konstruktion aller relevanten Obergitter von M liefert bis auf Isometrie genau ein mögliches Gitter L^*.

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 \\ 3 & 6 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 10 & 0 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 3 & 3 & 6 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 10 & 5 & 0 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 6 & 3 & 3 & 3 & 3 & 10 & 5 & 5 & 0 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 6 & 3 & 3 & 3 & 10 & 5 & 5 & 5 & 0 & 5 & 5 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 6 & 3 & 3 & 10 & 5 & 5 & 5 & 5 & 0 & 5 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 6 & 3 & 10 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 0 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 6 & 10 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 0 \\ 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 30 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 \\ 10 & 0 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 15 & 30 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 \\ 10 & 5 & 0 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 15 & 15 & 30 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 \\ 10 & 5 & 5 & 0 & 5 & 5 & 5 & 5 & 15 & 15 & 15 & 30 & 15 & 15 & 15 & 15 \\ 10 & 5 & 5 & 5 & 0 & 5 & 5 & 5 & 15 & 15 & 15 & 15 & 30 & 15 & 15 & 15 \\ 10 & 5 & 5 & 5 & 5 & 0 & 5 & 5 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 30 & 15 & 15 \\ 10 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 0 & 5 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 30 & 15 \\ 10 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 0 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 30 \end{pmatrix}$$

Determinante $5^{-8}4^{6}$.