Rechnen mit sporadischen Gruppen

Gerhard Hiß
Lehrstuhl D für Mathematik
RWTH Aachen

RWTH Aachen

Jahrestagung der DMV 2006
Bonn, 21. 09. 2006

Die sporadischen Gruppen

Theorem (Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen)

Jede endliche einfache Gruppe ist

- *zyklisch von Primzahlordnung, oder*
- *eine alternierende Gruppe, oder*
- *eine endliche Gruppe vom Lie-Typ, oder*
- *eine von 26 sporadischen Gruppen.*

Die kleinste sporadische Gruppe

Die Mathieu-Gruppe M_{11} hat 7 920 Elemente.

- Automorphismengruppe des Steinersystems $\mathcal{S}(4, 5, 11)$.
- $M_{11} = \langle a, b \rangle$ mit
  - $a = (2, 10)(4, 11)(5, 7)(8, 9)$, $\qquad b = (1, 4, 3, 8)(2, 5, 6, 9)$

    in S_{11}, oder
  - $$a = \begin{bmatrix} . & 1 & . & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & . & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ . & 1 & 1 & 1 & 1 \\ . & 1 & 1 & 2 & . \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} . & 2 & 2 & . & 2 \\ 1 & . & . & 2 & . \\ . & . & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & . & . & . \\ . & 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

    in $\mathrm{GL}(5, \mathbb{F}_3)$

…und die Größte

Das Monster M hat

$$808\,017\,424\,794\,512\,875\,886\,459\,904\,961\,710\,757\,005\,754\,368\,000\,000\,000$$

oder ungefähr $8 \cdot 10^{53}$ Elemente.

Kleinste Realisierung von M als Permutationsgruppe auf

$$97\,239\,461\,142\,009\,186\,000$$

Punkten

Kleinste Realisierung von M als Matrixgruppe in Dimension

$$196\,882$$

über $\mathbb{F}_2$

Maximale Untergruppen

Maximale Untergruppen aller sporadischen Gruppen bekannt, mit Ausnahmen derjenigen von M.

$\mathrm{PGL}(2, \mathbb{F}_{29}) = \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_{29})/\langle \mathrm{Skal.Mat.} \rangle$ ist maximale Untergruppe von M [P.E. Holmes, R.A. Wilson, 2002] ($|\mathrm{PGL}(2, \mathbb{F}_{29})| = 24360$).

$\mathrm{PSL}(2, \mathbb{F}_{59}) = \mathrm{SL}(2, \mathbb{F}_{59})/\langle \mathrm{Skal.Mat.} \rangle$ ist maximale Untergruppe von M [P.E. Holmes, R.A. Wilson, 2004].

$\mathrm{PSL}(2, \mathbb{F}_{41})$ ist keine Untergruppe von M [S.P. Norton, 1998].

Ist $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{F}_{27})$ eine Untergruppe von M? Wenn ja, maximal?

Klassifikation irreduzibler Darstellungen

Fakt

Es gibt nur endlich viele irreduzible F-Darstellungen von G (bis auf Äquivalenz).

Ziele

- *Klassifiziere alle irreduziblen F-Darstellungen einer gegebenen Gruppe G über einem gegebenen Körper F.*
- *Beschreibe alle irreduziblen Darstellungen aller endlichen einfachen Gruppen.*
- *Benutze Computer für die sporadischen einfachen Gruppen.*

Kleinste Matrixdarstellungen der sporadischen Grpn.

Grp.	Dim.	Kp.
M_{11}	5	$\mathbb{F}_3$
M_{12}	10	$\mathbb{F}_2$
M_{22}	10	$\mathbb{F}_2$
M_{23}	11	$\mathbb{F}_2$
M_{24}	11	$\mathbb{F}_2$
J_1	7	$\mathbb{F}_{11}$
J_2	6	$\mathbb{F}_4$
J_3	18	$\mathbb{F}_9$
J_4	112	$\mathbb{F}_2$

Grp.	Dim.	Kp.
HS	20	$\mathbb{F}_2$
McL	21	$\mathbb{F}_3$
Suz	64	$\mathbb{F}_3$
Ru	28	$\mathbb{F}_2$
He	50	$\mathbb{F}_7$
Ly	111	$\mathbb{F}_5$
ON	154	$\mathbb{F}_3$
Co_1	24	$\mathbb{F}_2$
Co_2	22	$\mathbb{F}_2$

Grp.	Dim.	Kp.
Co_3	22	$\mathbb{F}_2$
Fi_{22}	77	$\mathbb{F}_3$
Fi_{23}	253	$\mathbb{F}_3$
Fi_{24}	781	$\mathbb{F}_3$
HN	132	$\mathbb{F}_4$
Th	248	$\mathbb{F}_2$
B	4 370	$\mathbb{F}_2$
M	196 882	$\mathbb{F}_2$

Rob Wilson’s „Atlas of Finite Group Representations“

Große Sammlung expliziter Darstellungen sporadischer Gruppen findet sich auf Rob Wilsons *Atlas of Finite Group Representations:*

`http://brauer.maths.qmul.ac.uk/Atlas/v3/`

Diese Darstellungen wurden von Wilson et al. berechnet, z.B.

die Darstellung von M vom Grad 196 882 über $\mathbb{F}_2$ von Linton, Parker, Walsh und Wilson, 1998.

Alle diese Darstellungen stehen über eine Schnittstelle in GAP zur Verfügung (`http://www.gap-system.org/`).

Konstruktionen

Darstellungen (einer Gruppe G) können konstruiert werden

- aus Permutations-Darstellungen,
- aus zwei Darstellungen mittels ihres Tensor-Produkts,
- aus Darstellungen mittels invarianter Unterräume,
- auf viele andere Weisen.

Durch Iteration dieser Konstruktionen erhält man alle irreduziblen Darstellungen von G.

Die MeatAxe

Die MeatAxe ist eine Sammlung von Programmen die die obigen Aufgaben erledigen (für endliche Körper F), erfunden und entwickelt von Richard Parker und Jon Thackray um 1980,

weiter entwickelt und ergänzt von vielen Personen, darunter Derek Holt, Gábor Ivanyos, Klaus Lux, Jürgen Müller, Felix Noeske, Sarah Rees, und Michael Ringe.

Mit der MeatAxe können Darstellungen mit Graden bis zu 50 000 über $\mathbb{F}_2$ behandelt werden.

Über größeren Körpern sind nur noch deutlich kleinere Grade realistisch.

Die MeatAxe: Grundprobleme

Sei $\mathfrak{X} : G \to \mathrm{GL}(d, F)$ eine F-Darstellung von G.

Frage

Wie findet man einen nicht-trivialen, echten G-invarianten Unterraum von F^d?

- Es genügt, einen Vektor $w \neq 0$ zu finden, der in einem echten G-invarianten Unterraum W liegt.
- In der Tat, sei $0 \neq w \in W$, dann spannt die Bahn $\{g.w \mid g \in G\}$ einen in W enthaltenen G-invarianten Unterraum auf.

Frage

Wie zeigt man, dass $\mathfrak{X}$ irreduzibel ist?

Norton's Irreduzibilititäts-Kriterium

Seien A, B $(d \times d)$-Matrizen über F.

Sei $C \in F[A, B]$. Dann tritt einer der folgenden Fälle ein:

1. C ist regulär.
2. Es existiert ein nicht-trivialer Vektor im Nullraum von C, der in einem echten $F[A, B]$-invarianten Unterraum liegt.
3. Jeder nicht-triviale Vektor im Nullraum von C^t liegt in einem echten $F[A^t, B^t]$-invarianten Unterraum.
4. $F[A, B]$ operiert irreduzibel auf F^d.

Die MeatAxe: Grundstrategie

Ist $G = \langle a, b \rangle$, so sei $A := \mathfrak{X}(a)$, $B := \mathfrak{X}(b)$.

Finde $C \in F[A, B]$, singulär (durch Zufallsverfahren), mit einem Nullraum N von kleiner Dimension (am besten 1).

Teste für alle $0 \neq w \in N$ ob $F[A, B].w = F^d$ ist.
(Beachte: $F[A, B].w$ ist G-invariant.)

Falls JA,

Teste für ein $0 \neq w$ im Nullraum von C^t ob $F[A^t, B^t].w = F^d$ ist

Falls JA, ist $\mathfrak{X}$ irreduzibel.

Kondensation (qualitativ)

Sei $\mathfrak{X} : G \to \mathrm{GL}(d, F)$ eine F-Darstellung von G.

Kondensation verwendet geeignete Projektion $\mathfrak{P}$ auf Unterraum $W \leq F^d$.

Ziel: Berechne, für $g \in G$, die Operation von

$$\mathfrak{P} \cdot \mathfrak{X}(g) \cdot \mathfrak{P}$$

auf W, ohne die Operation von $\mathfrak{X}(g)$ auf F^d zu berechnen.

Das geht in vielen Fällen und lässt Rückschlüsse auf die Struktur der Darstellung $\mathfrak{X}$ zu.

[J. Thackray, R.A. Parker, 1981], [K. Lux, M. Wiegelmann, 1997]

Die irreduziblen Darstellungen von Fi_{23} über $\bar{\mathbb{F}}_2$

Kondensation und weitere Rechnungen mit GAP ergaben die Grade aller irreduziblen Darstellungen Fi_{23} für $F = \bar{\mathbb{F}}_2$:

$$\begin{array}{rrrr}
1, & 782, & 1\,494, & 3\,588, \\
19\,940, & 57\,408, & 79\,442, & 94\,588, \\
94\,588, & 583\,440, & 724\,776, & 979\,132, \\
1\,951\,872, & 1\,997\,872, & 1\,997\,872, & 5\,812\,860, \\
7\,821\,240, & 8\,280\,208, & 17\,276\,520, & 34\,744\,192, \\
73\,531\,392, & 97\,976\,320, & 166\,559\,744, & 504\,627\,200, \\
504\,627\,200. & & &
\end{array}$$

[H., Neunhöffer, Noeske, 2006]

Kenntnisstand für sporadische Gruppen

Grp.	Charakteristik	
	bek.	nicht vollst. bekannt
Suz	2–11	13
HN	5–11, 19	2*, 3*
Ly	7, 11, 31, 37, 67	2, 3*, 5
Th	19	2–7, 13, 31
Fi_{23}	2, 5–13, 23	3, 17
Co_1	7–13, 23	2, 3, 5
J_4	5, 7, 37	2, 3, 11, 23, 29, 31, 43
Fi_{24}'	11, 23	2–7, 13, 17, 29
B	11, 23	2–7, 13, 17, 19, 31, 47
M	17, 19, 23, 31	2–13, 29, 41, 47, 59, 71

*: Jon Thackray „bis auf Kondensation“

Vielen Dank für Ihre

Aufmerksamkeit!