Die unipotenten Charaktere für die GAP-Charaktertafeln der endlichen Gruppen vom Lie-Typ

von

Michael Claßen-Houben

Diplomarbeit in Mathematik

vorgelegt der

FAKULTÄT FÜR
MATHEMATIK, INFORMATIK UND NATURWISSENSCHAFTEN

der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen

im Juni 2005

angefertigt am

Lehrstuhl D für Mathematik

Prof. Dr. Hiß

Ich versichere, dass ich diese Diplomarbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe. Wörtliche oder sinngemäße Wiedergaben aus anderen Quellen sind kenntlich gemacht und durch Zitate belegt.

(Aachen, Juni 2005)

Unterschrift

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Die Darstellungs- beziehungsweise Charaktertheorie ist eines der fruchtbarsten Hilfsmittel der Theorie endlicher Gruppen. Insbesondere die Kenntnis der irreduziblen Charaktere, also der Charaktertafel, ermöglicht weitreichende Aussagen über die entsprechende Gruppe. Es ist also wünschenswert, für möglichst viele Klassen von Gruppen die irreduziblen Charaktere parametrisieren und generisch berechnen zu können, wie es zum Beispiel für die symmetrischen Gruppen mit Hilfe von Partitionen und Young-Diagrammen möglich ist.

Eine große Klasse von Gruppen sind die endlichen Gruppen vom Lie-Typ, deren Bedeutung aus der Klassifikation endlicher einfacher Gruppen klar wird. Die Elemente solcher Gruppen sind Vektorraum-Homomorphismen, für die es eine Jordan-Zerlegung in einen unipotenten und einen halbeinfachen Anteil gibt. Ein Analogon der Jordan-Zerlegung wurde von Lusztig für Charaktere der endlichen Gruppen vom Lie-Typ eingeführt. Dabei spielen vor allem die unipotenten Charaktere eine wichtige Rolle. Lusztig war in der Lage, die unipotenten Charaktere zu parametrisieren und die Grade zu berechnen [Car85].

In dieser Arbeit ist dargestellt, wie man in konkreten Fällen die unipotenten Charaktere in der Menge der irreduziblen Charaktere identifiziert und parametrisiert. Insbesondere für die Atlas-Tafeln von endlichen Gruppen vom Lie-Typ beziehungsweise für GAP-Charaktertafeln dieser Gruppen sind die unipotenten Charaktere parametrisiert. Diese Parametrisierung ist in die GAP-Charaktertafel-Bibliothek CTblLib eingearbeitet worden und steht somit in digitaler Form zur Verfügung.

Im Zuge der Parametrisierung in diesen konkreten Tafeln wurden im wesentlichen drei Hilfsmittel verwendet.

(i) In vielen Fällen gelingt es, einen unipotenten Charakter aufgrund seines Grades zu identifizieren. Auf jeden Fall kann man die Menge der für ein Label in Frage kommenden irreduziblen Charaktere durch den Grad stark einschränken. Deshalb sind die Grade unipotenter Charaktere im Anhang angegeben.

(ii) Die Unterteilung unipotenter Charaktere in Serien liefert eine notwendige Bedingung für bestimmte Linearkombinationen von unipotenten Charakteren einer besonders wichtigen Serie, die als Hauptserie bezeichnet wird.

(iii) Außerdem unterteilt man unipotente Charaktere in Familien. Eine weitere notwendige Bedingung erhält man, wenn man bestimmte Linearkombinationen von unipotenten Charakteren einer Familie betrachtet. Diese Bedingung ist gerade für die Charaktere interessant, für die die Parametrisierung mit der Bedingung aus (ii) nicht gelingt.

Zunächst werden im ersten Paragraphen die endlichen Gruppen vom Lie-Typ als Untergruppen von algebraischen Gruppen vorgestellt. Nachdem wichtige Untergruppen definiert sind, werden anschließend beide Arten von Gruppen klassifiziert. Der Paragraph schließt mit einer Einführung in die Theorie der Gruppen mit zerfallendem BN-Paar, insbesondere mit der Betrachtung von Weyl-Gruppen und der Levi-Zerlegung.

Die unipotenten Charaktere bilden eine Teilmenge der irreduziblen Charaktere. Paragraph 2 stellt die unipotenten Charaktere einerseits als Konstituenten von Deligne-Lusztig-Charakteren und andererseits als Konstituenten von Harish-Chandra-induzierten kuspidalen unipotenten Charakteren von Levi-Untergruppen vor. Auch die Einteilung unipotenter Charaktere in Serien und Familien wird hier betrachtet. Das Ende des Paragraphen beschäftigt sich mit dem Zusammenhang zwischen unipotenten Charakteren von „verwandten“ Gruppen. Die ersten beiden Paragraphen sollen eine Einführung in die notwendigen gruppen- und charaktertheoretischen Konzepte bieten.

In den Paragraphen 3 und 4 werden die irreduziblen Charaktere von WEYL-Gruppen und die unipotenten Charaktere von endlichen Gruppen vom LIE-Typ parametrisiert. Dazu benötigt man einige kombinatorische Begriffe und, für die unipotenten Charaktere, eine Liste der kuspidalen unipotenten Charaktere. Neben der Parametrisierung findet man in Paragraph 4 auch die Einteilung in Serien und gegebenenfalls auch die in Familien.

Die oben genannten Mittel zur konkreten Parametrisierung werden in Paragraph 5 detailliert beschrieben. Beginnend mit den Gradformeln für die unipotenten Charaktere über die notwendigen Bedingungen, die man durch die Einteilung in Serien und Familien erhält, und einem Abschnitt über Permutations-Charaktere, endet der Paragraph mit einer Zusammenfassung der verwendeten Hilfsmittel.

Paragraph 6 kann unabhängig von den Paragraphen 2 bis 5 gelesen werden, weil es dort nur um die endlichen Gruppen vom LIE-Typ geht, deren Charaktertafeln in der GAP-Charaktertafel-Bibliothek CTblLib vorhanden sind [Bre04]. Diese Bibliothek orientiert sich in Umfang und Bezeichnungen an den Atlas of Finite Groups [CCN+85]. Im ersten Abschnitt wird diese Art der Bezeichnung vorgestellt, während der zweite Abschnitt die vorhandenen Gruppen vom LIE-Typ und den Zusammenhang dieser zu den klassischen Matrixgruppen beschreibt.

Für einige Gruppen wird in Paragraph 7 die konkrete Parametrisierung unipotenter Charaktere ermittelt. Dabei werden die Konzepte von Paragraph 5 auf Gruppen, die in Paragraph 6 beschrieben wurden, angewendet. Die letzten drei Beispiele zeigen zusätzlich, welche GAP-Funktionen dabei verwendet werden können.

In den Paragraphen 8 und 9 werden die Ergebnisse zusammengefasst. Zunächst wird beschrieben, mit welchen Mitteln die unipotenten Charaktere für die einzelnen Gruppen parametrisiert werden. In Paragraph 9 wird der Aufbau und die Funktionsweise des Teils der Charaktertafel-Bibliothek von GAP, der die unipotenten Charaktere speichert, beschrieben.

Schließlich geht es in Paragraph 10 um die JORDAN-Zerlegung von irreduziblen Charakteren. Dabei wird zu Beginn eine Einschränkung gemacht, die vermeidet, dass zu viel Notation eingeführt werden muss. Deshalb ist dieser Paragraph nur als Ausblick zu verstehen.

In Anhang A sind die Atlas-Bezeichnungen der endlichen Gruppen vom LIE-Typ, die auch in der GAP-Charaktertafel-Bibliothek verwendet werden, noch einmal als Tabelle aufgelistet. Wie erwähnt findet man die Grade der unipotenten Charaktere in Anhang B. Diese Grade sind sowohl als explizite Werte für die vorkommenden Gruppen als auch als Polynome in q angegeben.

Das wichtigste Ergebnis dieser Arbeit sind Listen, die einem Label eines unipotenten Charakters eine Position in einer bestimmten Charaktertafel zuordnen. Diese Listen sind hier nicht abgedruckt, aber sie stehen in digitaler Form mit dem GAP-Paket CTblLib zur Verfügung und sind als Bestandteil dieser Arbeit zu betrachten. Einen Eindruck von der Entstehung dieser Listen erhält man in den Paragraphen 5 bis 9.

An dieser Stelle bedanke ich mich bei Herrn Professor Dr. Hiß für die Auswahl des Themas und dafür, dass er mir die Möglichkeit gab, diese Arbeit zu schreiben. Mein ganz besonderer Dank gilt Herrn Dr. Frank Lübeck für die große Unterstützung in vielen Bereichen dieser Arbeit. Außerdem bedanke ich mich bei den Mitarbeitern des Lehrstuhls D und bei allen, die in irgendeiner Weise zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

§1 Endliche Gruppen vom Lie-Typ

Das Ziel dieses Paragraphen ist es, die für uns relevanten Gruppen, insbesondere die endlichen Gruppen vom Lie-Typ, vorzustellen. In den Kapiteln 1 und 2 von [Car85] gibt es Abschnitte, die denen dieses Paragraphen entsprechen. Die Beschreibung hier ist daraus entnommen, allerdings stark verkürzt und ohne Beweise.

(1.1) Lineare algebraische Gruppen — Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper mit Charakteristik $p > 0$ und G eine lineare algebraische Gruppe über K. Eine lineare algebraische Gruppe ist isomorph zu einer abgeschlossenen Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(K)$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Hier genügt es, sich lineare algebraische Gruppen als solche Untergruppen, also als Matrixgruppen, vorzustellen. Eine genaue Definition findet man in den Abschnitten 1.1 und 1.2 von [Car85].

(1.2) Frobenius-Abbildungen — Sei G eine lineare algebraische Gruppe, aufgefasst als abgeschlossene Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(K)$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Zu einer Primzahl p und $q = p^e, e \geq 1$ definiert man die folgenden Abbildungen:

$$F_q : \mathrm{GL}_n(K) \to \mathrm{GL}_n(K), (a_{ij}) \mapsto ({a_{ij}}^q).$$

Ein Homomorphismus $F : G \to G$ heißt Standard-Frobenius-Abbildung, wenn es ein $q = p^e$, ein $m \in \mathbb{N}$ und einen Monomorphismus $i : G \to \mathrm{GL}_m(K)$ mit

$$i(F(g)) = F_q(i(g))\ \forall g \in G$$

gibt. Ein Homomorphismus $F : G \to G$ heißt Frobenius-Abbildung, wenn eine Potenz von F eine Standard-Frobenius-Abbildung ist.

(1.3) Endliche Gruppen vom Lie-Typ — Sei G eine lineare algebraische Gruppe. Die Menge der zusammenhängenden unipotenten Normalteiler von G hat ein eindeutiges maximales Element $R_u(G)$. Dieser Normalteiler heißt unipotentes Radikal von G. Eine Gruppe G heißt reduktiv wenn $R_u(G) = 1$ ist.

Sei G eine zusammenhängende reduktive lineare algebraische Gruppe und F eine Frobenius-Abbildung zu G. Die Gruppe

$$G^F := \{g \in G; F(g) = g\}$$

bezeichnet man als endliche Gruppe vom Lie-Typ. Die so definierten Gruppen G^F sind Untergruppen von $\mathrm{GL}_n(q^f), f \in \mathbb{N}$, sie sind also endlich.

Sei zum Beispiel $G = \mathrm{GL}_n(K), q = p^e$ und $F : G \to G, (a_{ij}) \mapsto (({a_{ij}}^q)^t)^{-1}$, dann ist G^F die unitäre Gruppe über dem Körper mit q^2 Elementen. In diesem Fall ist $f = 2$.

In den folgenden Abschnitten und Paragraphen sei G eine zusammenhängende reduktive lineare algebraische Gruppe über K und F eine Frobenius-Abbildung zu G. Mit G^F bezeichnen wir die zugehörige endliche Gruppe vom Lie-Typ.

(1.4) Borel-Untergruppen — Wir betrachten die Menge der zusammenhängenden abgeschlossenen auflösbaren Untergruppen von G. Ein maximales Element dieser Menge heißt Borel-Untergruppe von G. Eine solche Untergruppe gibt es in jedem G, und je zwei von ihnen sind in G konjugiert. Die Vereinigung aller Borel-Untergruppen ist die ganze Gruppe G. Also liegt jedes Element von G in einer Borel-Untergruppe.

Ist zum Beispiel $G = \mathrm{GL}_n(K)$, dann ist die Menge der oberen Dreiecksmatrizen eine Borel-Untergruppe von G.

Borel-Untergruppen von G^F sind Untergruppen der Form B^F, wobei B eine F-invariante Borel-Untergruppe von G ist. Zwei Borel-Untergruppen von G^F sind in G^F konjugiert.

(1.5) Algebraische Tori — Eine Gruppe, die zu der multiplikativen Gruppe von K isomorph ist, bezeichnet man mit G_m. Ein direktes Produkt der Form $T = G_m \times \cdots \times G_m \leq G$ heißt algebraischer Torus von G. Ein algebraischer Torus T heißt maximal, wenn die Anzahl der Faktoren G_m im direkten Produkt maximal ist. Je zwei maximale Tori von G sind in G konjugiert. Tori und maximale Tori kann man analog auch zu Untergruppen von G definieren, also zum Beispiel zu Borel-Untergruppen. Dabei stellt sich heraus, dass ein maximaler Torus einer Borel-Untergruppe auch ein maximaler Torus in G ist.

Ist $G = \mathrm{GL}_n(K)$, dann ist die Untergruppe der Diagonalmatrizen ein maximaler Torus in der Borel-Untergruppe der oberen Dreiecksmatrizen, also auch in $G = \mathrm{GL}_n(K)$.

Ein maximaler Torus von G^F ist eine Untergruppe der Form T^F für einen F-invarianten maximalen Torus T von G.

Nicht jeder maximale Torus von G^F liegt in einer Borel-Untergruppe von G^F. Ein F-invarianter maximaler Torus T von G heißt maximal zerfallend, wenn er in einer F-invarianten Borel-Untergruppe von G liegt. Ein maximaler Torus von G^F heißt maximal zerfallend, wenn er die Form T^F hat, wobei T ein maximal zerfallender Torus von G ist. Zwei maximal zerfallende Tori von G^F sind in G^F konjugiert.

(1.6) Klassifikation der einfachen algebraischen Gruppen — Um eine zusammenhängende reduktive lineare algebraische Gruppe G zu beschreiben, verwendet man so genannte Dynkin-Diagramme. Das Dynkin-Diagramm ist durch G eindeutig bestimmt. Wie man es aus einer gegebenen Gruppe G berechnet, wird in [Car85] Abschnitt 1.11. beschrieben. Ist G eine einfache Gruppe, dann sind alle Möglichkeiten für das Dynkin-Diagramm in Tabelle 1 dargestellt. Der Index gibt dabei die Anzahl der Knoten an. Man hat vier unendliche Serien von Dynkin-Diagrammen und fünf so genannte Ausnahmetypen.

Zwei Gruppen heißen isogen, wenn sie das gleiche Dynkin-Diagramm haben, aber zwei isogene Gruppen müssen nicht isomorph sein. Die Anzahl der Isomorphieklassen algebraischer Gruppen in einer Isogenieklasse ist immer endlich. Diese Isomorphieklassen heißen Isogenietypen. Eine einfache algebraische Gruppe ist also, bis auf Isomorphie, durch das Dynkin-Diagramm und den Isogenietyp definiert.

Die verschiedenen Isogenietypen einer Isogenieklasse werden in (1.8) betrachtet. Hat eine Gruppe G ein Dynkin-Diagramm vom Typ X_l, so bezeichnet man G als Gruppe vom Typ X_l. Der Typ der Gruppe ist also unabhängig vom Isogenietyp.

(1.7) Klassifikation der endlichen Gruppen vom Lie-Typ — Zunächst betrachtet man das Dynkin-Diagramm der zugehörigen algebraischen Gruppe G. Die Frobenius-Abbildung F definiert dabei eine Permutation ρ der Knoten im Dynkin-Diagramm. Die Operation ρ ist ein Graphautomorphismus des Dynkin-Diagramms, der durch Pfeile angedeutet wird. Der Typ der algebraischen Gruppe G und der Graphautomorphismus ρ definieren den Typ der Gruppe G^F. Die möglichen Typen für G^F, wobei G eine einfache Gruppe ist, sind in Tabelle 2 dargestellt.

Eine endliche Gruppe G^F vom Lie-Typ, ist bis auf Isomorphie eindeutig durch das Dynkin-Diagramm mit ρ-Operation, den Isogenietyp von G und eine Zahl q bestimmt. Die Zahl q wird durch die Frobenius-Abbildung F und die Charakteristik des Körpers K, dem G zugrunde liegt, bestimmt. Außer bei den Typen ${}^2B_2$, ${}^2G_2$ und ${}^2F_4$ ist q eine beliebige Primzahlpotenz. Bei den Typen ${}^2B_2$ und ${}^2F_4$ muss

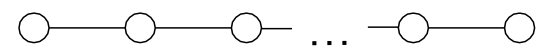
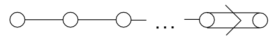
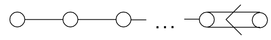
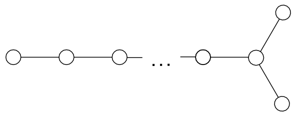
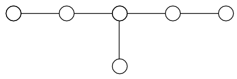
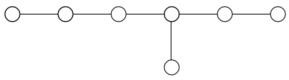
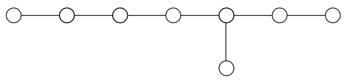
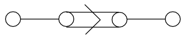
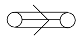
A_l	$l \geq 1$	
B_l	$l \geq 2$	
C_l	$l \geq 3$	
D_l	$l \geq 4$	
E_6		
E_7		
E_8		
F_4		
G_2		

Tabelle 1: DYNKIN-Diagramme für G.

q^2 eine ungerade Potenz von 2 sein. Beim Typ ${}^2G_2$ muss q^2 eine ungerade Potenz von 3 sein. In diesen Fällen ist q also nicht ganzzahlig.

Betrachtet man die DYNKIN-Diagramme einiger Typen für kleine l, so stellt man fest, dass die zugehörigen Gruppen bei gleichem q und gleichem Isogenietyp isomorph sind. Zum Beispiel sind die Typen B_2 und C_2, sowie D_3 und A_3 jeweils identisch.

Man unterscheidet die klassische Typen A_l, ${}^2A_l$, B_l, C_l, D_l und ${}^2D_l$ von den Ausnahmetypen ${}^2B_2$, ${}^3D_4$, E_6, E_7, E_8, ${}^2E_6$, F_4, ${}^2F_4$, G_2 und ${}^2G_2$. Die Gruppen zu den klassischen Typen sind isomorph zu klassischen Matrixgruppen (vgl. (6.2)), während die Gruppen der Ausnahmetypen auch als exzeptionelle Gruppen oder Ausnahmegruppen bezeichnet werden.

Neben den Isomorphien, die durch Betrachten des DYNKIN-Diagramms offensichtlich werden, gibt es noch weitere Isomorphien für kleine Zahlen l und q zu anderen bekannten Gruppen. So ist zum Beispiel die Gruppe vom Typ A mit $l = 1$ und $q = 4$ isomorph zur alternierenden Gruppe A_5. Eine ausführliche Tabelle solcher Isomorphismen findet man in der Einleitung des Atlas of Finite Groups [CCN$^+$85] in Kapitel 3.

(1.8) Isogenietypen — Wie bereits erwähnt, heißen zwei algebraische Gruppen G_1 und G_2 isogen, wenn sie das gleiche DYNKIN-Diagramm haben. Die Gruppen G_1 und G_2 sind im Allgemeinen nicht isomorph. Zwei Isogenietypen sind ausgezeichnet, nämlich G_{ad} und G_{sc}. Die algebraische Gruppe heißt dann adjungiert beziehungsweise einfach zusammenhängend (simply connected). Die Anzahl verschiedener Isogenietypen in einer Isogenieklasse ist abhängig von l aber für festes l endlich. Ist G vom Typ G_2, F_4 oder E_8, dann gibt es nur einen Isogenietyp. Bei den Typen B_l, C_l, E_6 und E_7 gibt es zwei Isogenietypen, nämlich den adjungierten und den einfach zusammenhängenden. Betrachtet man eine Gruppe G vom Typ

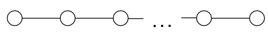
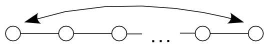
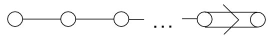
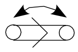
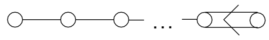
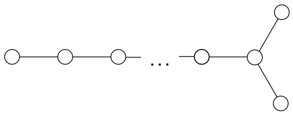
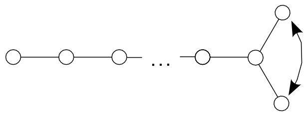
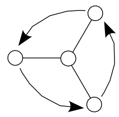
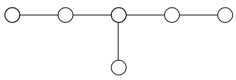
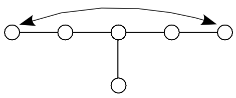
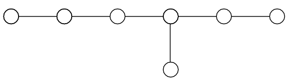
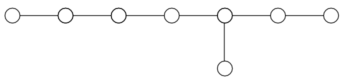
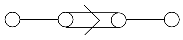
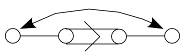
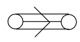
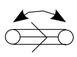
A_l	$l \geq 1$	
${}^2A_l$	$l \geq 2$	
B_l	$l \geq 2$	
${}^2B_2$		
C_l	$l \geq 3$	
D_l	$l \geq 4$	
${}^2D_l$	$l \geq 4$	
${}^3D_4$		
E_6		
${}^2E_6$		
E_7		
E_8		
F_4		
${}^2F_4$		
G_2		
${}^2G_2$		

Tabelle 2: Die verschiedenen Typen für G^F.

D_l, so erhält man drei Isogenietypen falls l ungerade und vier falls l gerade ist. Bei Gruppen G vom Typ A_l ist die Anzahl der Isogenietypen gleich der Anzahl der Teiler von $l + 1$.

Zu den algebraischen Gruppen G_1 und G_2 betrachtet man nun die zugehörigen

Gruppen vom Lie-Typ G_1^F und G_2^F für Frobenius-Abbildungen F mit gleichem ρ und q. Diese sind im Allgemeinen nicht isomorph, haben aber die gleiche Ordnung.

Allerdings gibt es bei den Typen ${}^3D_4$, G_2, F_4, E_8, ${}^2B_2$, ${}^2G_2$ und ${}^2F_4$ nur eine Isomorphieklasse der jeweiligen Gruppen für ein festes q, obwohl die zugehörigen algebraischen Gruppen in unterschiedlichen Isogenietypen auftreten können. Bei den Gruppen vom Typ B_l, C_l, E_6, ${}^2E_6$ und E_7 gibt es höchstens zwei Isomorphietypen, die vom adjungierten und vom einfach zusammenhängenden Isogenietyp der jeweiligen algebraischen Gruppe abstammen. Für bestimmte l und q können unterschiedliche Isogenietypen der algebraischen Gruppen trotzdem zu isomorphen endlichen Gruppen führen. Nur bei den Typen A_l, ${}^2A_l$, D_l und ${}^2D_l$ kann es mehr als zwei Isomorphieklassen geben, da die zugehörige algebraische Gruppe weder adjungiert noch einfach zusammenhängend sein kann.

Betrachte zum Beispiel die Gruppen $G_1^F := (A_l)_{\mathrm{ad}}(q) \cong \mathrm{PGL}_{l+1}(q)$ und $G_2^F := (A_l)_{\mathrm{sc}}(q) \cong \mathrm{SL}_{l+1}(q)$. Sind die Zahlen $l+1$ und $q-1$ teilerfremd, dann sind beide Gruppen isomorph. Die Anzahl der Isomorphieklassen ist nämlich gleich der Anzahl der gemeinsamen Teiler von $l+1$ und $q-1$.

Weitere Beispiele, wie die endlichen Gruppen vom Lie-Typ aussehen, erhält man in §6.

Die Beschreibung der Isogenietypen in diesem Abschnitt ist sehr kurz gehalten. Eine genaue Definition findet man in [Car85] Kapitel 1 in den Abschnitten 11 und 19.

(1.9) Gruppen mit zerfallendem BN-Paar — In Kapitel 2 von [Car85] werden Gruppen mit zerfallendem BN-Paar ausführlich behandelt. Dort findet man auch die Axiome, mit denen sie definiert werden. Einige dieser Axiome sind hilfreich, um die Struktur der für uns wichtigen Gruppen besser zu verstehen.

Sei also H eine Gruppe mit zerfallendem BN-Paar, dann hat H zwei Untergruppen B und N mit $H = \langle B, N \rangle$. Die Gruppe $B \cap N$ ist ein Normalteiler in H. Der Quotient $W := N/(B \cap N)$ heißt Weyl-Gruppe zu H und wird von Elementen $s_i, i \in I$ mit $s_i^2 = 1$ erzeugt.

Betrachtet man die zusammenhängende reduktive lineare algebraische Gruppe G, eine Borel-Untergruppe B von G, einen in B enthaltenen maximalen Torus T und definiert man N als Normalisator von T, dann bilden B und N ein zerfallendes BN-Paar zu G.

Sei G^F eine endliche Gruppe vom Lie-Typ, B sei eine F-invariante Borel-Untergruppe von G und T sei ein F-invarianter Torus von G, der in B enthalten ist. Also ist T ein maximal zerfallender Torus von G. Außerdem sei N der Normalisator von T, dann ist N ebenfalls F-invariant. Die Untergruppen B^F und N^F bilden ein zerfallendes BN-Paar zu G^F.

Wir stellen also fest, dass sowohl die zusammenhängenden reduktiven linearen algebraischen Gruppen als auch die endlichen Gruppen vom Lie-Typ Gruppen mit zerfallendem BN-Paar sind.

(1.10) Die Weyl-Gruppe — Zu den Gruppen G und G^F haben wir im letzten Abschnitt Weyl-Gruppen definiert. Die Weyl-Gruppe jeder beliebigen Gruppe mit BN-Paar ist eine Coxeter-Gruppe, insbesondere besitzt sie folgende Präsentation:

$$\langle s_1, \dots, s_l | s_i^2 = 1, (s_i s_j)^{m_{ij}} = 1 \rangle.$$

Für uns ist aber vor allem die Weyl-Gruppe zur Gruppe G interessant, die im folgenden mit W bezeichnet wird. Dabei identifiziert man die l Coxeter-Erzeuger von W mit den Knoten im Dynkin-Diagramm. Sei n_{ij} die Anzahl der Striche, die die Knoten i und j verbinden, dann stehen die Zahlen n_{ij} und m_{ij} in folgendem Zusammenhang:

$$\begin{array}{rcl} n_{ij} = 0 & \Longleftrightarrow & m_{ij} = 2 \\ n_{ij} = 1 & \Longleftrightarrow & m_{ij} = 3 \\ n_{ij} = 2 & \Longleftrightarrow & m_{ij} = 4 \\ n_{ij} = 3 & \Longleftrightarrow & m_{ij} = 6. \end{array}$$

Insbesondere ist es so, dass die WEYL-Gruppe einer Gruppe G nicht vom Isogenietyp und nicht von der Zahl q abhängig ist, sondern schon durch den Typ der Gruppe G bestimmt wird. Für die WEYL-Gruppen der Gruppen G gelten folgende Isomorphien:

$$W(A_l) \cong \mathrm{S}_{l+1},\ W(B_l) \cong W(C_l) \cong \mathrm{C}_2 \wr \mathrm{S}_l,\ W(D_l) \leq_2 W(B_l).$$

Die irreduziblen Charaktere der WEYL-Gruppen werden noch eine wichtige Rolle spielen und deshalb in §3 parametrisiert.

(1.11) Parabolische Untergruppen und die LEVI-Zerlegung — Wir betrachten eine algebraische Gruppe H mit zerfallendem BN-Paar. Die Kommutator-Relationen sind eine technische Voraussetzung für Gruppen mit BN-Paar, die in [Car85] Abschnitt 2.6 definiert werden. Sei also H eine algebraische Gruppe mit zerfallendem BN-Paar, die die Kommutator-Relationen erfüllt, und für die folgenden Definitionen sei W die WEYL-Gruppe zu H. Seien $\{s_i; 1 \leq i \leq l\}$ die COXETER-Erzeuger der Gruppe W, dann ist für eine Teilmenge $J \subset I := \{1, \ldots, l\}$, $W_J := \langle s_j; j \in J \rangle$ die parabolische Untergruppe von W zur Teilmenge J.

Sei N_J die Untergruppe von N, für die $N_J/(B \cap N) = W_J$ gilt, dann bezeichnet man $P_J := \langle B, N_J \rangle$ als Standard parabolische Untergruppe von H. Die zu P_J konjugierten Untergruppen von H, bezeichnet man als parabolische Untergruppen. Beachte, dass $P_I = H$ und $P_\emptyset = B$ gilt.

Eine algebraische Gruppe heißt unipotent, wenn alle Elemente unipotent sind. Zu einer parabolischen Untergruppe P_J von H gibt es Untergruppen U_J und L_J mit folgenden Eigenschaften: Die Gruppe U_J ist der größte unipotente Normalteiler von P_J und P_J ist das semidirekte Produkt $U_J \rtimes L_J$. Außerdem ist $L_J \cong P_J/U_J$. Die Zerlegung $P_J = U_J L_J$ heißt LEVI-Zerlegung von P_J, wobei eine Gruppe L_J mit diesen Eigenschaften als LEVI-Untergruppe bezeichnet wird. In [Car85] wird nach dem Korollar 2.6.2 für jede Standard parabolische Untergruppe eine ausgezeichnete LEVI-Untergruppe definiert. Diese LEVI-Untergruppe heißt Standard-LEVI-Untergruppe. Im Folgenden sei $P_J = U_J L_J$ die Standard-LEVI-Zerlegung, das heißt P_J und L_J sind jeweils Standard parabolische Untergruppen beziehungsweise Standard-LEVI-Untergruppen.

Die bisherigen Ergebnisse dieses Abschnitts können auf die Gruppen G und G^F angewendet werden, denn diese sind lineare Gruppen mit BN-Paar, die die Kommutator-Relationen erfüllen.

Man erhält einen rekursiven Aufbau der algebraischen Gruppen mit zerfallendem BN-Paar, weil die (Standard-)LEVI-Gruppen L_J, $J \subset I$ auch algebraische Gruppen mit zerfallendem BN-Paar sind, die die Kommutator-Relationen erfüllen.

Betrachte nun speziell die Situation, in der H eine endliche Gruppe G^F vom LIE-Typ ist. Außerdem sei ρ die Permutation der Knoten im DYNKIN-Diagramm, die durch F bewirkt wird. Dann sind die Standard parabolischen Untergruppen und Standard-LEVI-Untergruppen von G^F die Untergruppen ${P_J}^F$ beziehungsweise ${L_J}^F$ für die J eine ρ-invariante Teilmenge von I ist. Also hat die LEVI-Zerlegung einer Standard parabolischen Untergruppe von G^F die Form ${P_J}^F = {U_J}^F {L_J}^F$ für eine ρ-invariante Teilmenge $J \subset I$. Eine Standard-LEVI-Untergruppe der Form ${L_J}^F$ ist wieder eine endliche Gruppe vom LIE-Typ. Ist die zugehörige algebraische Gruppe L_J einfach, dann kann man die Klassifikation (1.7) auf ${L_J}^F$ anwenden.

§2 Unipotente Charaktere

Nachdem sich der letzte Paragraph mit den für uns wichtigen Gruppen befasst hat, geht es nun um Charaktere, oder allgemeiner, um Klassenfunktionen dieser Gruppen. Insbesondere werden die theoretischen Konzepte vorgestellt, um unipotente Charaktere in einer gegebenen Charaktertafel zu identifizieren und zu parametrisieren.

Die hier auftretenden Klassenfunktionen sind alle komplexwertig. Für eine beliebige Gruppe H und zwei Klassenfunktionen χ und ϑ von H sei

$$(\chi, \vartheta) := \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} \chi(h)\overline{\vartheta(h)}$$

das Skalarprodukt dieser Klassenfunktionen. Ist ϑ Klassenfunktion einer Untergruppe U von H, dann sei für $h \in H$

$$\vartheta^H(h) := \frac{1}{|U|} \sum_{x \in H, x^{-1}hx \in U} \vartheta(x^{-1}hx).$$

Die Klassenfunktion ϑ^H heißt die nach H induzierte Klassenfunktion.

(2.1) Definition der unipotenten Charaktere — Sei T ein maximaler F-invarianter Torus von G, und θ ein irreduzibler (komplexer) Charakter von T^F, dann definiert man zu T und θ einen verallgemeinerten Charakter $R_{T,\theta}$, den Deligne-Lusztig-Charakter. Die genaue Definition der Deligne-Lusztig-Charaktere findet man in Kapitel 7 von [Car85].

Ein irreduzibler Charakter χ von G^F heißt unipotent, wenn er Konstituent eines Deligne-Lusztig-Charakters $R_{T,\theta}$ mit $\theta = 1$ ist.

Die folgende Aussage ist eine Spezialisierung des Satzes 7.3.8 aus [Car85], auf die Charaktere $R_{T,1}$.

Satz. Seien T und T' maximale F-invariante Tori von G und sei $\theta' \neq 1$ ein irreduzibler Charakter von T'^F. Dann haben die Deligne-Lusztig-Charaktere $R_{T,1}$ und $R_{T',\theta'}$ keinen gemeinsamen irreduziblen Konstituenten.

Ein unipotenter Charakter ist also nie Konstituent von $R_{T,\theta}$, falls $\theta \neq 1$ ist.

(2.2) Kuspidale Charaktere — Sei H eine endliche Gruppe mit zerfallendem BN-Paar, die die Kommutator-Relationen erfüllt. Also zum Beispiel eine endliche Gruppe vom Lie-Typ, oder eine Levi-Untergruppe davon. Für $J \subset I$ sei P_J eine parabolische Untergruppe und U_J der maximale unipotente Normalteiler von P_J. Ein irreduzibler Charakter χ von H ist kuspidal, wenn

$$(\chi, (1_{U_J})^H) = 0 \quad \forall J \subsetneq I$$

gilt.

(2.3) Die Harish-Chandra-Induktion — Sei H eine endliche Gruppe mit zerfallendem BN-Paar, die die Kommutator-Relationen erfüllt. Sei P_J eine parabolische Untergruppe von H und $P_J = U_J L_J$ die Levi-Zerlegung. Sei ϕ ein Charakter von L_J, dann ist durch

$$\phi_{P_J}(ul) = \phi(l), \quad \forall u \in U_J, l \in L_J$$

ein Charakter von P_J definiert. Dieser heißt (auf P_J) inflationierter Charakter. Des weiteren heißt $(\phi_{P_J})^H$ der Harish-Chandra-induzierte Charakter von H.

(2.4) Harish-Chandra**-Serien** — Das folgende Resultat entspricht den Propositionen 9.1.3 und 9.1.5 aus [Car85].

Satz. Sei H eine Gruppe mit zerfallendem BN-Paar, die die Kommutator-Relationen erfüllt und χ ein irreduzibler Charakter von H, dann gilt:

a) Jeder irreduzible Charakter von H ist Konstituent eines Harish-Chandra-induzierten Charakters $(\phi_{P_J})^H$ für einen kuspidalen irreduziblen Charakter ϕ einer Levi-Untergruppe L_J.

b) Sind J_1, J_2 Teilmengen von I und ϕ_1, ϕ_2 kuspidale irreduzible Charaktere von L_{J_1} beziehungsweise L_{J_2} so dass χ Konstituent von $(\phi_{P_{J_1}})^H$ und $(\phi_{P_{J_2}})^H$ ist, dann sind L_{J_1} und L_{J_2} konjugierte Untergruppen, und ϕ_1 und ϕ_2 sind konjugierte Charaktere.

Das letzte Ergebnis soll nun auf die unipotenten Charaktere einer endlichen Gruppe G^F vom Lie-Typ angewendet werden. Ein unipotenter Charakter ist per Definition irreduzibel, also ist jeder unipotente Charakter χ von G^F Konstituent eines Harish-Chandra-induzierten kuspidalen irreduziblen Charakters $(\phi_{P_J{}^F})^{G^F}$. Dieses Ergebnis kann man noch etwas verschärfen:

Satz. Jeder unipotente Charakter χ von G^F ist Konstituent eines Charakters $(\phi_{P_J{}^F})^{G^F}$, wobei ϕ ein kuspidaler unipotenter Charakter der Levi-Gruppe $L_J{}^F$ ist. (Vergleiche [Car85] Abschnitt 12.2.)

Sei ϕ ein kuspidaler unipotenter Charakter von $L_J{}^F$, dann bezeichnet man die Menge $\{\chi \in \mathrm{Irr}(G^F); ((\phi_{P_J{}^F})^{G^F}, \chi) \neq 0\}$ als eine Serie unipotenter Charaktere. Jeder unipotente Charakter kann eindeutig einer Serie zugeordnet werden.

Sei $J = \emptyset$, also $P_J{}^F = B^F$, dann ist $L_J{}^F = T^F$ für einen maximal zerfallenden Torus T. Alle irreduziblen Charaktere von T^F sind kuspidal, aber der einzige unipotente Charakter von T^F ist der 1-Charakter. Die Konstituenten des Charakters $(1_{B^F})^{G^F}$ bilden also eine Serie von unipotenten Charakteren, die als Hauptserie bezeichnet wird. Für diesen Torus gilt $(1_{B^F})^{G^F} = R_{T,1}$. Der Harish-Chandra-induzierte Charakter, den man so erhält, ist also ein Deligne-Lusztig-Charakter (siehe [Car85] 7.2.4).

Sei nun $\emptyset \neq J \subset I$, dann ist $L_J{}^F$ eine endliche Gruppe vom Lie-Typ. Hat diese Gruppe einen kuspidalen unipotenten Charakter ϕ, dann erhält man eine Nebenserie unipotenter Charaktere aus den Konstituenten von $(\phi_{P_J{}^F})^{G^F}$.

Ist speziell $J = I$, dann gibt es zu jedem kuspidalen Charakter eine Serie, die nur aus diesem Charakter besteht. Diese Serien werden als diskrete Serien bezeichnet.

(2.5) Zerlegung induzierter kuspidaler Charaktere — Jetzt betrachten wir eine feste Serie unipotenter Charaktere. Die Charaktere dieser Serie sollen durch die irreduziblen Charaktere einer Coxeter-Gruppe parametrisiert werden. Eine ausführliche Herleitung dieser Parametrisierung findet man in [Car85] Kapitel 10. Die wichtigsten Aussagen sind die Proposition 10.1.2 und das Korollar 10.11.3. Beide Aussagen sind im folgenden Satz zusammengefasst:

Satz. Sei $J \subset I$ und ϕ ein kuspidaler unipotenter Charakter der Levi-Untergruppe $L_J{}^F$ von G^F. Dann gibt es eine Bijektion zwischen der Serie unipotenter Charaktere $\{\chi \in \mathrm{Irr}(G^F); ((\phi_{P_J{}^F})^{G^F}, \chi) \neq 0\}$ und den irreduziblen Charakteren von $(\mathbb{C}W^{J,\phi})_\mu$. Dabei ist $(\mathbb{C}W^{J,\phi})_\mu$ die Gruppenalgebra von $W^{J,\phi} = \{w \in W; w(J) = J, {}^w\phi = \phi\}$, die noch durch einen 2-Kozykel μ verschränkt wird.

In den hier betrachteten Fällen ist μ trivial und $W^{J,\phi}$ ist eine Coxeter-Gruppe (vgl. [Car85] Abschnitt 12.2), nämlich die Weyl-Gruppe von G^F aufgefasst als Gruppe mit BN-Paar. Ist G^F vom Typ ${}^2F_4$ und $J = \emptyset$, dann steht die zugehörige Hauptserie unipotenter Charaktere in Bijektion zu den irreduziblen Charakteren der Diedergruppe D_{16}. In allen anderen Fällen ist $W^{J,\phi}$ die Weyl-Gruppe einer linearen algebraischen Gruppe.

Da mit dem Begriff WEYL-Gruppe meist nur die WEYL-Gruppe einer algebraischen Gruppe gemeint ist, bezeichnen wir hier die WEYL-Gruppe von G^F, aufgefasst als Gruppe mit BN-Paar, als relative WEYL-Gruppe. Die irreduziblen Charaktere einer HARISH-CHANDRA-Serie stehen also in Bijektion zu den irreduziblen Charakteren der relativen WEYL-Gruppe. In §4 wird für jede Serie unipotenter Charaktere die zugehörige relative WEYL-Gruppe angegeben.

(2.6) Die Hauptserie unipotenter Charaktere — Betrachtet man speziell die Hauptserie unipotenter Charaktere $\{\chi \in \mathrm{Irr}(G^F); ((1_{B^F})^{G^F}, \chi) \neq 0\}$, dann gibt es wegen des letzten Satzes eine Bijektion zu den irreduziblen Charakteren einer relativen WEYL-Gruppe W. Die Bijektion kann so gewählt werden, dass eine wichtige Eigenschaft gilt:

Satz. Sei G^F eine endliche Gruppe vom LIE-Typ und W die relative WEYL-Gruppe, zu deren irreduziblen Charakteren die unipotenten Charaktere der Hauptserie in Bijektion stehen. Weiterhin sei $J \subset I$, und W_J und ${P_J}^F$ seien die parabolischen Untergruppen von W beziehungsweise G^F. Dann kann die Bijektion

$$\{\chi \in \mathrm{Irr}(G^F); ((1_{B^F})^{G^F}, \chi) \neq 0\} \longleftrightarrow \mathrm{Irr}(W), \quad \chi_\phi \longleftrightarrow \phi$$

so gewählt werden, dass

$$(\chi_\phi, (1_{{P_J}^F})^{G^F}) = (\phi, (1_{W_J})^W) \;\; \forall \phi \in \mathrm{Irr}(W)$$

gilt. Speziell gilt dann:

$$(\chi_\phi, (1_{B^F})^{G^F}) = \phi(1) \;\; \forall \phi \in \mathrm{Irr}(W).$$

Mit diesem Satz kann man also Vielfachheiten von unipotenten Charakteren in den Charakteren $(1_{{P_J}^F})^{G^F}$ bestimmen. Beachte, dass diese Vielfachheiten von q unabhängig sind, weil die jeweils rechten Seiten der beiden Gleichungen nicht von q abhängen. Die Aussage des letzten Satzes ist eine Spezialisierung der wesentlich allgemeineren Aussagen von [Car85] Kapitel 10. Mit Satz (70.24) aus [CR87] hat man eine kompaktere Referenz. Wie man diesen Satz anwendet, um die unipotenten Charaktere einer Gruppe zu identifizieren, findet man in (5.2) und (5.3).

(2.7) Familien unipotenter Charaktere und Fast-Charaktere — Neben der Einteilung unipotenter Charaktere in Serien gibt es auch eine Einteilung in Familien. Diese wurde von LUSZTIG entdeckt und ist für alle endlichen Gruppen vom LIE-Typ bekannt. Siehe auch [Car85] Abschnitte 13.2, 13.8 und 13.9. Wir betrachten jedoch nur Gruppen mit trivialer F-Operation, die man auch als CHEVALLEY-Gruppen bezeichnet.

Jeder Familie $\mathbf{F}$ wird dabei eine der Gruppen 1, $\mathrm{C}_2 \times \ldots \times \mathrm{C}_2$, S_3, S_4, S_5 zugeordnet, die mit Γ bezeichnet wird. Die unipotenten Charaktere einer Familie $\mathbf{F}$ werden durch Paare (x, σ) parametrisiert. Dabei ist $\sigma \in \mathrm{Irr}(\mathrm{C}_\Gamma(x))$ und $x \in \Gamma$ ist bis auf Konjugation bestimmt. Die Menge dieser Paare wird mit $M(\Gamma)$ bezeichnet.

Zu zwei Paaren $(x, \sigma), (y, \tau) \in M(\Gamma)$ definiert man die komplexe Zahl

$$\{(x,\sigma),(y,\tau)\} := \frac{1}{|\mathrm{C}_\Gamma(x)| \cdot |\mathrm{C}_\Gamma(y)|} \sum_{g \in \Gamma, xgyg^{-1} = gyg^{-1}x} \sigma(gyg^{-1})\tau(g^{-1}xg).$$

Die Matrix $(\{(x,\sigma),(y,\tau)\})_{(x,\sigma),(y,\tau) \in M(\Gamma)}$ heißt FOURIER-Transformationsmatrix der Familie $\mathbf{F}$. Sie ist HERMITEsch, unitär und selbstinvers.

Zu $(y,\tau) \in M(\Gamma)$ definiert man die Klassenfunktion

$$R_{(y,\tau)} := \sum_{(x,\sigma)\in M(\Gamma)} \{(x,\sigma),(y,\tau)\}\, \chi_{(x,\sigma)}.$$

Dabei sei $\chi_{(x,\sigma)}$ der unipotente Charakter der Familie $\mathbf{F}$, der durch (x,σ) parametrisiert wird. Die Klassenfunktionen $R_{(y,\tau)}$ heißen Fast-Charaktere. Wegen des Satzes aus (2.1) stehen sie senkrecht zu allen Charakteren $R_{T,\theta}$ mit $\theta \neq 1$, da sie Linearkombinationen unipotenter Charaktere sind.

Des weiteren bilden sie eine Orthonormalbasis für den Raum von Klassenfunktionen den sie aufspannen, das heißt:

$$(R_{(y_1,\tau_1)}, R_{(y_2,\tau_2)}) = \begin{cases} 1, & (y_1,\tau_1) = (y_2,\tau_2) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} .$$

Fast-Charaktere stehen also senkrecht zueinander und zu Deligne-Lusztig-Charakteren $R_{T,\theta}$ mit $\theta \neq 1$.

Lemma. Sei $R_{T,1}$ ein Deligne-Lustig-Charakter. Dann ist $R_{T,1}$ eine Linearkombination von Fast-Charakteren $R_{(x,\sigma)}$, wobei die zugehörigen unipotenten Charaktere $\chi_{(x,\sigma)}$ in der Hauptserie liegen.

Diese Aussage findet man in [Car85] Abschnitt 12.3. Dabei wird zu Beginn gesagt, dass die Deligne-Lustig-Charaktere $R_{T,1}$, die dort mit R_w bezeichnet werden, Linearkombinationen von Klassenfunktionen R_ϕ sind. Bei den Klassenfunktionen R_ϕ handelt es sich um die oben definierten Fast-Charaktere, was man aber erst später in diesem Abschnitt sieht. Dort erkennt man auch, dass die den Fast-Charakteren zugeordneten unipotenten Charaktere aus der Hauptserie sind.

Sei $\chi_{(y,\tau)}$ nicht in der Hauptserie unipotenter Charaktere und $R_{(y,\tau)}$ der zugehörige Fast-Charakter, dann gilt wegen der Orthogonalitätseigenschaft der Fast-Charaktere $(R_{(y,\tau)}, R_{(x,\sigma)}) = 0$ für alle Fast-Charaktere $R_{(x,\sigma)}$, deren zugehöriger unipotenter Charakter in der Hauptserie liegt. Also gilt $(R_{(y,\tau)}, R_{T,1}) = 0$ wegen des Lemmas. Außerdem gilt $(R_{(y,\tau)}, R_{T,\theta}) = 0$, falls $\theta \neq 1$. So erhält man die folgende Eigenschaft von Fast-Charakteren, deren zugehöriger unipotenter Charakter nicht in der Hauptserie liegt.

Satz. Sei $\chi_{(y,\tau)}$ nicht in der Hauptserie unipotenter Charaktere und $R_{(y,\tau)}$ der zugehörige Fast-Charakter, dann gilt

$$(R_{(y,\tau)}, R_{T,\theta}) = 0$$

für jeden Torus T und für alle $\theta \in \mathrm{Irr}(T^F)$.

(2.8) Unipotente Charaktere in G^F bei isogenen Gruppen G — Die folgende Aussage ist aus [DM91] Proposition 13.20, wo auch ein Beweis zu finden ist.

Satz. Seien G_1 und G_2 zusammenhängende reduktive lineare algebraische Gruppen über K und sei $f : G_1 \to G_2$ ein Homomorphismus von algebraischen Gruppen definiert über $\mathbb{F}_q$ (siehe [DM91] Kapitel 3). Weiterhin sei $\mathrm{Kern}(f) \leq \mathrm{Z}(G_1)$ und das Bild $f(G_1)$ enthalte die Kommutatorgruppe G_2'. Dann sind die unipotenten Charaktere von G_1^F genau die Charaktere $\chi \circ f$, wobei χ die unipotenten Charaktere von G_2^F durchläuft.

Betrachte nun die Gruppe G und die isogene adjungierte Gruppe $G_{\mathrm{ad}} = G/\mathrm{Z}(G)$ sowie den Homomorphismus $f : G \to G_{\mathrm{ad}}, g \mapsto g\,\mathrm{Z}(G)$. Dieser erfüllt die Voraussetzungen des letzten Satzes. Es genügt also die unipotenten Charaktere des adjungierten Isogenietyps einer Isogenieklasse zu finden. Die unipotenten Charaktere einer Gruppe eines anderen Isogenietyps findet man dann über den obigen Homomorphismus.

Sei zum Beispiel $G = \mathrm{SL}_n(K)$, dann ist $G_{\mathrm{ad}} = \mathrm{PGL}_n(K)$ und f die Einschränkung der natürlichen Projektion $\mathrm{GL}_n(K) \to \mathrm{PGL}_n(K)$ auf G. Der Homomorphismus f erfüllt die Voraussetzungen des Satzes, es gilt nämlich $\mathrm{Kern}(f) = \mathrm{Z}(\mathrm{SL}_n(K))$ und $f(\mathrm{SL}_n(K)) = \mathrm{PSL}_n(K) = \mathrm{PGL}_n(K) = (\mathrm{PGL}_n(K))'$.

(2.9) Einfache endliche Gruppen. — Im Allgemeinen sind die endlichen Gruppen vom Lie-Typ G^F nicht einfach, aber sie spielen eine wichtige Rolle in der Klassifikation der einfachen endlichen Gruppen. Sei G_{sc} eine einfach zusammenhängende lineare algebraische Gruppe und betrachte die endliche Gruppe vom Lie-Typ $(G_{\mathrm{sc}})^F = (X_l)_{\mathrm{sc}}(q)$ eines beliebigen Typs. Weiterhin sei Z das Zentrum dieser Gruppe. Bis auf wenige sehr kleine l und q ist die Gruppe $(G_{\mathrm{sc}})^F/Z$ einfach (siehe [CCN+85] Kapitel 2 und 3 der Einleitung). Diese einfache Gruppe ist ein Normalteiler in der zugehörigen adjungierten endlichen Gruppe vom Lie-Typ G_{ad}^F.

Sei $f : G_{\mathrm{sc}} \to G_{\mathrm{ad}}$, $g \mapsto gZ$ wie in (2.8). Weiterhin sei χ ein unipotenter Charakter von $(G_{\mathrm{ad}})^F$, dann ist $\chi \circ f$ ein unipotenter Charakter von $(G_{\mathrm{sc}})^F$. Für einen unipotenten Charakter gilt, dass das Zentrum der Gruppe im Kern des Charakters liegt (siehe [Car85] Abschnitt 12.1). Also erhält man einen irreduziblen Charakter von $(G_{\mathrm{sc}})^F/Z$ durch

$$\widehat{\chi \circ f} : G_{\mathrm{sc}}/Z \to \mathbb{C},\ gZ \mapsto (\chi \circ f)(g).$$

Den gleichen Charakter erhält man, wenn man χ auf $G_{\mathrm{sc}}/Z \trianglelefteq G_{\mathrm{ad}}$ einschränkt.

Die irreduziblen Charaktere der einfachen Gruppe $(G_{\mathrm{sc}})^F/Z$ die man durch Einschränkung der unipotenten Charaktere von $(G_{\mathrm{ad}})^F$ erhält, bezeichnen wir als unipotente Charaktere von $(G_{\mathrm{sc}})^F/Z$. Wie wir oben gesehen haben sind dies auch die Charaktere die man aus den unipotenten Charakteren von $(G_{\mathrm{sc}})^F$ erhält, wenn man zur Faktorgruppe übergeht.

Deshalb genügt es, nur die unipotenten Charaktere des adjungierten Isogenietyps zu berechnen.

Sei zum Beispiel $(G_{\mathrm{ad}})^F = \mathrm{PGL}_n(q)$ und $(G_{\mathrm{sc}})^F = \mathrm{SL}_n(q)$. Dann ist $(G_{\mathrm{sc}})^F/Z = \mathrm{PSL}_n(q)$. Kennt man die unipotenten Charaktere von $\mathrm{PGL}_n(q)$, so erhält man die unipotenten Charaktere von $\mathrm{PSL}_n(q)$ durch Einschränkung. Die unipotenten Charaktere von $\mathrm{SL}_n(q)$ sind die irreduziblen Charaktere χ, für die der Charakter $\widehat{\chi} : \mathrm{PSL}_n(q) \to \mathbb{C}, gZ \mapsto \chi(g)$ ein unipotenter Charakter von $\mathrm{PSL}_n(q)$ ist.

§3 Resultate zu WEYL-Gruppen und zu kuspidalen Charakteren

Dieser Paragraph bereitet die Parametrisierung unipotenter Charaktere im nächsten Paragraphen vor.

(3.1) Partitionen und Doppelpartitionen — Zu einer Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ betrachten wir ein Tupel $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ mit

$$\lambda_i \in \mathbb{N}_0 \; \forall\, 1 \leq i \leq m, \;\; 0 \leq \lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_m \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = n.$$

Auf der Menge dieser Tupel betrachten wir eine Äquivalenzrelation, wobei zwei Tupel in einer Äquivalenzklasse sind, wenn sie die gleichen Komponenten ungleich 0 haben. Eine solche Äquivalenzklasse heißt Partition von n. Zu einer Partition λ von n definiert man $|\lambda| := n$.

Jede Äquivalenzklasse enthält genau ein Tupel, für das $1 \leq \lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_m$ gilt. Ein leeres Tupel ( ) ist von dieser Form und eine Partition von 0.

Oft werden Partitionen fallend aufgeschrieben, also mit der Eigenschafft $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_m \geq 0$. Auch in dieser Arbeit werden Partitionen später fallend geschrieben. In diesem Paragraphen bietet sich aber die aufsteigende Schreibweise an.

Eine Doppelpartition zu n ist ein Paar (α, β) zweier Partitionen α und β, wobei $|\alpha| + |\beta| = n$ gilt. Ein Paar von leeren Tupeln $((\,), (\,))$ ist eine Doppelpartition von 0.

Zu einer Partition λ betrachten wir das Tupel $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ mit $1 \leq \lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_m$ und definieren dazu eine eindeutig bestimmte β-Menge $X := \{x_1, \ldots, x_m\}$ mit $x_i := \lambda_i + i - 1$ für $1 \leq i \leq m$. Durch eine solche β-Menge wird eine Partition eindeutig bestimmt.

Ein Haken v von X ist ein Paar (y, x) natürlicher Zahlen mit $0 \leq y < x$, $y \notin X$ und $x \in X$. Sei V die Menge der Haken zur β-Menge X, dann zeigt eine kleine Rechnung, dass $|V| = |\lambda|$ gilt, wenn X die β-Menge zu λ ist. Die Zahl $e := x - y$ heißt Hakenlänge des Hakens $v = (y, x)$ und v wird in diesem Fall als e-Haken bezeichnet. Die Definitionen von Haken, Hakenlänge und e-Haken sind im Einklang mit den anschaulichen Definitionen dieser Begriffe in einem YOUNG-Diagramm.

Sei $v = (y, x)$ ein 2-Haken einer β-Menge X mit zugehöriger Partition λ. Dann ist $X_1 := \{y\} \cup X \backslash \{x\}$ eine β-Menge zu einer Partition λ_1 mit $|\lambda_1| = |\lambda| - 2$. Das YOUNG-Diagramm zu λ_1 erhält man, indem man den entsprechenden 2-Haken im YOUNG-Diagramm zu λ streicht. Der 2-Kern X_∞ beziehungsweise λ_∞ ist die eindeutig bestimmte β-Menge beziehungsweise Partition die man erhält, wenn man so lange wie möglich alle 2-Haken streicht bis keine 2-Haken mehr vorhanden sind.

Zu einer β-Menge X definiert man die β-Mengen $Y_0 := \{j; 2j \in X\}$ und $Y_1 := \{j; 2j+1 \in X\}$. Weiterhin sei μ_i die Partition zu Y_i. Der 2-Quotient zu λ ist die Doppelpartition (λ_0, λ_1), wobei $\lambda_0 = \mu_1$ und $\lambda_1 = \mu_0$, falls $m = |X|$ gerade, und $\lambda_i = \mu_i$ sonst.

Die obigen Definitionen findet man in [FS90] im ersten Abschnitt. Dort werden allgemeiner e-Kern und e-Quotient definiert. Hier reicht aber der Fall $e = 2$.

(3.2) Eigenschaften von Partitionen — Sei λ eine Partition von n, λ_i eine Partition, die man aus λ durch Wegstreichen von i 2-Haken erhält, λ_∞ der 2-Kern von λ, $g(\lambda)$ die Anzahl der Haken mit gerader und $u(\lambda)$ die Anzahl der Haken mit ungerader Hakenlänge. Der 2-Kern einer Partition hat keine 2-Haken und solche Partitionen haben ausschließlich die Form $(1, \ldots, d)$, wobei $n = \frac{1}{2}d(d+1)$ ist. In einer solchen Partition gibt es keine Haken mit gerader Hakenlänge, weil es sonst auch einen 2-Haken gäbe.

Beim Wegstreichen eines 2-Hakens streicht man einen Haken mit Länge zwei und einen Haken mit Länge eins. Sei v der 2-Haken und v' der 1-Haken, der weggestrichen wird. Außerdem sei v so, dass die beiden Kästchen im YOUNG-Diagramm übereinander liegen. Sei u ein Haken, der nicht weggestrichen wird, dann ändert sich die Hakenlänge von u nur, wenn u über v, links neben v oder links neben v' liegt. Ist u ein Haken über v, dann ändert sich die Parität der Hakenlänge von u nicht. Sei u ein Haken links neben v, und u' der Haken links neben v' und unter u, dann haben die Hakenlängen von u und u' unterschiedliche Parität. Diese Eigenschaft gilt auch nach dem Wegstreichen von v. Ist v ein 2-Haken mit nebeneinanderliegenden Kästchen im YOUNG-Diagramm, dann erhält man ähnliche Aussagen über die Hakenlängen der anderen Haken. Insgesamt erhält man induktiv die folgenden Gleichungen:

$$|\lambda_i| = |\lambda| - 2i,\ g(\lambda_i) = g(\lambda) - i,\ u(\lambda_i) = u(\lambda) - i.$$

Also gilt:

$$u(\lambda) - g(\lambda) = u(\lambda_i) - g(\lambda_i) = u(\lambda_\infty) - g(\lambda_\infty) = u(\lambda_\infty) = |\lambda_\infty|,$$

und damit:

$$n = g(\lambda) + u(\lambda) = |\lambda_\infty| + 2g(\lambda).$$

Man kann die Menge der Partitionen einer Zahl n partitionieren, indem man Partitionen mit gleichem 2-Kern zu einer Serie zusammenfasst. Alle Partitionen einer solchen Serie haben die gleiche Anzahl von Haken mit gerader und damit auch die gleiche Anzahl von Haken mit ungerader Hakenlänge.

Der 2-Quotient von λ ist eine Doppelpartition, die beschreibt, wie die $g(\lambda)$ 2-Haken, in der Partition λ an den 2-Kern λ_∞ angeordnet sind.

(3.3) Symbole — Als nächstes definieren wir Symbole. Diese sind von der Form

$$\binom{\lambda_1, \dots, \lambda_a}{\mu_1, \dots, \mu_b}.$$

Dabei gilt:

(i) $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{N}_0, \forall\, 1 \leq i \leq a, 1 \leq j \leq b$
(ii) $\lambda_i < \lambda_{i+1} \forall\, 1 \leq i \leq a-1$
(iii) $\mu_j < \mu_{j+1} \forall\, 1 \leq j \leq b-1$
(iv) $\lambda_1 \neq 0$ oder $\mu_1 \neq 0$
(v) $d := a - b \geq 0$.

Die Zahl d heißt Defekt des Symbols. Der Rang l eines Symbols ist definiert als

$$l := \sum \lambda_i + \sum \mu_j - \left[\left(\frac{a+b-1}{2}\right)^2\right].$$

Sei $d \in \mathbb{N}_0$. Die Menge der Doppelpartitionen einer Zahl n steht in Bijektion zur Menge der Symbole mit Defekt d und Rang

$$l = \begin{cases} n + (\frac{d-1}{2})^2 + \frac{d-1}{2}, & \text{falls } d \text{ ungerade,} \\ n + (\frac{d}{2})^2, & \text{falls } d \text{ gerade.} \end{cases}$$

Dabei werden im Fall $d = 0$ die Symbole $\binom{\lambda_1,\dots,\lambda_a}{\mu_1,\dots,\mu_a}$ und $\binom{\mu_1,\dots,\mu_a}{\lambda_1,\dots,\lambda_a}$ als gleich betrachtet.

Einer Doppelpartition (α, β) ordnet man auf folgende Weise ein Symbol mit Defekt d zu:

(i) Durch Voranstellen von zusätzlichen Nullen an eine der Partitionen α oder β ändert man nicht den Wert $|\alpha|+|\beta| = n$. Die Partition α soll anschließend d Zahlen mehr haben als die Partition β. Also fügt man, je nach dem, an α oder β vorne eine entsprechende Anzahl Nullen an, damit α anschließend um d Zahlen länger ist als β.

(ii) Beginnen beide Partitionen mit Nullen, dann streicht man in beiden Partitionen gleich viele führende Nullen, so dass nachher eine Partition nicht mit Null beginnt.

(iii) Seien γ und ν die Partitionen, die man so erhält, dann definiert man die Zahlenfolgen λ und μ durch $\lambda_i := \gamma_i + i - 1$ und $\mu_j := \nu_j + j - 1$.

Das Symbol $\binom{\lambda}{\mu}$ ist dann von der oben definierten Form und hat den Rang l. In Abschnitt 11.4 von [Car85] werden zunächst Symbole mit Defekt 0 oder 1 definiert. Darauf baut die Definition von Symbolen mit beliebigem Defekt $d \in \mathbb{N}_0$ auf, die in Abschnitt 13.8 zu finden ist.

(3.4) Parametrisierung irreduzibler Charaktere von Weyl-Gruppen — In Abschnitt 11.4 von [Car85] findet man die folgenden Aussagen über die Weyl-Gruppen vom klassischen Typ A_l, B_l, C_l und D_l. Die Resultate über die Weyl-Gruppen der Ausnahmetypen G_2, F_4, E_6, E_7 und E_8 sind der zweiten Hälfte des Abschnitts 13.2 von [Car85] entnommen.

Die Gruppe $W(A_l)$ ist isomorph zu S_{l+1}, und die irreduziblen Charaktere werden durch die Partitionen von $l+1$ parametrisiert. Dabei wird dem 1-Charakter die Partition $(l+1)$ von $l+1$ zugeordnet.

Die Gruppen $W(B_l) \cong W(C_l)$ sind isomorph zum Kranzprodukt $C_2 \wr \mathrm{S}_l$, und die irreduziblen Charaktere werden durch die Doppelpartitionen zu l parametrisiert. Dem 1-Charakter der Weyl-Gruppe wird die Doppelpartition $((l),())$ zugeordnet.

In der Weyl-Gruppe $W(D_l)$ ist die Situation etwas komplizierter. Diese Gruppe ist isomorph zu einer Untergruppe von $C_2 \wr \mathrm{S}_l$ vom Index zwei. Die irreduziblen Charaktere werden auch durch Doppelpartitionen von l parametrisiert. Allerdings werden die Doppelpartitionen (α, β) und (β, α) als gleich betrachtet. Zu einer Doppelpartition der Form (α, α) gibt es zwei irreduzible Charaktere, wobei der eine mit $(\alpha, +)$ und der andere mit $(\alpha, -)$ bezeichnet wird. Der 1-Charakter von $W(D_l)$ wird der Doppelpartition $((l),())$ zugeordnet. Beachte, dass damit auch die Doppelpartition $((),(l))$ dem 1-Charakter zugeordnet wird.

Die Weyl-Gruppen der Ausnahmegruppen werden nun betrachtet. Da es bei den Ausnahmegruppen keine unendlichen Serien gibt, müssen die irreduziblen Charaktere dieser Gruppen nicht in Abhängigkeit des Parameters l parametrisiert werden. Stattdessen werden sie einfach als $\phi_{d,e}$ bezeichnet, wobei die natürliche Zahl d den Grad des Charakters angibt. Die Zahl e erhält man wie folgt. Zu jeder Weyl-Gruppe gibt es eine Spiegelungsdarstellung über einen reellen Vektorraum der Dimension l. Diese Darstellung wird in [Car85] Abschnitt 2.2 definiert. Mit $\mathfrak{P}_i(V)$ bezeichnet man den Raum der homogenen Polynomfunktionen auf V vom Grad i mit reellen Werten. Der Raum $\mathfrak{P}_i(V)$ ist ein W-Modul mit $(wf)(v) := f(wv)$ für alle $w \in W, f \in \mathfrak{P}_i(V), v \in V$. Die Zahl e ist die kleinste Zahl, so dass $\phi_{d,e}$ als Konstituent im Charakter des W-Moduls $\mathfrak{P}_e(V)$ vorkommt, aber nicht im Charakter der $\mathfrak{P}_i(V)$ für $i < e$.

Der 1-Charakter wird also mit $\phi_{1,0}$ bezeichnet. Gibt es zwei verschiedene irreduzible Charaktere mit diesen Eigenschaften, so werden sie mit $\phi'_{d,e}$ und $\phi''_{d,e}$ bezeichnet.

Die irreduziblen Charaktere der Weyl-Gruppen vom Typ E_6, E_7 und E_8 sind durch die Zahlen d und e eindeutig bestimmt. Und zwar hat die Gruppe $W(E_6)$ 25 irreduzible Charaktere, $W(E_7)$ hat 60 und $W(E_8)$ 112 irreduzible Charaktere.

Zur WEYL-Gruppe $W(F_4)$ gibt es 25 irreduzible Charaktere, wovon einige nicht eindeutig durch die Zahlen d und e bestimmt sind. Die Charaktertafel dieser Gruppe findet man in [Car85] Abschnitt 13.2.

Dort ist auch die Charaktertafel von $W(G_2)$ zu finden. Diese Gruppe hat sechs irreduzible Charaktere, wovon zwei nicht durch die Zahlen d und e unterschieden werden können.

(3.5) Kuspidale Charaktere der endlichen Gruppen vom LIE-Typ — Sei G^F eine endliche Gruppe vom LIE-Typ. Dann erhält man die unipotenten Charaktere über die kuspidalen unipotenten Charaktere der LEVI-Untergruppen, wie es in (2.5) beschrieben wurde. Bei den LEVI-Untergruppen handelt es sich wieder um endliche Gruppen vom LIE-Typ. Also ist es wichtig zu wissen, welche dieser Gruppen kuspidale unipotente Charaktere besitzen. Die Resultate in Tabelle 3 sind im Abschnitt 13.7 von [Car85] zu finden. Bei den Ausnahmegruppen wird teilweise auch eine Bezeichnung für die kuspidalen unipotenten Charaktere angegeben.

Typ	kuspidale unipotente Charaktere
A_l	keine
${}^2A_l$	falls $l = \frac{1}{2}(s^2+s) - 1, s \in \mathbb{N}$, dann genau einen, sonst keinen
B_l	falls $l = s^2 + s, s \in \mathbb{N}$, dann genau einen, sonst keinen
C_l	falls $l = s^2 + s, s \in \mathbb{N}$, dann genau einen, sonst keinen
D_l	falls $l = s^2, s \in \mathbb{N}$ gerade, dann genau einen, sonst keinen
${}^2D_l$	falls $l = s^2, 3 \leq s \in \mathbb{N}$ ungerade, dann genau einen, sonst keinen
${}^3D_4$	zwei, $\{{}^3D_4[1], {}^3D_4[-1]\}$
G_2	vier, $\{G_2[1], G_2[-1], G_2[\theta], G_2[\theta^2]\}$
F_4	sieben, $\{F_4^I[1], F_4^{II}[1], F_4[-1], F_4[i], F_4[-i], F_4[\theta], F_4[\theta^2]\}$
E_6	zwei, $\{E_6[\theta], E_6[\theta^2]\}$
${}^2E_6$	drei, $\{{}^2E_6[1], {}^2E_6[\theta], {}^2E_6[\theta^2]\}$
E_7	zwei, $\{E_7[\xi], E_7[-\xi]\}$
E_8	dreizehn
${}^2B_2$	zwei
${}^2G_2$	sechs
${}^2F_4$	zehn

Tabelle 3: Kuspidale unipotente Charaktere in endlichen Gruppen vom LIE-Typ.

§4 Parametrisierung unipotenter Charaktere

Für jeden Typ der Gruppe G^F wird in diesem Paragraphen beschrieben, welche LEVI-Untergruppen kuspidale unipotente Charaktere besitzen, und wie die unipotenten Charaktere von G^F in Serien zerfallen. Außerdem werden die relativen WEYL-Gruppen, das heißt, die WEYL-Gruppen von linearen algebraischen Gruppen, zu der die unipotenten Charaktere einer Serie in Bijektion stehen, angegeben. Mit $W(X_l)$ wird also die WEYL-Gruppe einer linearen algebraischen Gruppe vom Typ X_l bezeichnet. Gegebenenfalls wird auch die Unterteilung der unipotenten Charaktere in Familien kurz beschrieben.

(4.1) Typ A_l — Die einzige LEVI-Gruppe, die einen kuspidalen unipotenten Charakter hat, ist ${L_\emptyset}^F = T^F$. Also liegen alle unipotenten Charaktere in der Hauptserie. Die unipotenten Charaktere der Hauptserie stehen in Bijektion zu den irreduziblen Charakteren von $W(A_l)$. Also werden die unipotenten Charaktere von G^F durch Partitionen von $l+1$ parametrisiert.

Jeder unipotente Charakter bildet eine eigene Familie. In diesem Fall sind also die Fast-Charaktere aus (2.7) gleich den unipotenten Charakteren.

(4.2) Typ ${}^2A_l$ — Wie bei den Gruppen vom Typ A_l werden die unipotenten Charaktere der Gruppen vom Typ ${}^2A_l$ durch Partitionen von $l+1$ parametrisiert. Allerdings liegen nicht alle unipotenten Charaktere in der Hauptserie. Zu einer Partition α von $l+1$ sei $u(\alpha)$ die Anzahl der Haken mit ungerader und $g(\alpha)$ die Anzahl der Haken mit gerader Hakenlänge. Dann gibt es ein $s \geq 0$ mit $|\alpha_\infty| = u(\alpha) - g(\alpha) = \frac{1}{2}(s^2+s) \geq 0$ (vergleiche (3.2)). Zwei Partitionen, und damit auch die zugehörigen Charaktere, gehören genau dann zur gleichen Serie, wenn die Zahl s gleich ist. Die Anzahl der Partitionen α, für die $u(\alpha)-g(\alpha) = \frac{1}{2}(s^2+s)$ für ein festes s gilt, ist gleich der Anzahl von Doppelpartitionen (β,γ) mit $|\beta|+|\gamma| = g(\alpha) = \frac{1}{2}((l+1) - \frac{1}{2}s(s+1))$.

Um die LEVI-Untergruppen, die einen kuspidalen unipotenten Charakter haben, aufzuzählen, muss man unterscheiden, ob l gerade oder ungerade ist. Dies wird deutlich, wenn man sich das DYNKIN-Diagramm der zugehörigen Gruppe G ansieht. Je nachdem ob l ungerade oder gerade ist, hat man in der Mitte des Diagramms einen Knoten, der bei der Anwendung von F nicht permutiert wird, oder man hat keinen solchen Knoten.

Sei l gerade. Die Standard-LEVI-Gruppen ${L_J}^F$ von G^F sind für die $J \subset I$ definiert, für die J ρ-invariant ist. Einen kuspidalen unipotenten Charakter haben in diesem Fall aber nur die LEVI-Gruppen vom Typ ${}^2A_k$ mit $k = \frac{1}{2}(s^2+s) - 1$ für ein s, und k gerade. Für eine feste LEVI-Gruppe vom Typ ${}^2A_k$ für geeignetes (gerades) k stehen die unipotenten Charaktere der zugehörigen Serie in Bijektion zu den irreduziblen Charakteren von $W(B_{\frac{1}{2}(l-k)})$. Setzt man $k=0$ so erhält man die Hauptserie unipotenter Charaktere, deren Elemente in Bijektion zu den irreduziblen Charakteren von $W(B_{l/2})$ stehen.

Sei nun l ungerade. Analog zu oben sind hier die LEVI-Gruppen, die einen kuspidalen unipotenten Charakter haben, vom Typ ${}^2A_k$, wobei $k = \frac{1}{2}(s^2+s) - 1$ für ein s ist und wobei k ungerade ist. Die unipotenten Charaktere einer Serie, für eine feste LEVI-Gruppe vom Typ ${}^2A_k$ für geeignetes k, stehen in Bijektion zu den irreduziblen Charakteren von $W(B_{\frac{1}{2}(l-k)})$. Im Fall der Hauptserie ($s=0$) ist $k=-1$ und ${}^2A_{-1}$ bezeichnet einen maximal zerfallenden Torus. Die unipotenten Charaktere der Hauptserie stehen in Bijektion zu den irreduziblen Charakteren von $W(B_{\frac{1}{2}(l+1)})$.

Da die irreduziblen Charaktere dieser WEYL-Gruppen durch Doppelpartitionen parametrisiert werden, gibt es auch eine Parametrisierung der unipotenten Charaktere durch Doppelpartitionen. Den Zusammenhang zwischen beiden Parametrisierungen bilden 2-Kern und 2-Quotient einer Partition (siehe (3.1), (3.2) und (5.4)). Das Beispiel (7.5) verdeutlicht die Vorgehensweise.

(4.3) Typ B_l — Die unipotenten Charaktere einer Gruppe G^F vom Typ B_l stehen in Bijektion zu den Symbolen $\binom{\lambda}{\mu}$ vom Rang l mit ungeradem Defekt d. Diese Parametrisierung erhält man wie folgt. Die LEVI-Gruppen von G^F, die einen kuspidalen unipotenten Charakter haben, sind vom Typ B_{s^2+s} für ein $s \in \mathbb{N}_0$. Eine Serie unipotenter Charaktere, für eine feste LEVI-Gruppe vom Typ B_{s^2+s}, steht in Bijektion zu den irreduziblen Charakteren von $W(B_{l-(s^2+s)})$. Diese wiederum werden durch Doppelpartitionen von $l-(s^2+s)$ parametrisiert. Einem unipotenten Charakter χ der Gruppe G^F wird nun ein Symbol wie folgt zugeordnet. Ist χ in der Serie zur LEVI-Gruppe vom Typ B_{s^2+s}, und ist der zugehörige irreduzible Charakter ϕ von $W(B_{l-(s^2+s)})$ durch die Doppelpartition (α, β) parametrisiert, dann wird χ durch das Symbol $\binom{\lambda}{\mu}$ mit Defekt $d = 2s+1$ parametrisiert, das nach der Konstruktion in (3.3) in Bijektion zu (α, β) steht. Dieses Symbol hat den Rang l. Die Hauptserien-Charaktere stehen in Bijektion zu den irreduziblen Charakteren von $W(B_l)$ und werden durch Symbole mit Defekt $d = 1$ parametrisiert.

Zwei unipotente Charaktere liegen in einer Familie, wenn die zugehörigen Symbole die gleichen Einträge mit gleicher Vielfachheit enthalten. Bezüglich der Größe von Familien bei diesem Typ stellt sich folgendes heraus: Für jede Familie unipotenter Charaktere existiert ein $e \in \mathbb{N}_0$, so dass die Familie 2^{2e} unipotente Charaktere enthält.

(4.4) Typ C_l — Die LEVI-Gruppen, die einen kuspidalen unipotenten Charakter haben, sind die vom Typ C_{s^2+s}. Wie beim Typ B_l stehen die unipotenten Charaktere einer Serie in Bijektion zu den irreduziblen Charakteren von $W(B_{l-(s^2+s)})$ beziehungsweise $W(B_l)$, für die Hauptserie. Man beachte, dass die WEYL-Gruppen $W(B_k)$ und $W(C_k)$ isomorph sind. Die unipotenten Charaktere einer Gruppe G^F vom Typ C_l werden also, wie die vom Typ B_l, durch Symbole vom Rang l mit ungeradem Defekt parametrisiert. Auch die Unterteilung in Familien erfolgt analog zu den Gruppen vom Typ B_l.

(4.5) Typ D_l — Die LEVI-Gruppen, die einen kuspidalen unipotenten Charakter haben sind vom Typ D_{s^2} für eine gerade Zahl $s \geq 0$. Für eine fest gewählte LEVI-Gruppe vom Typ $D_{s^2}, s > 0$, stehen die unipotenten Charaktere der zugehörigen Serie in Bijektion zu den irreduziblen Charakteren von $W(B_{l-s^2})$. In der Hauptserie $(s = 0)$ erhält man eine Bijektion zu den irreduziblen Charakteren von $W(D_l)$.

Parametrisiert werden die unipotenten Charaktere der Serie zu D_{s^2} mit Symbolen vom Defekt $d = 2s$. Da s gerade ist, haben die Symbole in diesem Fall einen durch 4 teilbaren Defekt. Die unipotenten Charaktere der Hauptserie haben Defekt 0. Zu einem unipotenten Charakter erhält man das zugehörige Symbol, wie beim Typ B_l, über die Doppelpartition, die dem zugehörigen irreduziblen Charakter der WEYL-Gruppe zugeordnet ist. Um die Symbole den Doppelpartitionen zuzuordnen, verwendet man die Bijektion aus (3.3). Dabei ist es egal, ob die WEYL-Gruppe den Typ B_{l-s^2} oder den Typ D_l hat. Allerdings wurden bei den WEYL-Gruppen vom Typ D_l die Doppelpartitionen (α, β) und (β, α) als gleich betrachtet, und zu den Doppelpartitionen (α, α) gab es zwei irreduzible Charaktere. Entsprechend werden auch die Symbole $\binom{\lambda}{\mu}$ und $\binom{\mu}{\lambda}$ als gleich betrachtet, und zu einem Symbol der Form $\binom{\lambda}{\lambda}$ gibt es zwei unipotente Charaktere.

Die beiden Charaktere zu einem solchen Symbol liegen in zwei verschiedenen Familien. Ansonsten liegen, wie bei den Typen B_l und C_l, zwei unipotente Charaktere in einer Familie, wenn die zugehörigen Symbole die gleichen Einträge mit gleicher

Vielfachheit haben.

(4.6) Typ ${}^2D_l$ — Die Levi-Gruppen vom Typ ${}^2D_{s^2}$ mit $s \geq 3$ ungerade haben einen kuspidalen unipotenten Charakter. Aus diesem Charakter erhält man eine Serie unipotenter Charaktere, die in Bijektion zu den irreduziblen Charakteren der Weyl-Gruppe $W(B_{l-s^2})$ steht. Die Hauptserie unipotenter Charaktere steht in Bijektion zu den irreduziblen Charakteren von $W(B_{l-1})$. Diese Serie erhält man aus dem Harish-Chandra-induzierten 1-Charakter eines maximal zerfallenden Torus'.

Parametrisiert werden die unipotenten Charaktere einer Gruppe vom Typ ${}^2D_l$ mit Symbolen, die einen Defekt $d = 2s, s \geq 1$ ungerade haben, wobei die Symbole zu $s = 1$ die unipotenten Charaktere der Hauptserie parametrisieren. Diese Symbole haben also Defekt 2. Wie bei den Gruppen vom Typ B_l, C_l und D_l erhält man das Symbol zu einem unipotenten Charakter über die Doppelpartition, mit der der zugehörige Charakter der Weyl-Gruppe parametrisiert wird.

(4.7) Typ G_2 — Die unipotenten Charaktere der Hauptserie von G^F stehen in Bijektion zu den sechs irreduziblen Charakteren von $W(G_2)$. In den vier diskreten Serien sind die vier kuspidalen unipotenten Charaktere von G^F. Weitere Serien unipotenter Charaktere gibt es nicht.

Die zehn unipotenten Charaktere werden in drei Familien unterteilt, wobei die Hauptserien-Charaktere zu den irreduziblen Charakteren $\phi_{1,0}$ und $\phi_{1,6}$ der Weyl-Gruppe $W(G_2)$ eine Familie jeweils für sich bilden. In der dritten Familie sind somit acht Charaktere.

(4.8) Typ ${}^3D_4$ — Eine Gruppe G^F des Typs ${}^3D_4$ hat acht unipotente Charaktere, davon sind zwei kuspidal. Die sechs unipotenten Charaktere der Hauptserie stehen in Bijektion zu den irreduziblen Charakteren von $W(G_2)$.

(4.9) Typ F_4 — Eine Gruppe diesen Typs hat sieben kuspidale unipotente Charaktere in den diskreten Serien. Die 25 unipotenten Charaktere der Hauptserie stehen in Bijektion zu den irreduziblen Charakteren der Weyl-Gruppe $W(F_4)$. Weiterhin erhält man fünf Charaktere als Konstituenten des Harish-Chandra-induzierten kuspidalen unipotenten Charakters der Levi-Untergruppe vom Typ B_2. Insgesamt erhält man also 37 unipotente Charaktere.

Von den elf Familien unipotenter Charaktere sind acht einelementig und zwei haben vier Elemente. Die restlichen 21 unipotenten Charaktere liegen alle in einer Familie.

(4.10) Typ E_6 — Die 30 unipotenten Charaktere einer Gruppe G^F vom Typ E_6 zerfallen in vier Serien. In der Hauptserie liegen 25 davon, die durch die Weyl-Gruppe $W(E_6)$ parametrisiert werden. Drei unipotente Charaktere erhält man als Konstituenten des Harish-Chandra-induzierten kuspidalen unipotenten Charakters der Levi-Untergruppe vom Typ D_4. Die letzten beiden sind kuspidal und liegen somit jeweils in einer diskreten Serie.

Es gibt 17 Familien unipotenter Charaktere, wovon 14 nur je einen Charakter enthalten. Zwei Familien bestehen aus vier und eine Familie aus acht Charakteren.

(4.11) Typ ${}^2E_6$ — Eine Gruppe diesen Typs hat 30 unipotente Charaktere, die in Bijektion zu den unipotenten Charakteren einer Gruppe vom Typ E_6 stehen. In der Hauptserie sind 25 unipotente Charaktere, die durch die irreduziblen Charaktere von $W(F_4)$ parametrisiert werden. Zwei unipotente Charaktere erhält man vom kuspidalen Charakter der Levi-Untergruppe vom Typ ${}^2A_5$ und drei unipotente Charaktere liegen in den diskreten Serien.

(4.12) Typ E_7 — Von den 76 unipotenten Charakteren einer Gruppe vom Typ E_7 sind 60 in der Hauptserie, zehn erhält man als Konstituenten des HARISH-CHANDRA-induzierten kuspidalen unipotenten Charakters der LEVI-Untergruppe vom Typ D_4, vier von den beiden kuspidalen unipotenten Charakteren der LEVI-Untergruppe vom Typ E_6 und zwei sind kuspidal. Die unipotenten Charaktere der Hauptserie stehen in Bijektion zu den irreduziblen Charakteren von $W(E_7)$, die unipotenten Charaktere der Serie zur LEVI-Untergruppe vom Typ D_4 zu $\mathrm{Irr}(W(C_3))$ und die beiden Serien zu den kuspidalen Charakteren von E_6 stehen jeweils in Bijektion zu $\mathrm{Irr}(W(A_1))$.

Es gibt 35 Familien unipotenter Charaktere, 24 mit einem, neun mit vier und zwei mit acht Charakteren.

(4.13) Typ E_8 — Eine Gruppe G^F vom Typ E_8 hat 166 unipotente Charaktere. Davon liegen 112 in der Hauptserie, 25 liegen in der Nebenserie zum kuspidalen unipotenten Charakter der LEVI-Untergruppe vom Typ D_4, jeweils sechs liegen in den beiden Serien zu den kuspidalen unipotenten Charakteren von E_6, jeweils zwei liegen in den beiden Serien zu den kuspidalen unipotenten Charakteren von E_7 und 13 unipotente Charaktere sind kuspidal.

Des weiteren hat man 46 Familien unipotenter Charakter, wovon 23 Familien einelementig sind. 18 Familien enthalten vier und vier Familien enthalten acht Charaktere. Die letzte Familie enthält 39 Charaktere.

(4.14) Typ ${}^2B_2$ — In diesem Fall gibt es vier unipotente Charaktere, zwei in der Hauptserie und zwei kuspidale in den diskreten Serien.

(4.15) Typ ${}^2G_2$ — Eine Gruppe G^F diesen Typs hat acht unipotente Charaktere, zwei in der Hauptserie und sechs in den diskreten Serien.

(4.16) Typ ${}^2F_4$ — In der Hauptserie einer Gruppe vom Typ ${}^2F_4$ sind sieben unipotente Charaktere, die durch die irreduziblen Charaktere der Symmetriegruppe eines Achtecks, D_{16}, parametrisiert werden. In den Nebenserien sind 14 weitere Charaktere, wovon vier Konstituenten der beiden HARISH-CHANDRA-induzierten kuspidalen unipotenten Charaktere der LEVI-Untergruppe vom Typ ${}^2B_2$ und die restlichen zehn kuspidal sind.

(4.17) Nicht eindeutige Parametrisierungen — In einigen Fällen ist es nicht möglich die unipotenten Charaktere eindeutig zu parametrisieren. Dies kann eintreten, wenn es einen Graphautomorphismus des DYNKIN-Diagramms gibt. Ist die Nummerierung der Knoten nicht eindeutig, dann kann es sein, dass es mehrere Parametrisierungen für die irreduziblen Charaktere der WEYL-Gruppe gibt. Dies führt dazu, dass auch die unipotenten Charaktere der Gruppen G^F nicht eindeutig parametrisiert werden können.

Betrachte zum Beispiel eine Gruppe vom Typ D_l, $l > 4$ und das zugehörige DYNKIN-Diagramm in Tabelle 2. Eine unterschiedliche Nummerierung der beiden rechten Knoten in diesem Diagramm führt zu zwei unterschiedlichen Parametrisierungen der irreduziblen Charaktere der WEYL-Gruppe. Die WEYL-Gruppe $W(D_l)$ ist nämlich eine Untergruppe von $W(B_l)$, und eine unterschiedliche Bezeichnung der Knoten im DYNKIN-Diagramm führt zu einer anderen Einbettung. Ein irreduzibler Charakter von $W(B_l)$ zu einer Doppelpartition der Form (α, α) zerfällt in $W(D_l)$ in zwei Charaktere. Je nach Wahl der Einbettung ergeben sich für diese Charaktere zwei Parametrisierungen. Entsprechend erhält man auch zwei unterschiedliche Parametrisierungen der zugehörigen unipotenten Charaktere.

Bei einer Gruppe vom Typ D_4 gibt es noch weitere Graphautomorphismen. Diese permutieren die drei Randknoten des DYNKIN-Diagramms beliebig. In diesem Fall erhält man auch mehrere richtige Parametrisierungen (siehe Beispiel (7.3)).

Betrachte nun die isomorphen Gruppen $B_2(2^f) \cong C_2(2^f)$. Die unipotenten Charaktere zu den Symbolen $\binom{1\,2}{0}$ und $\binom{0\,1}{2}$ kann man nicht unterscheiden, da beide Möglichkeiten der Parametrisierung durch den Isomorphismus vertauscht werden (vgl. (8.4)). Dieser Automorphismus dreht das Zeichen $<$ im DYNKIN-Diagramm um.

Das gleiche tritt bei einigen Ausnahmegruppen auf. Die unipotenten Charaktere zu den Labeln $\phi'_{d,e}$ und $\phi''_{d,e}$ werden in den Gruppen vom Typ G_2 beziehungsweise F_4 vertauscht, falls die Charakteristik des Körpers gleich 3 beziehungsweise 2 ist.

Ein etwas anderes Problem kann auftreten, wenn es mehrere kuspidale unipotente Charaktere gibt. Dies kann nur in exzeptionellen Gruppen passieren. Betrachte zum Beispiel die Bezeichungen $E_6[\theta]$ und $E_6[\theta^2]$ für kuspidale unipotente Charaktere einer Gruppe vom Typ E_6, die auch schon in Tabelle 3 in §3 verwendet wurden. Diese beiden Charaktere liegen in einer Familie mit 8 Elementen. Innerhalb dieser Familie werden die beiden Charaktere mit (g_3, θ) und (g_3, θ^2) bezeichnet (vgl. (2.7)). Durch θ beziehungsweise θ^2 wird in diesem Fall ein Charakter des Zentralisators des Elements g_3 bezeichnet. Dabei ist g_3 ein Element der Ordnung 3 und der Zentralisator wird von diesem Element erzeugt. Der Charakter θ beziehungsweise θ^2 ist genau der Charakter, der auf diesem Element der Ordnung 3 den Wert $\theta := \mathrm{e}^{2\pi i/3}$ beziehungsweise θ^2 annimmt (siehe [Car85] Abschnitt 13.6). Aber welches Element man mit g_3 bezeichnet, ist nicht eindeutig. Deshalb ist auch die Parametrisierung der beiden kuspidalen unipotenten Charaktere nicht eindeutig.

§5 Anwendung der Hilfsmittel

In diesem Abschnitt wird beschrieben, wie die in den letzten Paragraphen vorgestellten Hilfsmittel eingesetzt werden, um die unipotenten Charaktere in den Charaktertafeln zu finden und zu parametrisieren. Ausgangspunkt ist dabei immer das Ausrechnen der Grade unipotenter Charaktere. Weil man weiß, dass es einen unipotenten Charakter mit diesem Grad gibt, ist man schon fertig, wenn es zu jedem dieser Grade nur einen Charakter in der Charaktertafel gibt.

Gibt es jedoch mehrere irreduzible Charaktere deren Grade alle gleich dem eines unipotenten Charakters sind, dann ermöglicht in den meisten Fällen die Anwendung des Satzes aus (2.6) zumindest die Parametrisierung in der Hauptserie. Ein weiteres Hilfsmittel, insbesondere für die unipotenten Charaktere in den Nebenserien, erhält man aus der Unterteilung in Familien.

(5.1) Gradformeln — Ist G^F vom Typ A_l, ${}^2\!A_l$, B_l, C_l, D_l oder ${}^2D_l$, dann findet man in diesem Abschnitt eine Formel, mit der man zu jeder Partition beziehungsweise zu jedem Symbol den Grad ausrechnen kann, den der zugehörige unipotente Charakter hat. Diese Formeln sind aus [Car85] Kapitel 13 Abschnitt 8.

Sei G^F vom Typ A_l und $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ eine Partition von $l+1$. Für $i = 1, \ldots, m$ definiere $\lambda_i = \alpha_i + i - 1$, dann gilt für den Grad des unipotenten Charakters χ^α, der zur Partition α gehört,

$$\chi^\alpha(1) = \frac{(q-1)(q^2-1)\ldots(q^{l+1}-1)\prod_{i'<i}(q^{\lambda_i} - q^{\lambda_{i'}})}{q^{\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\cdots+\binom{m-1}{2}}\prod_i \prod_{k=1}^{\lambda_i}(q^k-1)}.$$

Sei G^F vom Typ ${}^2\!A_l$, α und λ_i wie oben. Dann gilt:

$$\chi^\alpha(1) = \frac{(q+1)(q^2-1)(q^3+1)\ldots(q^{l+1}\pm 1)\prod_{i'<i}(q^{\lambda_i} - (-1)^{\lambda_i+\lambda_{i'}}q^{\lambda_{i'}})}{q^{\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\cdots+\binom{m-1}{2}}\prod_i \prod_{k=1}^{\lambda_i}(q^k-(-1)^k)}.$$

Diese Formel erhält man, wenn man $-q$ statt q in die Formel für den Typ A_l einsetzt und den Betrag nimmt.

Sei G^F vom Typ B_l oder C_l und sei $\binom{\lambda_1,\ldots,\lambda_a}{\mu_1,\ldots,\mu_b}$ ein Symbol vom Rang l und ungeradem Defekt d. Dann ist der Grad des zugehörigen unipotenten Charakters χ von G^F gegeben durch:

$$\frac{\prod_{k=1}^{l}(q^{2k}-1)\prod_{i'<i}(q^{\lambda_i}-q^{\lambda_{i'}})\prod_{j'<j}(q^{\mu_j}-q^{\mu_{j'}})\prod_{i,j}(q^{\lambda_i}+q^{\mu_j})}{2^{(m-1)/2}q^{\binom{3}{2}+\binom{5}{2}+\cdots+\binom{m-2}{2}}\prod_i\prod_{k=1}^{\lambda_i}(q^{2k}-1)\prod_j\prod_{k=1}^{\mu_j}(q^{2k}-1)},$$

wobei $m := a+b$ ungerade ist, da $d := a-b$ ungerade ist.

Sei G^F vom Typ D_l und sei $\binom{\lambda_1,\ldots,\lambda_a}{\mu_1,\ldots,\mu_b}$ ein Symbol vom Rang l mit durch 4 teilbarem Defekt d. Dann ist der Grad des zugehörigen unipotenten Charakters χ von G^F gegeben durch:

$$\frac{\prod_{k=1}^{l-1}(q^{2k}-1)(q^l-1)\prod_{i'<i}(q^{\lambda_i}-q^{\lambda_{i'}})\prod_{j'<j}(q^{\mu_j}-q^{\mu_{j'}})\prod_{i,j}(q^{\lambda_i}+q^{\mu_j})}{2^c q^{\binom{2}{2}+\binom{4}{2}+\cdots+\binom{m-2}{2}}\prod_i\prod_{k=1}^{\lambda_i}(q^{2k}-1)\prod_j\prod_{k=1}^{\mu_j}(q^{2k}-1)},$$

wobei $m := a+b$, $c := a = b$, falls $\lambda = \mu$, und $c := \left[\frac{a+b-1}{2}\right] = \frac{a+b}{2} - 1$, falls $\lambda \neq \mu$.

Sei G^F vom Typ ${}^2D_l$ und sei $\binom{\lambda_1,\ldots,\lambda_a}{\mu_1,\ldots,\mu_b}$ ein Symbol vom Rang l und Defekt d mit $d \equiv 2 \mod 4$. Dann ist der Grad des zugehörigen unipotenten Charakters χ von G^F gegeben durch:

$$\frac{\prod_{k=1}^{l-1}(q^{2k}-1)(q^l+1)\prod_{i'<i}(q^{\lambda_i}-q^{\lambda_{i'}})\prod_{j'<j}(q^{\mu_j}-q^{\mu_{j'}})\prod_{i,j}(q^{\lambda_i}+q^{\mu_j})}{2^{(m-2)/2}q^{\binom{2}{2}+\binom{4}{2}+\cdots+\binom{m-2}{2}}\prod_i\prod_{k=1}^{\lambda_i}(q^{2k}-1)\prod_j\prod_{k=1}^{\mu_j}(q^{2k}-1)},$$

wobei $m := a + b$ gerade ist.

Die Gradformeln der Ausnahmegruppen sind sehr umfangreich, weil für jeden unipotenten Charakter ein Polynom angegeben werden muss. Diese Polynome findet man im Anhang B

(5.2) Permutations-Charaktere — Im Allgemeinen ist ein Permutations-Charakter ein Charakter zu einer Gruppe H, der für jede Konjugiertenklasse von H die Anzahl der Fixpunkte bezüglich einer transitiven Operation von H angibt. Ein Charakter π ist genau dann ein Permutations-Charakter, wenn $\pi = (1_U)^H$ für eine Untergruppe $U \leq H$ ist. Also sind die Charaktere $(1_{P_J{}^F})^{G^F}$ und speziell $(1_{B^F})^{G^F}$ Permutations-Charaktere zu G^F. Mit dem Satz aus (2.6) kann man diese Charaktere ausrechnen, wenn man die unipotenten Charaktere der Hauptserie kennt. Ist umgekehrt eine entsprechende Linearkombination von irreduziblen Charakteren gemäß des Satzes aus (2.6) kein Permutations-Charakter, dann ist es so, dass einer der irreduziblen Charaktere nicht in der Hauptserie unipotenter Charaktere liegt.

Permutations-Charaktere haben eine Reihe von Eigenschaften, die es ermöglichen, für Linearkombinationen von irreduziblen Charakteren zu prüfen, ob es sich dabei um Permutations-Charaktere handeln kann. Die folgenden notwendigen Bedingungen für einen Permutations-Charakter π der Gruppe H sind aus dem GAP 4 Reference Manual [GAP04], und zwar aus dem Kapitel "Class Functions" Abschnitt "Possible Permutation Characters". Für Beweise wird dort auf [Isa76] Satz 5.18 verwiesen.

(i) π ist ein Charakter von H und $(\pi, 1_H) = 1$.

(ii) $\pi(h) \geq 0 \; \forall h \in H$.

(iii) $\pi(1)$ teilt $|H|$.

(iv) $\pi(h^n) \geq \pi(h) \; \forall h \in H, n \in \mathbb{N}$.

(v) $\pi(h) = 0$ falls die Ordnung von h kein Teiler von $|H|/\pi(1)$ ist.

(vi) $\pi(1)|\mathrm{N}_H(h)|$ teilt $\pi(h)|H| \; \forall h \in H$.

(vii) Sei p eine Primzahl, die $|H|/\pi(1)$ genau einmal teilt. Dann ist auch $s/(p-1)$ ein Teiler von $|H|/\pi(1)$ und $s/(p-1) \equiv 1 \mod p$. Dabei ist s die Anzahl der p-Elemente in $U \leq H$ mit $\pi = (1_U)^H$.

(5.3) Bemerkungen zum Satz über Hauptserien-Charaktere — In diesem Abschnitt wird beschrieben, wie der Satz aus (2.6) verwendet werden kann, um die unipotenten Charaktere in der Hauptserie zu parametrisieren, und zwar, wenn es zu einem Label eines unipotenten Charakters mehrere Kandidaten gibt. Dabei bezeichnen wir einen irreduziblen Charakter $\chi \in G^F$ als Kandidaten für ein Label, wenn der Grad von χ gleich dem Grad des dem Label zugeordneten unipotenten Charakters ist.

Für die Kandidatenmenge zu einem Label gibt es mehrere Möglichkeiten. Zum einen kann es sein, dass in der Menge der Kandidaten für einen unipotenten Charakter nur ein Kandidat unipotent ist. Zum anderen ist es möglich, dass in der Kandidatenmenge mehrere oder alle Kandidaten unipotent sind, nämlich dann, wenn man zu verschiedenen Labeln den gleichen Grad ausrechnet.

Angenommen zu einigen Symbolen gibt es mehrere Kandidaten, von denen nur jeweils einer unipotent ist. Betrachte die folgende Gleichung des Satzes aus (2.6):

$$(\chi_\phi, (1_{B^F})^{G^F}) = \phi(1) \;\; \forall \phi \in \mathrm{Irr}(W).$$

Dies besagt, dass ein unipotenter Charakter χ_ϕ, der einem irreduziblen Charakter ϕ der Weyl-Gruppe zugeordnet ist, mit Vielfachheit $\phi(1)$ in einem Permutations-Charakter vorkommt. Beachte, dass mit W die relative Weyl-Gruppe bezeichnet wird, zu deren irreduziblen Charakteren die unipotenten Charaktere der Hauptserie in Bijektion stehen.

Man berechnet jetzt folgenden Charakter:

$$\vartheta = \sum_{\phi \in \mathrm{Irr}(W)} \phi(1)\chi_\phi.$$

Für die χ_ϕ setzt man jeweils einen Kandidaten ein, der dem Label beziehungsweise dem Charakter ϕ der WEYL-Gruppe zugeordnet ist. Man probiert jetzt alle Kombinationen von Kandidaten für diese Symbole aus und überprüft, ob ϑ ein Permutations-Charakter sein kann. Da die Überprüfung einiger Kriterien aus (5.2) sehr viel Rechenzeit kostet, empfiehlt es sich, zuerst nur das Kriterium (ii) zu überprüfen. Beachte, dass die Bedingung (i) immer erfüllt ist.

Angenommen zu zwei Symbolen wird der gleiche Grad berechnet, dann gibt es zu beiden Symbolen (mindestens) zwei Kandidaten, weil die Kandidatenmenge dann gleich ist. Wir betrachten erneut den Charakter ϑ, wie er oben definiert wurde. Sind in einem kritischem Fall die Grade der zugehörigen irreduziblen Charaktere der WEYL-Gruppe unterschiedlich, so kann man durch Probieren beider möglicher Zuordnungen die Parametrisierung vervollständigen, wenn man nur für eine Zuordnung einen Permutations-Charakter erhält. Ansonsten versucht man, mit der allgemeineren Formel

$$(\chi_\phi, (1_{P_J{}^F})^{G^F}) = (\phi, (1_{W_J})^W) \;\; \forall \phi \in \mathrm{Irr}(W)$$

weitere Informationen zu bekommen. Dabei ist es wichtig, eine Menge $J \subset I$ zu wählen, so dass sich die Vielfachheiten der Kandidaten für χ_ϕ in den Permutations-Charakteren $(1_{P_J{}^F})^G$ unterscheiden. Hat man dies erreicht, so kann man, ähnlich wie oben, den Charakter

$$\vartheta = \sum_{\phi \in \mathrm{Irr}(W)} (\phi, (1_{W_J})^W)\chi_\phi$$

berechnen und überprüfen, ob es sich um einen Permutations-Charakter handeln kann.

(5.4) Die Hauptserien-Charaktere beim Typ ^2A_l — Wie in (4.2) beschrieben, werden die unipotenten Charaktere der Gruppen vom Typ ^2A_l durch Partitionen von $l+1$ parametrisiert. Die Serien unipotenter Charaktere stehen jedoch zusätzlich in Bijektion zu den irreduziblen Charakteren einer WEYL-Gruppe vom Typ B. Diese Charaktere werden durch Doppelpartitionen parametrisiert. Mit Hilfe des folgenden Satzes aus dem Anhang von [FS90] findet man heraus, welcher irreduzible Charakter der relativen WEYL-Gruppe zu einer bestimmten Partition von $l+1$ und damit zu einem unipotenten Charakter gehört.

Satz Sei λ eine Partition von $l+1$ mit 2-Kern λ_∞ und 2-Quotient (λ_0, λ_1), sei $|\lambda_\infty| = \frac{1}{2}d(d+1)$ und $g(\lambda)$ sei die Anzahl der Haken von λ mit gerader Hakenlänge. Weiterhin sei χ_λ der unipotente Charakter, der durch λ parametrisiert wird. Dann wird χ_λ auch durch den irreduziblen Charakter der WEYL-Gruppe $W(B_{g(\lambda)})$ parametrisiert, der seinerseits in Bijektion zur Doppelpartition (α, β) steht, wobei gilt $\alpha = \lambda_0$ und $\beta = \lambda_1$ falls d gerade, und $\alpha = \lambda_1$ und $\beta = \lambda_0$ falls d ungerade ist.

Anhand des Beispiels (7.5) kann man die Anwendung dieser Aussage nachvollziehen.

(5.5) Eigenschaften bestimmter Fast-Charaktere — Sei $s \in G^F$ halbeinfach und sei $\varkappa_s$ die charakteristische Klassenfunktion von G^F der Konjugiertenklasse zu s, das heißt: $\varkappa_s(g) = 1$ für alle zu s konjugierten $g \in G^F$ und $\varkappa_s(g) = 0$ sonst.

Satz (siehe [Car85] 7.5.5) Die Klassenfunktionen $\varkappa_s$ sind Linearkombinationen von verallgemeinerten DELIGNE-LUSZTIG-Charakteren $R_{T,\theta}$.

Wie in Abschnitt (2.7) bemerkt, gilt für einen Fast-Charakter $R_{(y,\tau)}$, der zu einem unipotenten Charakter $\chi_{(y,\tau)}$ einer Nebenserie gehört, dass

$$(R_{(y,\tau)}, R_{T,\theta}) = 0 \text{ für jeden Torus } T \text{ und für alle } \theta \in \mathrm{Irr}(T^F)$$

ist. Also gilt auch

$$(R_{(y,\tau)}, \varkappa_s) = 0 \text{ für alle halbeinfachen } s.$$

Somit hat man folgende notwendige Bedingung an die Charaktere $R_{(y,\tau)}$, für die $\chi_{(y,\tau)}$ in der Nebenserie liegt: $R_{(y,\tau)}(s) = 0$ für alle halbeinfachen $s \in G^F$. Hat man also mehrere Kandidaten für unipotente Charaktere einer Familie, dann bildet man den Fast-Charakter $R_{(y,\tau)}$ für alle Kombinationen von Kandidaten und überprüft, ob dieser auf allen halbeinfachen Konjugiertenklassen verschwindet.

(5.6) Zusammenfassung der Hilfsmittel — Das Ziel, die unipotenten Charaktere in den endlichen Gruppen vom LIE-Typ zu bestimmen und zu parametrisieren, können wir jetzt bis auf wenige Ausnahmen erreichen. Dabei geht man anhand der folgenden Skizze vor.

(i) Mit Hilfe der Ergebnisse, die in §4 aufgelistet sind, bestimmt man die WEYL-Gruppen, deren irreduzible Charaktere in Bijektion zu den unipotenten Charakteren der verschiedenen Serien stehen. Ist G^F vom Typ ${}^2A_l$, dann betrachtet man zunächst nur die WEYL-Gruppe $W(A_l)$.

(ii) Zu den irreduziblen Charakteren der WEYL-Gruppe bestimmt man die zugeordneten Partitionen beziehungsweise Doppelpartitionen und gegebenenfalls die zugehörigen Symbole gemäß §4 und (3.3). Bei den Ausnahmegruppen fällt dieser Schritt weg.

(iii) Jetzt bestimmt man die Grade der zugehörigen unipotenten Charaktere. Dabei verwendet man entweder eine der Gradformeln aus (5.1) oder, bei den Ausnahmegruppen, das entsprechende Polynom in q. Für kleine l findet man die Grade der unipotenten Charaktere auch im Anhang B.

(iv) In der Charaktertafel der Gruppe schaut man nach, welche Charaktere den richtigen Grad haben. So erhält man zu jedem Label (Symbol, Partition oder das entsprechende Label eines unipotenten Charakters einer Ausnahmegruppe) eine Menge von Kandidaten für unipotente Charaktere.

(v) Erhält man zu einigen Labeln mehrere Kandidaten, so kann man, wie es in (5.3) beschrieben wurde, gegebenenfalls mit dem Satz aus (2.6) die Parametrisierung in der Hauptserie vervollständigen. Ist G^F vom Typ ${}^2A_l$, dann muss man noch ausrechnen, welche Vielfachheiten die unipotenten Charaktere der Hauptserie in den Permutations-Charakteren ϑ haben. Dabei geht man so vor, wie es in (5.4) beschrieben ist.

(vi) Gibt es immer noch Fälle, in denen es zu einem Label mehrere Kandidaten gibt, zum Beispiel in den Nebenserien, dann kann man die Einteilung unipotenter Charaktere in Familien verwenden. Dabei prüft man für alle möglichen Zuordnungen der Kandidaten zu den Labeln, ob die so berechneten Klassenfunktionen $R_{(y,\tau)}$ die notwendige Bedingung für Fast-Charaktere erfüllen, das heißt, ob sie auf allen halbeinfachen Konjugiertenklassen verschwinden.

§6 Atlasnotation und GAP-Charaktertafeln

Bis hierher sind die Mittel bereit gestellt worden, um unipotente Charaktere in der Menge der irreduziblen Charaktere von endlichen Gruppen vom Lie-Typ zu identifizieren und zu parametrisieren. In diesem Abschnitt wird gezeigt, wie man Charaktertafeln dieser Gruppen in der Charaktertafel-Bibliothek von GAP findet (siehe [GAP04] und [Bre04]).

(6.1) Atlasnotation — In der GAP-Charaktertafel-Bibliothek werden die enthaltenen Charaktertafeln so bezeichnet, wie dies auch im Atlas of Finite Groups [CCN+85] geschieht. In diesem Abschnitt wird erklärt, wie die Notation des Atlas' aufgebaut ist.

Für zwei Gruppen A und B ist $A.B$ jegliche Gruppe mit einem Normalteiler von der Struktur A, so dass die zugehörige Faktorgruppe Struktur B hat. Die hier betrachteten Gruppen sind alle von dieser Form, wobei eine der beiden Gruppen eine elementar abelsche Gruppe, meist sogar eine zyklische Gruppe ist, und die andere Gruppe fast immer einfach ist. Zyklische Gruppen werden dabei durch ihre Ordnung abgekürzt. Außerdem wird die von Artin eingeführte Notation für fast immer einfache Gruppen verwendet. Diese Notation verwendet einen Buchstaben für Gruppen, die in einer unendlichen Serie sind und die ab einer bestimmten Gruppenordnung einfach sind.

Betrachte zum Beispiel die Gruppe $(A_1)_{\mathrm{ad}}(q) = \mathrm{PGL}_2(q)$. Diese Gruppe ist für gerades q einfach. Für q ungerade hat sie einen einfachen Normalteiler vom Index 2, nämlich $\mathrm{PSL}_2(q)$. Diese Gruppe schreibt man in Artinscher Notation als $\mathrm{L}_2(q)$. Die Gruppe $(A_1)_{\mathrm{ad}}(q) = \mathrm{PGL}_2(q)$ wird also im Atlas mit $\mathrm{L}_2(q)$ bezeichnet, falls q gerade ist, und sie wird mit $\mathrm{L}_2(q).2$ bezeichnet, falls q ungerade ist.

Im Allgemeinen werden die endlichen Gruppen vom Lie-Typ, die zu einer klassischen Matrixgruppe isomorph sind, im Atlas über diese Matrixgruppe bezeichnet. Bei den Ausnahmegruppen ist es so, dass sie direkt mit dem Buchstaben des Lie-Typs bezeichnet werden. Eine Ausnahme davon bilden die Gruppen vom Typ ${}^2B_2$ beziehungsweise ${}^2G_2$. Diese werden, nach ihren Entdeckern, auch Suzuki- beziehungsweise Ree-Gruppen genannt und im Atlas mit $\mathrm{Sz}(q^2)$ beziehungsweise $\mathrm{R}(q^2)$ bezeichnet. Die Gruppen vom Typ ${}^2F_4$ sind auch von Ree entdeckt worden und werden auch als Ree-Gruppen bezeichnet. Im Atlas werden sie jedoch mit ${}^2F_4(q^2)$ bezeichnet.

(6.2) GAP-Charaktertafeln endlicher Gruppen vom Lie-Typ — Mit der GAP-Funktion `CharacterTable(` *string* `)` lädt man eine Charaktertafel aus der Bibliothek. Das Argument ist eine Zeichenkette, die die Gruppe spezifiziert. Dabei ist es so, dass Indizes und Exponenten nicht tief- beziehungsweise hochgestellt werden. Um zum Beispiel die Charaktertafel der Gruppe $(A_1)_{\mathrm{ad}}(11) = \mathrm{PGL}_2(11)$ zu bekommen, übergibt man der obigen Funktion das Argument `"L2(11).2"`. Die Charaktertafel der Gruppe $({}^2E_6)_{\mathrm{ad}}(2)$ erhält man mit der Zeichenkette `"2E6(2).3"`.

Im folgenden sollen alle Charaktertafeln von endlichen Gruppen G^F vom Lie-Typ, für die G vom adjungierten Isogenietyp ist, und die in der GAP-Charaktertafel-Bibliothek Version 1.1.3 vorhanden sind, angegeben werden. Weil für kleine l die Dynkin-Diagramme einiger Typen gleich sind, beginnen die Serien ${}^2A_l$ und C_l mit $l = 2$, die Serie B_l beginnt mit $l = 3$ und die Serien ${}^2D_l$ und D_l beginnen mit $l = 4$. Die GAP-Charaktertafeln haben einen Namen, mit dem sie standardmäßig bezeichnet werden. Dieser Name wird im Folgenden angegeben. Außerdem sind diese Namen im Anhang A aufgeführt.

Typ A**.** Die Gruppe $(A_l)_{\mathrm{ad}}(q)$ ist isomorph zur projektiven linearen Gruppe $\mathrm{PGL}_{l+1}(q)$. Ist $l = 1$ so sind die Gruppen vorhanden, für die $q \in \{2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 13, 16, 17, 19, 23, 25, 27, 29, 31, 32, 49, 64\}$ gilt. Ist $q = 8$ oder $q \geq 11$, dann wird die Atlas-Charaktertafel dieser Gruppe mit $\mathrm{L}_2(q).d$ bezeichnet, wobei $d = 1$ für q gerade, und $d = 2$ für q ungerade gilt. Die anderen Bezeichnungen entnimmt man der folgenden Liste:

$$\begin{array}{rcl} (A_1)_{\mathrm{ad}}(2) & \cong & \mathrm{S}_3 \\ (A_1)_{\mathrm{ad}}(3) & \cong & \mathrm{S}_4 \\ (A_1)_{\mathrm{ad}}(4) & \cong & \mathrm{A}_5 \\ (A_1)_{\mathrm{ad}}(5) & \cong & \mathrm{A}_5.2 \\ (A_1)_{\mathrm{ad}}(7) & \cong & \mathrm{L}_3(2).2 \\ (A_1)_{\mathrm{ad}}(9) & \cong & \mathrm{A}_6.2_1 \end{array}$$

Zu $l = 1$ und ungeradem $q > 49$ gibt es noch weitere lineare Gruppen in der Bibliothek, für die man auch unipotente Charaktere betrachten kann. Diese sind einfach und werden mit $\mathrm{L}_2(q)$ bezeichnet.

Ist $l = 2$ so sind die Gruppen vorhanden, für die $q \in \{2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11\}$ gilt. Alle Gruppen werden mit $\mathrm{L}_3(q).d$ bezeichnet, wobei $d = (3, q - 1)$ ist.

Die Gruppe $\mathrm{L}_4(2)$ ist isomorph zu A_8. In der Charaktertafel-Bibliothek ist A_8 der Name für die endliche Gruppe vom Lie-Typ, zu $l = 3$ und $q = 2$. Außerdem sind für $l = 3$ noch die Gruppen $\mathrm{L}_4(3).2_1$ und $L_4(4)$ vorhanden.

Für $l \geq 4$ gibt es die Charaktertafeln zu den Gruppen $\mathrm{L}_5(2)$, $\mathrm{L}_5(3)$, $\mathrm{L}_6(2)$, $\mathrm{L}_7(2)$ und $\mathrm{L}_8(2)$.

Typ ^2A**.** Die Charaktertafel der Gruppe $(^2A_2)_{\mathrm{ad}}(2)$ ist nicht in der Bibliothek vorhanden. Diese Gruppe hat jedoch einen Normalteiler mit Index 3, nämlich das semidirekte Produkt aus $\mathrm{C}_3 \times \mathrm{C}_3$ und Q_8. Diese Gruppe ist isomorph zu $\mathrm{PSU}_3(2)$ und wird im Atlas mit $3^2 : \mathrm{Q}_8$ bezeichnet. Mit dem Befehl `CharacterTable("3^2:Q8")` erhält man die Charaktertafel. Wie in (2.9) beschrieben, macht es Sinn, für diese Charaktertafel die unipotenten Charaktere zu berechnen.

Ansonsten sind Gruppen diesen Typs für folgende l und q vorhanden. Für $l = 2$ und $q \in \{3, 4, 5, 7, 8, 9, 11\}$, für $l = 3$ und $q \in \{2, 3, 4, 5\}$, sowie für $l \in \{4, 5\}$ und $q = 2$.

Die entsprechenden Gruppen sind die projektiven unitären Gruppen $\mathrm{PGU}_{l+1}(q)$ und sie werden mit $\mathrm{U}_{l+1}(q).d$ bezeichnet. Dabei ist $d = (q + 1, l + 1)$.

Typ B**.** Für die Typen B_2 und C_2 erhält man das gleiche Dynkin-Diagramm und auch die Gruppen $(B_l)_{\mathrm{ad}}(2^k)$ und $(C_l)_{\mathrm{ad}}(2^k)$ sind isomorph. Die vorhandenen Charaktertafeln passen vom Namen her besser in die Reihe unter Typ C. Beim Typ B bleiben dann nur noch 2 Gruppen übrig, nämlich zu $l = 3$ und $q \in \{3, 5\}$. Diese Gruppen sind spezielle orthogonale Gruppen, nämlich $\mathrm{SO}_7(3)$ und $\mathrm{SO}_7(5)$, die mit $\mathrm{O}_7(3).2$ und $\mathrm{O}_7(5).2$ bezeichnet werden.

Typ C**.** Für $l = 2$ und $q \in \{2, 3, 4, 5, 7, 8\}$ gibt es eine Charaktertafel der zugehörigen endlichen Gruppe vom Lie-Typ in der Charaktertafel-Bibliothek. Diese Gruppen werden folgendermaßen bezeichnet: $\mathrm{A}_6.2_1$, $\mathrm{U}_4(2).2$, $\mathrm{S}_4(4)$, $\mathrm{S}_4(5).2$, $\mathrm{S}_4(7).2$ und $\mathrm{S}_4(8)$.

Weiterhin gibt es Charaktertafeln zu den Gruppen für $l = 3$ und $q \in \{2, 3, 4, 5\}$, $l = 4$ und $q \in \{2, 3\}$, sowie für $l \in \{5, 6\}$ und $q = 2$. Diese Gruppen werden mit $\mathrm{S}_{2l}(q).d$ bezeichnet, wobei $d = (2, q - 1)$ ist.

Bei den Gruppen $\mathrm{S}_{2l}(q).d$ handelt es sich um die projektiven konformen symplektischen Gruppen $\mathrm{PCSp}_{2l}(q)$, also um die konformen symplektischen Gruppen $\mathrm{CSp}_{2l}(q)$ modulo ihrem Zentrum. Diese bestehen aus den Isomorphismen Φ des zugrundeliegenden Vektorraumes, für die $(\Phi x, \Phi y) = \lambda(x, y)$ für alle Vektoren x und y gilt, wobei $(\cdot, \cdot)$ eine nicht ausgeartete alternierende Bilinearform und $\lambda \in \mathbb{F}_q$ eine von x und y unabhängige Konstante ist. Die Gruppe $\mathrm{S}_{2l}(q)$ ist eine einfache

Untergruppe vom Index höchstens 2 der symplektischen Gruppe $\mathrm{Sp}_{2l}(q)$. Die symplektischen Gruppen sind auch Gruppen vom Lie-Typ. Allerdings ist die zugehörige Gruppe G einfach zusammenhängend.

Typ D. Ist $l = 4$ und $q \in \{2, 3\}$ oder $l = 5$ und $q = 2$ dann gibt es eine Charaktertafel zur zugehörigen Gruppe in der Charaktertafel-Bibliothek. Diese werden mit $O_8^+(2)$, $O_8^+(3).(2^2)_{111}$ und $O_{10}^+(2)$ bezeichnet.

Typ ^2D. Hier findet man nur die beiden Gruppen $O_8^-(2)$ und $O_{10}^-(2)$, die zu $q = 2$ und $l = 4$ beziehungsweise $l = 5$ gehören.

Die Ausnahmetypen. Bei den meisten Ausnahmegruppen erkennt man an der Bezeichnung, von welchem Typ die Gruppe ist, und welchen Wert q hat. Deshalb werden hier nur die Namen der zugehörigen Gruppen genannt. Die vorhandenen Tafeln gehören zu den Gruppen $^3D_4(2)$, $E_6(2)$, $^2E_6(2)$, $F_4(2)$, $G_2(3)$, $G_2(4)$, $G_2(5)$, $\mathrm{Sz}(8)$, $\mathrm{Sz}(32)$, $\mathrm{R}(27)$, $^2F_4(2)'.2$ und $^2F_4(8)$. Die Gruppe vom Typ G_2 zu $q = 2$ ist isomorph zu $\mathrm{U}_3(3).2$, die Suzuki-Gruppe $\mathrm{Sz}(2)$ ist isomorph zum semidirekten Produkt $\mathrm{C}_5 \rtimes \mathrm{C}_4$ und die Ree-Gruppe $\mathrm{R}(3)$ ist isomorph zu $\mathrm{L}_2(8).3$. Die jeweiligen Charaktertafeln erhält man mit dem jeweils letzteren Namen.

§7 Beispiele

Anhand von Beispielen erkennt man, wie man vorgehen kann, um die unipotenten Charaktere einer endlichen Gruppe vom LIE-Typ zu parametrisieren. Die letzten drei Beispiele stellen die GAP-Funktionen vor, die dabei verwendet werden können.

(7.1) Ein einfaches Beispiel — Wir betrachten die Gruppe $G^F = \mathrm{PGL}_4(4)$ vom Typ A_3. In Atlas-Notation schreibt man $\mathrm{PGL}_4(4)$ als $L_4(4)$. Die unipotenten Charaktere stehen in Bijektion zu den irreduziblen Charakteren von $W(A_3) \cong \mathrm{S}_4$ und somit auch zu den Partitionen von 4. Zu jeder Partition von 4 rechnet man den Grad des zugehörigen unipotenten Charakters mit der entsprechenden Formel aus (5.1) aus. Die berechneten Grade sind in Tabelle 4 aufgeführt.

Partition	Grad des unipot. Char.
(4)	1
$(3,1)$	84
$(2,2)$	272
$(2,1,1)$	1344
$(1,1,1,1)$	4096

Tabelle 4: Grade unipotenter Charaktere in der Gruppe $\mathrm{PGL}_4(4)$

Schaut man nun auf die Charaktertafel, so sieht man, dass es zu jedem der berechneten Grade genau einen Charakter mit diesem Grad gibt. Dieser Charakter muss wegen der in §4 beschriebenen Bijektion unipotent sein.

(7.2) Serien unipotenter Charaktere — Betrachte die symplektische Gruppe $\mathrm{Sp}_{10}(2)$ vom Typ C_5 mit DYNKIN-Diagramm

$$5 - 4 - 3 - 2 \Leftarrow 1 \,.$$

Um nachher genau bestimmen zu können, welche Untergruppe bei der Anwendung des Satzes aus (2.6) verwendet wird, sind die Knoten im DYNKIN-Diagramm nummeriert. Man erhält zwei Serien unipotenter Charaktere, wobei die Hauptserie durch Symbole mit Defekt 1 parametrisiert wird und die Nebenserie durch Symbole mit Defekt 3. Die unipotenten Charaktere der Hauptserie stehen in Bijektion zu $\mathrm{Irr}(W(B_5))$, die der Nebenserie zu $\mathrm{Irr}(W(B_3))$. Wie in (5.6) beschrieben, bestimmt man also die Doppelpartition, das Symbol und den Grad eines unipotenten Charakters zu jedem der irreduziblen Charaktere der WEYL-Gruppen.

Diese Ergebnisse sind in Tabelle 5 dargestellt. Dabei sind die Zeilen, in denen die Parametrisierung allein mit der Gradformel gelingt, nicht aufgeführt. Die Zuordnung der Nummer in der ersten Spalte und die Benennung der Kandidaten in der letzten Spalte ist willkürlich. Folgende Tatsachen sind aus der Tabelle abzulesen:

(i) Es gibt zwei irreduzible Charaktere der $\mathrm{Sp}_{10}(2)$ mit Grad 1298528, von denen einer unipotent ist. Diese beiden Charaktere werden hier mit $\chi_{1,1}$ und $\chi_{1,2}$ bezeichnet (Zeile 1).

(ii) Jeweils zwei Charaktere in $\mathrm{Irr}(\mathrm{Sp}_{10}(2))$ haben den Grad 1855040, 231880 oder 11594. Jeweils beide Kandidaten sind unipotent und liegen in der Hauptserie. Entsprechend der Tabelle werden diese Charaktere hier mit $\chi_2, \ldots, \chi_7$ bezeichnet (Zeilen 2 bis 7).

Nr.	Doppelpartition	Symbol	Grad d. WEYLchar.	Grad d. unip. Char.	Kandidaten
1	$((2,1,1),(1))$	$\binom{1\ 2\ 4}{0\ 2}$	15	1298528	$\{\chi_{1,1},\chi_{1,2}\}$
2	$((1,1,1),(2))$	$\binom{1\ 2\ 3}{0\ 3}$	10	1855040	$\{\chi_2,\chi_3\}$
3	$((1),(2,2))$	$\binom{0\ 1\ 3}{2\ 3}$	10	1855040	$\{\chi_2,\chi_3\}$
4	$((2,2),(1))$	$\binom{2\ 3}{1}$	10	231880	$\{\chi_4,\chi_5\}$
5	$((1,1),(3))$	$\binom{1\ 2}{3}$	10	231880	$\{\chi_4,\chi_5\}$
6	$((3,2),(\ ))$	$\binom{2\ 4}{0}$	5	11594	$\{\chi_6,\chi_7\}$
7	$((1),(4))$	$\binom{0\ 2}{4}$	5	11594	$\{\chi_6,\chi_7\}$
8	$((2),(3))$	$\binom{0\ 3}{3}$	10	46376	$\{\chi_8,\chi_9\}$
9	$((1,1,1),())$	$\binom{1\ 2\ 3}{-}$	–	46376	$\{\chi_8,\chi_9\}$
10	$((1,1,1,1),(1))$	$\binom{1\ 2\ 3\ 4}{0\ 1\ 3}$	5	5936128	$\{\chi_{10},\chi_{11},\chi_{12}\}$
11	$((\ ),(2,2,1))$	$\binom{0\ 1\ 2\ 3}{1\ 3\ 4}$	5	5936128	$\{\chi_{10},\chi_{11},\chi_{12}\}$
12	$((1,1,1),(1,1))$	$\binom{1\ 2\ 3}{1\ 2}$	10	5936128	$\{\chi_{10},\chi_{11},\chi_{12}\}$

Tabelle 5: Grade unipotenter Charaktere in der Gruppe $\mathrm{Sp}_{10}(2)$

(iii) Zwei Charaktere in $\mathrm{Irr}(\mathrm{Sp}_{10}(2))$ haben den Grad 46376. Beide Kandidaten sind unipotent, aber nur einer liegt in der Hauptserie, was man am Defekt der Symbole erkennt. Diese beiden Charaktere werden mit χ_8 und χ_9 bezeichnet (Zeilen 8 und 9).

(iv) Drei Charaktere in $\mathrm{Irr}(\mathrm{Sp}_{10}(2))$ haben den Grad 5936128. Alle drei sind unipotent und liegen in der Hauptserie. Aber im Permutitions-Charakter $(1_{B^F})^{G^F}$ hat ein Kandidat eine andere Vielfachheit als die beiden anderen. Die drei Kandidaten werden mit χ_{10}, χ_{11} und χ_{12} bezeichnet (Zeilen 10 bis 12).

Welcher Kandidat welchem Symbol zugeordnet wird, ist in diesen Fällen noch nicht klar.

Als nächstes versucht man den Permutations-Charakter $(1_{B^F})^{G^F}$ zu berechnen. Dabei geht man folgendermaßen vor:

Die unipotenten Charaktere, die bereits mit der Gradformel ihrem Symbol zugeordnet werden konnten, werden mit der entsprechenden Vielfachheit, also dem Grad des zugehörigen irreduziblen Charakters der WEYL-Gruppe, aufsummiert. Außerdem addiert man die Charaktere χ_2 bis χ_7 mit entsprechender Vielfachheit. Weiterhin addiert man entweder den Charakter $\chi_{1,1}$ oder den Charakter $\chi_{1,2}$ mit Vielfachheit 15 und entweder den Charakter χ_8 oder den Charakter χ_9 mit Vielfachheit 10. Schließlich addiert man zwei der Charaktere χ_{10}, χ_{11} und χ_{12} mit Vielfachheit 5 und den dritten mit Vielfachheit 10.

So erhält man einen Charakter der Form

$$\vartheta = \sum_{\phi\in\mathrm{Irr}(W)} \phi(1)\chi_\phi,$$

wobei χ_ϕ ein Kandidat für einen unipotenten Charakter ist. Den Charakter ϑ überprüft man daraufhin, ob es sich um eine Permutations-Charakter handeln kann.

Dieses Vorgehen wiederholt man, wobei man eine andere Kombination der Kandidaten für die Symbole in den Zeilen 1, 8, 10, 11 und 12 verwendet. Da es für die Symbole in den Zeilen 1 und 8 jeweils zwei Möglichkeiten und für die Symbole in den Zeilen 10 bis 12 drei Möglichkeiten gibt, erhält man zwölf Charaktere der Form ϑ. Nur einer dieser zwölf Charaktere erfüllt die Bedingung (ii) aus (5.2). Deshalb ist dieser Charakter genau der Permutations-Charakter $(1_{B^F})^{G^F}$. Also weiß man jetzt, welcher Kandidat zum Symbol $\binom{1\,2\,4}{0\,2}$ in Zeile 1 gehört und welcher nicht unipotent ist. Des weiteren weiß man, welcher Kandidat zum Symbol $\binom{0\,3}{3}$ in Zeile 8 gehört und welcher nicht in der Hauptserie liegt. Schließlich hat man auch den unipotenten Charakter zum Symbol $\binom{1\,2\,3}{1\,2}$ in Zeile 12 gefunden.

Sei χ_{12} der Charakter zum Symbol $\binom{1\,2\,3}{1\,2}$. Zu den Symbolen in den Zeilen 2 bis 7 sowie 10 und 11 hat man die Zuordnung der Kandidaten noch nicht bestimmen können. Ähnlich wie oben berechnet man jetzt Charaktere

$$\vartheta = \sum_{\phi \in \mathrm{Irr}(W)} (\phi, (1_{W_J})^W)\chi_\phi.$$

Als Teilmenge $J \subset \{1, \ldots, 5\}$ definiert man $J = \{1, 4\}$. Für diese Teilmenge unterscheiden sich die Vielfachheiten der jeweiligen unipotenten Charaktere im Permutations-Charakter $(1_{P_J{}^F})^{G^F}$. Probiert man alle $2^4 = 16$ möglichen Zuordnungen von Kandidaten zu Symbolen durch, so stellt man fest, dass nur für eine Zuordnung der berechnete Charakter ϑ ein Permutations-Charakter sein kann. Für diese Zuordnung ist ϑ ein Permutations-Charakter und man hat die unipotenten Charaktere vollständig durch Symbole parametrisiert.

(7.3) Ein Beispiel ohne eindeutige Bijektion — Betrachte die Gruppe $G^F = \mathrm{O}_8^+(2)$ vom Typ D_4. Tabelle 6 enthält die Informationen, die man aus den Bijektionen zu den WEYL-Gruppen sowie aus der Gradformel für diesen Typ erhält. Die unipotenten Charaktere der Hauptserie stehen in Bijektion zu den irreduziblen Charakteren der WEYL-Gruppe $W(D_4)$. Diese werden durch 13 Doppelpartitionen parametrisiert, wobei die Doppelpartitionen $((1,1),(1,1))$ und $((2),(2))$ je zweimal vorkommen (vgl. (4.5) und (3.4)). Die einzige Nebenserie enthält nur den kuspidalen unipotenten Charakter. Diese Serie steht in Bijektion zum irreduziblen Charakter der WEYL-Gruppe $W(B_0) \cong \{1\}$. Die einzige Doppelpartition zu 0 ist $((),())$. Die Nummerierung in der ersten Spalte der Tabelle deutet die Zugehörigkeit zu den beiden Serien an, die zweite Stelle ist willkürlich.

In der fünften Zeile sieht man, dass es zum Symbol $\binom{1\,2}{0\,3}$ vier Kandidaten gibt, wovon aber nur einer unipotent sein kann. In den Zeilen 1, 2 und 7, sowie in den Zeilen 8, 9 und 12 hat man jeweils drei Kandidaten, die alle unipotent sind. Das liegt daran, dass man für die zugehörigen Symbole jeweils den gleichen Grad ausrechnet. Die drei Kandidaten zum Symbol $\binom{1\,2}{0\,3}$, die nicht unipotent sind, findet man heraus, wenn man versucht den Charakter $(1_{B^F})^{G^F}$ zu berechnen. Nur einer der Kandidaten eingesetzt in die Formel

$$\vartheta = \sum_{\phi \in \mathrm{Irr}(W)} \phi(1)\chi_\phi$$

liefert einen Charakter ϑ, der ein Permutations-Charakter sein kann. Deshalb ist dieser Kandidat unipotent.

Da die unipotenten Charaktere zu den Symbolen in den Zeilen 1, 2 und 7, sowie 8, 9 und 12 mit gleicher Vielfachheit im Permutations-Charakter $(1_{B^F})^{G^F}$ vorkommen, sind weitere Betrachtungen notwendig.

Betrachte das DYNKIN-Diagramm dieser Gruppe.

$$\begin{array}{ccc} & & 1 \\ & & / \\ 4 - 3 & & \\ & & \backslash \\ & & 2 \end{array}$$

Nr.	Doppelpartition	Symbol	Grad d. WEYLchar.	Grad d. unip. Char.	# Kandidaten
1.1	$((1,1)(1,1))$	$\binom{1\,2}{1\,2}$	3	1344	3
1.2	$((1,1)(1,1))$	$\binom{1\,2}{1\,2}$	3	1344	3
1.3	$((1)(1,1,1))$	$\binom{0\,1\,3}{1\,2\,3}$	4	3200	1
1.4	$(()(1,1,1,1))$	$\binom{0\,1\,2\,3}{1\,2\,3\,4}$	1	4096	1
1.5	$((1,1)(2))$	$\binom{1\,2}{0\,3}$	6	700	4
1.6	$((1)(2,1))$	$\binom{0\,2}{1\,3}$	8	972	1
1.7	$(()(2,1,1))$	$\binom{0\,1\,2}{1\,2\,4}$	3	1344	3
1.8	$((2)(2))$	$\binom{2}{2}$	3	84	3
1.9	$((2)(2))$	$\binom{2}{2}$	3	84	3
1.10	$(()(2,2))$	$\binom{0\,1}{2\,3}$	2	300	1
1.11	$((1)(3))$	$\binom{1}{3}$	4	50	1
1.12	$(()(3,1))$	$\binom{0\,1}{1\,4}$	3	84	3
1.13	$(()(4))$	$\binom{0}{4}$	1	1	1
2.1	$(()())$	$\binom{0\,1\,2\,3}{-}$	–	28	1

Tabelle 6: Informationen zu den unipotenten Charakteren der Gruppe $\mathrm{O}_8^+(2)$

Wie in (7.2) betrachten wir nun Teilmengen der Menge $I = \{1,2,3,4\}$, um die Parametrisierung zu vervollständigen. Dabei bildet die leere Menge den Spezialfall des Satzes aus (2.6), den wir gerade betrachtet haben. Sei zum Beispiel $J = \{j\}$ eine einelementige Teilmenge von I. Dann kommen die drei irreduziblen Charaktere der WEYL-Gruppe, die in Bijektion zu den Symbolen in den Zeilen 1, 2 und 7 stehen mit gleicher Vielfachheit im Charakter $(1_{W_{\{j\}}})^W$ vor. Das gleiche gilt für die irreduziblen Charaktere der WEYL-Gruppe zu den Symbolen in den Zeilen 8, 9 und 12. Es ist in diesem Fall egal, welche Zuordnung von Kandidaten zu den Symbolen man wählt, der Charakter

$$\vartheta = \sum_{\phi \in \mathrm{Irr}(W)} (\phi, (1_{W_J})^W)\chi_\phi$$

ist für jede Zuordnung gleich. Mit solchen Teilmengen erhält man also keine weiteren Informationen über die Parametrisierung. Das gleiche passiert für Teilmengen $J = \{3, j\}$, für $J = \{1,2,4\}$ und für $J = I$.

Sei nun $J = \{i, j\} \subset I$ mit $i \neq 3$, $j \neq 3$ und $i \neq j$. Geht man alle 36 möglichen Zuordnungen der Kandidaten zu den Symbolen durch, so erhält man für zwölf Möglichkeiten einen potentiellen Permutations-Charakter. Und zwar kann man die Zuordnung für eines der Tripel wählen, aber für das andere Tripel ist dann der Kandidat für ein Symbol festgelegt, je nachdem welche der drei Teilmengen J mit den obigen Eigenschaften man gewählt hat. Betrachtet man eine andere Teilmenge J mit diesen Eigenschaften, dann ist, nachdem man das erste Tripel von Kandidaten den Symbolen zugeordnet hat, die Zuordnung eines anderen Symbols des zweiten Tripels festgelegt. Durch die dritte dieser Teilmengen wird das letzte Symbol des zweiten Tripels festgelegt. Insgesamt kann man also die Zuordnung der Kandidaten zu den Symbolen eines Tripels wählen, wodurch dann die Zuordnung des anderen Kandidatentripels zu den Symbolen festgelegt ist. Die Parametrisierung der unipotenten Charaktere ist in diesem Fall also nicht eindeutig (vgl. (4.17)).

(7.4) Fast-Charaktere — In diesem Beispiel betrachten wir die symplektische Gruppe $\mathrm{Sp}_{12}(2)$ vom Typ C_6. Diese hat 86 unipotente Charaktere, wovon 66 in der Hauptserie liegen. Von den 20 Charakteren der Nebenserien identifiziert man 16 über den Grad mit Hilfe der Gradformel aus (5.1). Allerdings berechnet man mit dieser Formel für die Symbole $\binom{1\,2\,3\,4}{0}$ und $\binom{0\,1\,2\,3}{4}$, sowie für $\binom{0\,1\,2\,4}{3}$ und $\binom{0\,2\,3\,4}{1}$ jeweils den gleichen Grad.

Um hier die richtige Zuordnung zu finden, benötigt man die Einteilung der unipotenten Charaktere in Familien. Wie in (4.4) beziehungsweise (4.3) beschrieben, liegen zwei unipotente Charaktere in einer Familie, wenn die zugehörigen Symbole die gleichen Einträge mit gleicher Vielfachheit haben. In diesem Fall liegen alle unipotenten Charaktere zu diesen Symbolen in einer Familie $\mathbf{F}$. Die Familie $\mathbf{F}$ enthält 16 unipotente Charaktere, wovon 5 nicht in der Hauptserie sind. Mit Hilfe der FOURIER-Transformationsmatrix (siehe (2.7)) versucht man Fast-Charaktere $R_{(y,\tau)}$ zu berechnen. Seien $\chi_{(x,\sigma)}$ und $\chi_{(x',\sigma')}$ zwei Charaktere, die man nicht unterscheiden kann. Dann sollte der Fast-Charakter $\chi_{(y,\tau)}$, den man berechnen will, so gewählt werden, dass sich die Werte $\{(x,\sigma),(y,\tau)\}$ und $\{(x',\sigma'),(y,\tau)\}$ in der FOURIER-Transformationsmatrix unterscheiden. Geht man die möglichen Zuordnungen von Kandidaten zu Symbolen durch, dann gilt nur für eine Zuordnung, dass der berechnete Charakter auf allen halbeinfachen Konjugiertenklassen verschwindet. Nur für diese Zuordnung handelt es sich also tatsächlich um einen Fast-Charakter. Um das andere Paar von unipotenten Charakteren zu parametrisieren, geht man analog vor.

(7.5) Parametrisierung unipotenter Charaktere der $\mathbf{PGU}_6(2)$ — In diesem Beispiel wird verdeutlicht, wie man aus den Partitionen von $l+1=6$ die Vielfachheiten der zugehörigen Charaktere im Permutations-Charakter $(1_{B^F})^{G^F}$ berechnet. Um die Ergebnisse aus Tabelle 7 zu erhalten, benötigt man nur die Definitionen aus (3.1).

λ	X	λ_∞	μ_0	μ_1	(λ_0,λ_1)
(6)	$\{6\}$	$()$	(3)	$()$	$((3),())$
$(5,1)$	$\{1,6\}$	$()$	(3)	$()$	$((),(3))$
$(4,2)$	$\{2,5\}$	$()$	(1)	(2)	$((2),(1))$
$(4,1,1)$	$\{1,2,6\}$	$()$	$(2,1)$	$()$	$((2,1),())$
$(3,3)$	$\{3,4\}$	$()$	(2)	(1)	$((1),(2))$
$(3,2,1)$	$\{1,3,5\}$	$(3,2,1)$	$()$	$()$	$((),())$
$(3,1,1,1)$	$\{1,2,3,6\}$	$()$	$(2,1)$	$()$	$((),(2,1))$
$(2,2,2)$	$\{2,3,4\}$	$()$	$(1,1)$	(1)	$((1,1),(1))$
$(2,2,1,1)$	$\{1,2,4,5\}$	$()$	$(1,1)$	(1)	$((1),(1,1))$
$(2,1,1,1,1)$	$\{1,2,3,4,6\}$	$()$	$(1,1,1)$	$()$	$((1,1,1),())$
$(1,1,1,1,1,1)$	$\{1,2,3,4,5,6\}$	$()$	$(1,1,1)$	$()$	$((),(1,1,1))$

Tabelle 7: Bijektion zwischen Partitionen von 6 und Doppelpartitionen

Die Partition $(3,2,1)$ parametrisiert den einzigen Charakter der Nebenserie. Für die anderen Partitionen ist der 2-Kern die leere Partition $()$ und $g(\lambda)=3$. Es gilt $|()|=0=\frac{1}{2}d(d+1)$ mit $d=0$. Nach (5.4) wird der unipotente Charakter der Hauptserie zur Partition λ auch durch die Doppelpartition $(\alpha,\beta)=(\lambda_0,\lambda_1)$ parametrisiert. Diese Doppelpartition parametrisiert einen irreduziblen Charakter von $W(B_3)$. Damit kennt man auch die Vielfachheiten der unipotenten Charaktere im Charakter $(1_{B^F})^{G^F}$, die benötigt werden um den Satz aus (2.6) anzuwenden.

(7.6) GAP-Beispiel - Parametrisierung der Hauptserie — Dieses Beispiel stellt dar, welche GAP-Funktionen verwendet werden können, um die in §5 auf theoretischer Ebene dargestellten Hilfsmittel an GAP-Charaktertafeln und GAP-Charakteren anzuwenden. Dies soll hier anhand der Gruppe $O_7(5).2 = (B_3)_{\text{ad}}(5)$ geschehen. Wie in §4 erklärt, stehen die unipotenten Charaktere der Hauptserie der Gruppen vom Typ B_3 in Bijektion zu den zehn irreduziblen Charakteren der WEYL-Gruppe $W(B_3)$. Es gibt eine Nebenserie mit zwei unipotenten Charakteren, parametrisiert durch die irreduziblen Charaktere der WEYL-Gruppe $W(B_1)$. Um die Ergebnisse übersichtlich speichern und abrufen zu können, ist eine Liste mit zwölf Einträgen sinnvoll, ein Eintrag für jeden unipotenten Charakter. Ein Eintrag könnte zum Beispiel die Form eines Records haben. Dieser wiederum sollte folgende Informationen speichern:

(i) Eine laufende Nummer zur einfachen Bezeichnung.

(ii) Die Serie, zu der der unipotente Charakter gehört, insbesondere, ob es sich um einen Charakter der Hauptserie handelt.

(iii) Das Symbol, mit dem dieser unipotente Charakter parametrisiert wird, und die Doppelpartition, mit der der entsprechende Charakter der WEYL-Gruppe parametrisiert wird.

(iv) Den Grad, den der unipotente Charakter hat.

(v) Den Grad des zugehörigen irreduziblen Charakters der WEYL-Gruppe.

(vi) Die Menge der Kandidaten als Liste von irreduziblen Charakteren.

(vii) Informationen darüber, welche unipotenen Charaktere den gleichen Grad haben.

(viii) Eine Zahl, die angibt, welcher der Kandidaten der unipotente Charakter zu diesem Symbol ist.

Einige dieser Informationen sind nicht nötig, um die gewünschten Resultate zu berechnen, aber sie machen es leichter, die einzelnen Schritte nachzuvollziehen. Die Doppelpartitionen und die Nummer der Serie bräuchten zum Beispiel nicht gespeichert zu werden, weil diese Informationen auch aus dem Symbol gewonnen werden können. Der Grad des zugehörigen irreduziblen Charakters der WEYL-Gruppe muss, wie man gleich sieht, vorher ausgerechnet werden. Mit folgenden Funktionen berechnet man die Charaktertafel der WEYL-Gruppe $W(B_3)$ und die zugehörigen Doppelpartitionen. Außerdem brauchen wir eine leere Liste, die dann mit den obigen Informationen gefüllt werden soll.

```
lst:= [ ];
tbl:= CharacterTable("WeylB", 3);
param:= CharacterParameters(tbl);
```

Dabei gehört der i-te Eintrag der Liste `param` zum i-ten irreduziblen Charakter in der Charaktertafel `tbl`. In der Liste `param` sind sogar mehr Informationen als man benötigt. Die Einträge der Liste `param` sind wieder Listen, wovon der zweite Eintrag die entsprechende Doppelpartition ist.

Mit der folgenden Schleife füllt man die Liste bestehend aus Records mit den ersten Informationen.

```
for i in [1 .. Length(param)] do
  Add(lst, rec(
    nr:= i,
    series:= 1,
    doublepartition:= param[i][2],
    symbol:= SymbolPartitionTuple(param[i][2], 1),
    degree:= DegreeOfUnipotentCharacter
      (SymbolPartitionTuple(param[i][2], 1), 5),
    weyldegree:= Irr(tbl)[i][1],
```

```
    candidates:= [],
    related:= [],
    unipotchar:= 1)
  );
od;
```

Die Komponente `unipotchar` des Records soll angeben, welcher der Kandidaten der unipotente Charakter zum zugehörigen Symbol ist. Dieser Wert wird hier einfach mit 1 initialisiert.

Die Funktion `SymbolPartitionTuple` berechnet ein Symbol aus einer Doppelpartition (erstes Argument) mit einem bestimmten Defekt (zweites Argument). Diese Funktion ist verfügbar,wenn man das GAP-Paket CHEVIE, siehe [GHL+96], geladen hat. Natürlich kann man eine solche Funktion auch anhand von (3.3) selbst implementieren. In dieser ersten Schleife (für die Hauptserie) sollen die Symbole den Defekt 1 haben.

Die Funktion `DegreeOfUnipotentCharacter` berechnet nach einer der Gradformeln (5.1) aus einem Symbol und der Zahl q den Grad, den der dem Symbol zugeordnete unipotente Charakter hat. Diese Funktion ist nicht in einem Paket implementiert. Aber aus Gründen der Übersichtlichkeit sollte man die Implementierung der Gradformel in eine gesonderte Funktion auslagern.

Die beiden Nebenseriencharaktere kann man mit einer ähnlichen Schleife an die Liste anfügen. Dazu muss man nur die Charaktertafel und die zugehörigen Parameter der WEYL-Gruppe $W(B_1)$ berechnen und in der Funktion, die die Symbole berechnet, jeweils den Defekt 3 benutzen.

Mit den folgenden Schleifen belegt man die Komponenten `candidates` und `related`.

```
tbl:=CharacterTable("O7(5).2");
for i in [1 .. Length(lst)] do
  for chi in Irr(tbl) do
    if lst[i].degree = chi[1] then
      Add(lst[i].candidates, chi);
    fi;
  od;
  for j in [1 .. Length(lst)] do
    if lst[i].degree = lst[j].degree then
      Add(lst[i].related, j);
    fi;
  od;
od;
```

Führt man die obigen Befehle aus und schaut sich die Liste `lst` an, so sieht man anhand der Recordkomponente `related`, dass in dieser Gruppe die Grade unipotenter Charaktere paarweise verschieden sind. Das heißt, dass man zu unterschiedlichen Symbolen unterschiedliche Grade berechnet. Aber zu jedem dieser Grade gibt es zwei Kandidaten für den zugehörigen unipotenten Charakter der Gruppe $O_7(5).2$. In der Hauptserie geht man gemäß (5.3) vor und findet so heraus, welcher der jeweils zwei Kandidaten der unipotente Charakter ist.

```
for tup in Tuples([1, 2], 10) do
  theta:=Sum([1 .. 10], j ->
    lst[j].weyldegree * lst[j].candidates[tup[j]]);
  if PossiblePermChar(theta) then Display(tup); fi;
od;
```

Die Funktion `Tuples` liefert eine Liste mit allen geordneten Tupeln aus der Menge $\{1, 2\}$ der Länge 10. Der nächste Befehl summiert dann jeweils 10 Kandidaten mit der entsprechenden Vielfachheit auf. Die Funktion `PossiblePermChar` ist nicht in GAP enthalten. Sie soll lediglich überprüfen, ob die Klassenfunktion, die als Argument übergeben wird, ein Permutations-Charakter sein kann. Eine solche Funktion sollte einige der Bedingungen von (5.2) überprüfen und entsprechend `true` oder `false` ausgeben. In GAP kann man diese Bedingungen mit den Funktionen `TestPerm`N, $N \in \{1, \ldots, 5\}$ überprüfen. Siehe dazu auch den Abschnitt "Computing Possible Permutation Characters" im GAP 4 Reference Manual [GAP04] Kapitel "Class Functions".

Lässt man diese Schleife über die 1024 Tupel laufen, dann ist bei genau einem Tupel der Charakter ϑ ein Charakter mit ausschließlich ganzzahligen und nicht negativen Werten. Für die Hauptserie hat man also die Zuordnung gefunden. Für die ersten zehn Elemente der Liste `lst` kann man also die Komponente `unipotchar` richtig setzen.

Wie man die Zuordnung in der Nebenserie findet, wird in (7.8) behandelt. Zunächst kümmern wir uns noch einmal um die Parametrisierung in der Hauptserie, und zwar um den Fall, wenn man zu zwei Labeln den gleichen Grad für den unipotenten Charakter und den gleichen Grad für den zugehörigen irreduziblen Charakter der Weyl-Gruppe ausrechnet.

(7.7) Parabolische Untergruppen in GAP — Hier soll verdeutlicht werden, welche Funktionen benutzt werden müssen, wenn man zu parabolischen Untergruppen übergehen muss. Als Beispiel dient die Gruppe $F_4(2)$. Außerdem sieht man dann auch ein GAP-Beispiel mit einer Ausnahmegruppe.

Wieder sollen alle wichtigen Informationen in einer Liste bestehend aus Records gespeichert werden. Allerdings hat man in den Ausnahmegruppen keine Parametrisierung durch Partitionen oder Symbole. An diese Stelle tritt einfach eine Zeichenkette, die das Label enthält, mit denen die unipotenten Charaktere der Gruppe und die irreduziblen Charaktere der Weyl-Gruppe parametrisiert werden.

Des weiteren kann man die Grade der unipotenten Charaktere in diesen Gruppen nicht mit einer Formel ausrechen. Statt dessen muss man die Grade einzeln ausrechnen und eingeben. Eine Liste der entsprechenden Polynome findet man in Tabelle 34 im Anhang B, die aus [Car85] Abschnitt 13.9. entnommen ist.

Wenn man so vorgeht wie im letzten Beispiel, ist es kein Problem, die Ergebnisse der Tabelle 8 und auch eine Liste von Kandidaten zu jedem Label auszurechnen.

Von den 37 Charakteren sind nur die 25 Charaktere der Hauptserie aufgeführt, weil das weitere Vorgehen nur in der Hauptserie zu Ergebnissen führt. In den Nebenserien sind aber auch drei Paare von Labeln, die zum gleichen Grad führen.

Wie in §4 gesagt wurde, werden die unipotenten Charaktere der Hauptserie durch die Charaktere $\phi_{d,e}$ der Weyl-Gruppe $W(F_4)$ parametrisiert. Die Zahl d gibt dabei den Grad des zugehörigen Charakters der Weyl-Gruppe an. In der Tabelle ist also abzulesen, dass man mit der speziellen Formel des Satzes aus (2.6), die im letzten Beispiel benutzt wurde, nur bei den Nummern 11 und 12 weiterkommt. Für diese findet man heraus, welche beiden der vier Kandidaten nicht unipotent sind. Mehr findet man mit der speziellen Formel nicht heraus, weil dort ja nur der Grad der irreduziblen Charaktere der Weyl-Gruppe eingeht, und dieser ist für die jeweiligen Paare gleich.

Also verwendet man hier die allgemeine Formel und rechnet damit folgende Charaktere aus:

$$\vartheta = \sum_{\phi \in \mathrm{Irr}(W)} (\phi, (1_{W_J})^W) \chi_\phi.$$

Dabei setzt man für χ_ϕ Kandidaten für unipotente Charaktere ein. Bei der richtigen

Nr.	Label	Grad	# Kandidaten	Nummern mit gleichem Grad
1	$\phi_{1,0}$	1	1	1
2	$\phi''_{1,12}$	99450	2	2, 3
3	$\phi'_{1,12}$	99450	2	2, 3
4	$\phi_{1,24}$	16777216	1	4
5	$\phi''_{2,4}$	1105	2	5, 7
6	$\phi'_{2,16}$	4526080	2	6, 8
7	$\phi'_{2,4}$	1105	2	5, 7
8	$\phi''_{2,16}$	4526080	2	6, 8
9	$\phi_{4,8}$	322218	1	9
10	$\phi_{9,2}$	22932	1	10
11	$\phi''_{9,6}$	541450	4	11, 12
12	$\phi'_{9,6}$	541450	4	11, 12
13	$\phi_{9,10}$	5870592	1	13
14	$\phi'_{6,6}$	519792	1	14
15	$\phi''_{6,6}$	249900	1	15
16	$\phi_{12,4}$	584766	1	16
17	$\phi_{4,1}$	1377	1	17
18	$\phi''_{4,7}$	358020	2	18, 19
19	$\phi'_{4,7}$	358020	2	18, 19
20	$\phi_{4,13}$	5640192	1	20
21	$\phi''_{8,3}$	44200	2	21, 23
22	$\phi'_{8,9}$	2828800	2	22, 24
23	$\phi'_{8,3}$	44200	2	21, 23
24	$\phi''_{8,9}$	2828800	2	22, 24
25	$\phi_{16,5}$	947700	1	25

Tabelle 8: Grade unipotenter Charaktere der Hauptserie in der Gruppe $F4(2)$.

Kombination von Kandidaten ist der Charakter ϑ für jede Teilmenge $J \subset \{1,2,3,4\}$ ein Permutations-Charakter.

Mit den folgenden Funktionen des GAP-Pakets CHEVIE, siehe [GHL+96], erhält man die Werte $(\phi, (1_{W_{\{4\}}})^W)$:

```
f4:= CoxeterGroupByReflectionDatum("F", 4);
u:= ReflectionSubgroupByPositions(f4, [4]);
it:= InductionTable(u,f4);
```

Mit der Funktion `CoxeterGroupByReflectionDatum( X, l )` erzeugt man eine WEYL-Gruppe zu einer linearen algebraischen Gruppe vom Typ X_l. Die Funktion `ReflectionSubgroupByPositions` hat zwei Argumente. Das erste bestimmt die COXETER-Gruppe, von der eine Untergruppe gebildet werden soll, und das zweite Argument ist eine Liste von natürlichen Zahlen. Diese Liste bestimmt eine Menge von Knoten im DYNKIN-Diagramm und entsprechend wird die Untergruppe gebildet. Das DYNKIN-Diagramm einer solchen Gruppe kann man sich mit dem Befehl `PrintDiagram` anschauen. Dabei werden die Knoten entsprechend nummeriert. Die Funktion `InductionTable` benötigt als Eingabe eine COXETER-Gruppe (2. Argument) und eine Untergruppe davon.

Die hier gewählte Untergruppe, die nur durch den Knoten Nummer 4 erzeugt wird, ist vom Typ A_1. Tabelle 9 zeigt die Ausgabe von `Display(it)`.

In der Kopfzeile dieser Tabelle sind die irreduziblen Charaktere der WEYL-Gruppe $W(A_1)$ durch die zugehörigen Partitionen parametrisiert. Dabei gehört die Partition (2) zum 1-Charakter. Also stehen die gesuchten Werte in der letzten Spal-

```
Induction table from ~A1.T3 to F4
            | 11 2

-------------------
phi{1,0}     |  . 1
phi{1,12}''  |  1 .
phi{1,12}'   |  . 1
phi{1,24}    |  1 .
phi{2,4}''   |  1 1
phi{2,16}'   |  1 1
phi{2,4}'    |  . 2
phi{2,16}''  |  2 .
phi{4,8}     |  2 2
phi{9,2}     |  3 6
phi{9,6}''   |  6 3
phi{9,6}'    |  3 6
phi{9,10}    |  6 3
phi{6,6}'    |  3 3
phi{6,6}''   |  3 3
phi{12,4}    |  6 6
phi{4,1}     |  1 3
phi{4,7}''   |  3 1
phi{4,7}'    |  1 3
phi{4,13}    |  3 1
phi{8,3}''   |  4 4
phi{8,9}'    |  4 4
phi{8,3}'    |  2 6
phi{8,9}''   |  6 2
phi{16,5}    |  8 8
```

Tabelle 9: Die Vielfachheiten der irreduziblen Charaktere von $W(F_4)$ im Permutations-Charakter $(1_{W_J})^W$ für $J = \{4\}$.

te. Bei den Paaren von unipotenten Charakteren, die man vorher nicht unterscheiden konnte, sind diese Werte unterschiedlich. Bildet man jetzt wieder alle möglichen Zuordnungen der Kandidaten, so stellt man fest, dass es zwei Möglichkeiten gibt, so dass der Charakter ϑ nur nicht negative ganzzahlige Werte besitzt. Es ist so, dass man für ein Paar die Zuordnung wählen kann und dadurch dann die Zuordnung der anderen Paare festgelegt ist. Diese Wahlmöglichkeit ergibt sich durch den Automorphismus der auch zur Ree-Gruppe ${}^2F_4$ führt, und der die Charaktere $\phi'_{d,e}$ und $\phi''_{d,e}$ jeweils vertauscht (vgl. (4.17)).

(7.8) Berechnung von Fast-Charakteren in GAP — Wir kehren zum Beispiel (7.6) zurück und kümmern uns jetzt um die Nebenserie. Hier verwendet man Fast-Charaktere, um die Parametrisierung zu vervollständigen. Dabei geht man so vor, wie es in (2.7) und (5.5) beschrieben wurde.

Die beiden Symbole mit Defekt drei, $\binom{0\,1\,3}{-}$ und $\binom{0\,1\,2\,3}{1}$, liegen in zwei verschiedenen Familien. Wir betrachten nur die Familie die das Symbol $\binom{0\,1\,3}{-}$ enthält, denn für das andere Symbol verläuft die Parametrisierung analog. Wir wissen, dass in den anderen Symbolen dieser Familie die gleichen Zahlen mit gleicher Vielfachheit vorkommen. Zunächst benötigen wir die Fourier-Transformationsmatrix zu den Symbolen der Familie. Dabei ist es wichtig, eine feste Reihenfolge der Symbole zu wählen. Hier nehmen wir die folgende Reihenfolge:

$$\binom{0\,3}{1}, \binom{1\,3}{0}, \binom{0\,1}{3}, \binom{0\,1\,3}{-}.$$

Die FOURIER-Transformationsmatrix ist dann:

```
fourier:=
1/2*[ [ 1,  1,  1,  1 ],
      [ 1,  1, -1, -1 ],
      [ 1, -1,  1, -1 ],
      [ 1, -1, -1,  1 ] ];
```

Es ist sinnvoll, die Indizes dieser Symbole in der Liste `lst` in einer eigenen Liste in richtiger Reihenfolge zu speichern:

```
family:= [ 7, 5, 10, 11 ];
```

Mit folgenden Befehlen berechnet man den Fast-Charakter $R_{(y,\tau)}$, der zum Symbol $\binom{0\,1\,3}{-}$ gehört:

```
R_y_tau:= Sum([1 .. 4],
  i -> fourier[4][i]
     * lst[family[i]].candidates[lst[family[i]].unipotchar]);
```

Diese Klassenfunktion wird nun daraufhin überprüft, ob sie auf allen halbeinfachen Klassen verschwindet. Eine halbeinfache Klasse erkennt man daran, dass die Ordnung eines Klassenvertreters nicht durch p teilbar ist, wobei p die Charakteristik des Körpers ist, dem die Gruppe zugrunde liegt. Die Ordnungen der Klassenvertreter erhält man in GAP über das Attribut `OrdersClassRepresentatives`. Als nächstes setzt man:

```
lst[11].unipotchar:= 2;
```

und führt dann die Berechnung von $R_{(y,\tau)}$ ein zweites mal durch, wobei jetzt der zweite Kandidat verwendet wird. Erneut überprüft man, ob die Klassenfunktion auf halbeinfachen Konjugiertenklassen verschwindet. Hier ist es so, dass nur für einen der beiden Kandidaten die berechnete Klassenfunktion ein Fast-Charakter sein kann. Also hat man die unipotenten Charaktere vollständig durch Symbole parametrisiert.

§8 Ergebnisse

Die hier betrachteten Ergebnisse beziehen sich auf die GAP-Version 4.4.2 mit der Charaktertafel-Bibliothek CTblLib Version 1.1.3 (siehe [GAP04] und [Bre04]). In den meisten Fällen werden die unipotenten Charaktere für die Gruppen G^F bestimmt, für die die zugehörige Gruppe G adjungiert ist. Die unipotenten Charaktere der anderen Gruppen können daraus berechnet werden (vgl. (2.8)).

Im Anhang B findet man eine Tabelle mit den Graden unipotenter Charaktere.

(8.1) Typ A_l — Wir betrachten die Charaktertafeln der projektiven linearen Gruppen, die in der Bibliothek gespeichert sind. Sei also $G^F = \mathrm{PGL}_{l+1}(q)$, dann berechnet man aus den Partitionen von $l+1$ die zugehörigen Grade mit der Gradformel aus (5.1). Für nicht einfache Gruppen, das heißt wenn $(q-1, l+1) \neq 1$ ist, gibt es mehrere Kandidaten für eine Partition. In diesen Fällen verwendet man das Kriterium für die Hauptserie unipotenter Charaktere aus (5.3). Allerdings kommt man nicht immer damit aus, die berechneten Linearkombinationen von Charakteren nur auf das Kriterium (ii) von (5.2) zu prüfen. Trotzdem erhält man die Parametrisierung aller unipotenten Charaktere der vorhandenen Gruppen mit dem Kriterium für die Hauptserie.

(8.2) Typ ${}^2A_l$ — Sei $G^F = \mathrm{PGU}_{l+1}(q)$. Hier liegen nicht alle unipotenten Charaktere in der Hauptserie. In den Fällen, wo es für eine Partition der Nebenserie mehrere Kandidaten gibt, hat man kein Hilfsmittel zur Verfügung. Die notwendige Bedingung für Fast-Charaktere, vergleiche (2.7) und (5.5), kann man nicht verwenden, weil hier Fast-Charaktere nur für CHEVALLEY-Gruppen definiert wurden. Diese Situation tritt in drei Gruppen bei jeweils einer Partition auf. Nämlich in den Gruppen $\mathrm{U}_3(5).3$ und $\mathrm{U}_3(11).3$ jeweils zur Partition $(2,1)$, sowie in der Gruppe $\mathrm{U}_6(2).3$ zur Partition $(3,2,1)$. Für diese drei Fälle ist es mit den hier vorgestellten Mitteln nicht möglich herauszufinden, welcher der jeweils drei Kandidaten der unipotente Charakter ist. Ansonsten gelingt die Parametrisierung aufgrund der Grade und mit dem Argument für Hauptserien-Charaktere (5.3). Allerdings muss man eventuell noch die Vielfachheiten der unipotenten Charaktere in den Permutations-Charakteren ϑ ausrechnen, wie es in (5.4) beschrieben ist.

(8.3) Typ B_l — Die Gruppen G^F diesen Typs, die zu einer adjungierten Gruppe G gehören, sind die speziellen orthogonalen Gruppen $\mathrm{SO}_{2l+1}(q)$ ungerader Dimension. Betrachtet man die DYNKIN-Diagramme, dann sieht man, dass $B_2 = C_2$ und $B_1 = A_1$ gilt. Außerdem gilt $B_l(2^k) \cong C_l(2^k)$. Diese Fälle wurden schon, oder werden noch betrachtet. Deshalb schaut man sich hier nur die Fälle $l \geq 3$ und $q \neq 2^k$ an. Es sind nur zwei dieser Gruppen in der Bibliothek, nämlich für $l = 3$ und $q \in \{3, 5\}$. Es gibt jeweils zwei Serien unipotenter Charaktere, nämlich die Hauptserie mit 10 Charakteren, parametrisiert durch Symbole mit Defekt 1, und die Nebenserie bestehend aus 2 Charakteren, parametrisiert durch Symbole mit Defekt 3. In beiden Gruppen ist es so, dass es zu jedem Grad eines unipotenten Charakters zwei Kandidaten gibt, wovon einer nicht unipotent ist.

Für die Charaktere der Hauptserie erhält man die Parametrisierung mit der Bedingung aus (5.3), wie es in Beispiel (7.6) beschrieben ist. Man probiert alle 1024 möglichen Kombinationen und nur eine liefert einen Charakter ϑ mit ausschließlich positiven Werten.

Mit der notwendigen Bedingung für Fast-Charaktere die in (5.5) beschrieben wurde, findet man die richtigen Kandidaten für die beiden Symbole der Nebenserie. Diese liegen in unterschiedlichen Familien mit jeweils vier Elementen. Nur ein Kandidat für das jeweilige Symbol führt zu einem Charakter der die Bedingung aus (5.5) erfüllt. Dieses Vorgehen wurde in Beispiel (7.8) beschrieben.

(8.4) Typ C_l — Für diesen Fall betrachtet man die Gruppen $\mathrm{PCSp}_{2l}(q)$, die in (6.2) beschrieben wurden.

In den Gruppen $\mathrm{PCSp}_4(q)$, also die vom Typ $C_2 = B_2$, sind die Grade der unipotenten Charaktere zu den Symbolen $\binom{1\,2}{0}$ und $\binom{0\,1}{2}$ unabhängig von q immer gleich. Ist $q = p^f$ ungerade, dann lassen sich mit den Methoden aus [Lüb93] die Symbole den in [Sri68] ausgerechneten Charakteren zuordnen. Betrachtet man die Gruppe als Gruppe vom Typ C_2, dann erhält man daraus, dass der Charakter zu $\binom{1\,2}{0}$ nur nicht-negative Werte auf p-Elementen annimmt. Beim Typ B_2 gilt dies für den Charakter zum Symbol $\binom{0\,1}{2}$. Ist $q = 2^f$, dann kann man die Zuordnung für diese beiden Symbole nicht entscheiden, da beide Möglichkeiten durch den Automorphismus vertauscht werden, der auch zur Suzuki-Gruppe ${}^2B_2$ führt (siehe (4.17)).

Bei den anderen Symbolen der Gruppen vom Typ B_2 und in den Gruppen vom Typ B_l, $l \geq 3$ erhält man die vollständige Parametrisierung, wenn man die Gradformel und die Bedingung aus (5.3) anwendet (vgl. (7.2)). Nur in den nicht einfachen Gruppen $\mathrm{PCSp}_{2l}(q)$ sowie in der Gruppe $\mathrm{Sp}_{12}(2)$ gibt es in den Nebenserien Fälle, in denen die Parametrisierung mit der Gradformel und der Bedingung für die Hauptserie nicht gelingt. Allerdings kommt man zum Ziel, wenn man versucht, Fast-Charaktere zu Symbolen der Nebenserien auszurechnen. Nur für jeweils eine Zuordnung erfüllen die so berechneten Klassenfunktionen die notwendige Bedingung für Fast-Charaktere. Siehe dazu auch das Beispiel (7.4).

(8.5) Typ D_l — In der Bibliothek gibt es drei Gruppen G^F diesen Typs, für die G adjungiert ist. Dies sind die Gruppen $\mathrm{O}_8^+(2)$, $\mathrm{O}_8^+(3).(2^2)_{111}$ und $\mathrm{O}_{10}^+(2)$. In der Gruppe vom Typ D_5 gibt es keine Probleme bei der Parametrisierung, wenn man die in §5 vorgestellten Hilfsmittel verwendet.

Bei den Gruppen vom Typ D_4 gibt es mehrere richtige Parametrisierungen. Man hat also eine Wahlmöglichkeit, die wegen der Symmetrie des Dynkin-Diagramms auftritt. Und zwar gibt es 6 Symbole, wovon jeweils 3 zum gleichen Grad führen. Für ein Tripel von Symbolen kann man die zugehörigen Charaktere wählen, für das andere Tripel ist die Zuordnung dann festgelegt. Siehe dazu auch das Beispiel (7.3) und die entsprechende Bemerkung in (4.17).

(8.6) Typ ${}^2D_l$ — In der Bibliothek gibt es nur zwei Gruppen G^F vom Typ ${}^2D_l$, für die G adjungiert ist, nämlich $\mathrm{O}_8^-(2)$ und $\mathrm{O}_{10}^-(2)$. Die Parametrisierung der unipotenten Charaktere mit Symbolen erhält man ohne Probleme durch Anwendung der Gradformel und des Argumentes für die Hauptserie (5.3).

(8.7) Typ ${}^3D_4$ — Von diesem Typ findet man nur ein Gruppe in der Bibliothek, nämlich die Gruppe ${}^3D_4(2)$. Die Gruppen diesen Typs haben acht unipotente Charaktere, wovon sechs in der Hauptserie liegen. Die Zuordnung der Charaktere gelingt ohne Probleme, da sich alle Grade unterscheiden.

(8.8) Typ E_l — Nur die Charaktertafel zur Gruppe $E_6(2)$ ist vom Typ E_l in der Bibliothek vorhanden. Es gibt 25 Charaktere in der Hauptserie und fünf in den drei Nebenserien. Die Grade der beiden unipotenten Charaktere $E_6[\theta]$ und $E_6[\theta^2]$ in den diskreten Serien sind für alle q gleich. Die Zuordnung eines Labels zu diesen beiden Charakteren ist willkürlich (siehe (4.17)). Alle anderen unipotenten Charaktere findet man mit der entsprechenden Zuordnung zu einem Weyl-Charakter über den Grad.

(8.9) Typ $^2E_6$ — In der Bibliothek gibt es nur eine Charaktertafel einer Gruppe G^F vom Typ $^2E_6$, für die G adjungiert ist. Es handelt sich um die Gruppe $^2E_6(2).3$. Auch hier gibt es 25 unipotente Charaktere in der Hauptserie und fünf in den vier Nebenserien. Die Charaktere der Hauptserie stehen in Bijektion zu den irreduziblen Charakteren der WEYL-Gruppe $W(F_4)$. Zwei kuspidale unipotente Charaktere in den diskreten Serien haben den gleichen Grad. Dies sind die Charaktere die in Tabelle 3 in §3 mit $^2E_6[\theta]$ und $^2E_6[\theta^2]$ bezeichnet wurden. Zu jedem dieser beiden Charaktere gibt es sechs Kandidaten. Bei den anderen Labeln ist es so, dass es zu jedem unipotenten Charakter genau drei Kandidaten gibt. Aber nur jeweils einer der Kandidaten hat nur rationale Werte, und mit dem Argument für die unipotenten Charaktere der Hauptserie (5.3) können wir für die Hauptserien-Charaktere beweisen, dass der Kandidat mit ausschließlich rationalen Werten der unipotente Charakter ist.

Allerdings ist es bei dieser Gruppe so, dass man nicht alle $3^{25} > 8,47 \cdot 10^{11}$ möglichen Kombinationen durchprobieren kann. Aber der Charakter $(1_{P_J{}^F})^{G^F}$ hat für dreielementige Teilmengen $J \subset \{1,2,3,4\}$ nur wenige Konstituenten. Das heißt, man kann für einige Kandidatentripel den unipotenten Charakter herausfinden. Dies kann man mit anderen Teilmengen $J \subset \{1,2,3,4\}$ wiederholen. Wenn nur noch wenige unipotente Charaktere zu bestimmen sind, wählt man für J die leere Menge, das heißt man verwendet den Spezialfall aus (5.3). Dann bestätigt sich, dass tatsächlich immer der Charakter, der nur rationale Werte hat, der unipotente Charakter ist.

In der Nebenserie gelingt die Parametrisierung leider nicht, da es sich nicht um eine CHEVALLEY-Gruppe, also eine Gruppe mit trivialer F-Operation handelt.

(8.10) Typ F_4 — Die Gruppe $F_4(2)$ ist die einzige vom Typ F_4 in der Bibliothek. Auch hier gibt es 25 Charaktere in der Hauptserie, die durch die irreduziblen Charaktere der WEYL-Gruppe $W(F_4)$ parametrisiert werden. In den Nebenserien sind zwölf weitere unipotente Charaktere. Rechnet man die Grade aus, so stellt man fest, dass es zehn Paare von unipotenten Charakteren gibt, die jeweils den gleichen Grad haben. Von diesen Paaren liegen zwei in den diskreten Serien, bestehend aus den Charakteren die in Tabelle 3 von §3 mit $F_4[i]$, $F_4[-i]$, $F_4[\theta]$ und $F_4[\theta^2]$ bezeichnet wurden. Auch mit der Einteilung unipotenter Charaktere in Familien und dem Ausrechnen von möglichen Fast-Charakteren kann man die Paare von unipotenten Charakteren nicht eindeutig zuordnen (siehe (4.17)).

Ein Paar unipotenter Charaktere mit gleichem Grad besteht aus zwei der fünf unipotenten Charaktere, die aus dem kuspidalen unipotenten Charakter der LEVI-Untergruppe vom Typ B_2 hervorgehen. Diese fünf Charaktere stehen in Bijektion zu den irreduziblen Charakteren der WEYL-Gruppe $W(B_2)$. Bei der Einteilung unipotenter Charaktere in Familien liegen diese beiden Charaktere in der Familie, die aus 21 Charakteren besteht. Wie in (2.7) beschrieben, werden Charaktere in einer Familie mit Paaren (x, σ) bezeichnet. In diesem Fall ist $x \in \mathrm{S}_4 =: \Gamma$ und diese beiden speziellen Charaktere mit gleichem Grad werden mit $(g_4, -1)$ und (g_2, ε') bezeichnet (vgl. [Car85] Abschnitte 13.9 und 13.6). Mit dieser Unterteilung in Familien kann man die Charaktere eindeutig zuordnen.

In der Hauptserie gelingt die Parametrisierung, wenn man zu einer geeigneten Untergruppe der WEYL-Gruppe $W(F_4)$ übergeht und, wie in (5.3) beschrieben, die allgemeinere Aussage des Satzes aus (2.6) verwendet. Allerdings gibt es zwei richtige Parametrisierungen. Vergleiche dazu auch das Beispiel (7.7) und die entsprechende Bemerkungen in (4.17).

(8.11) Typ G_2 — In diesen Gruppen gibt es zehn unipotente Charaktere, wovon sechs in der Hauptserie und vier in den diskreten Serien liegen. Bei der Parametrisierung dieser Gruppen ist es so, dass in der Nebenserie ein Paar von unipotenten Charakteren gleichen Grades auftritt, die auch nicht unterschieden werden können, wenn man versucht die entsprechenden Fast-Charaktere auszurechnen. Diese wurden in Tabelle 3 in §3 mit $G_2[\theta]$ und $G_2[\theta^2]$ bezeichnet (siehe auch (4.17)).

In der Hauptserie kann man die unipotenten Charaktere, die mit $\phi'_{1,3}$ und $\phi''_{1,3}$ bezeichnet werden, nicht unterscheiden, falls $q = 3^f$ für ein $f \in \mathbb{N}$ ist. In diesen Fällen werden die Charaktere durch den Automorphismus vertauscht, der auch zur Ree-Gruppe führt (siehe ebenfalls (4.17)). Ist $q \neq 3^f$ für ein $f \in \mathbb{N}$, dann kann man, ähnlich wie in (8.4), die beiden Charaktere an den Werten auf einem unipotenten Element unterscheiden. Und zwar hat nur der Charakter $\phi'_{1,3}$ auf einem nicht trivialen unipotenten Element mit maximalem Zentralisator einen negativen Wert. Dieses Ergebnis erhält man durch Betrachten der entsprechenden generischen Charaktertafel in [GHL+96].

In der Gruppe zu $q = 2$ gibt es zum Label $G_2[-1]$ zwei Kandidaten. Auch wenn man die zugehörigen möglichen Fast-Charaktere betrachtet, gelingt die Parametrisierung nicht.

(8.12) Typ ${}^2B_2$ — Die Gruppen diesen Typs haben vier unipotente Charaktere, wovon zwei in der Hauptserie liegen, während die anderen beiden kuspidal sind. In der Hauptserie gibt es jeweils drei Kandidaten. Natürlich ist der 1-Charakter unipotent. Den anderen unipotenten Charakter der Hauptserie erkennt man auch sofort, weil nur einer der drei Kandidaten addiert mit dem 1-Charakter ein Permutations-Charakter sein kann. In der Nebenserie haben die beiden unipotenten Charaktere den gleichen Grad, also stimmt die sechselementige Kandidatenmenge überein. Eine Parametrisierung der unipotenten Charaktere der Nebenserie ist also mit den bekannten Mitteln nicht möglich.

(8.13) Typ ${}^2G_2$ — Die Gruppen vom Typ ${}^2G_2$ haben zwei unipotente Charaktere in der Hauptserie, und sechs kuspidale unipotente Charaktere in den Nebenserien. In der Hauptserie gibt es jeweils drei Kandidaten. Da man weiß, dass der 1-Charakter unipotent ist, erkennt man, welcher Kandidat für den anderen unipotenten Charakter in der Hauptserie der richtige ist. In den Nebenserien haben jeweils zwei unipotente Charaktere den gleichen Grad. Für jeden der sechs kuspidalen Nebenserien-Charaktere gibt es sechs Kandidaten, wovon zwei unipotent sind. Eine Parametrisierung der unipotenten Charaktere der Nebenserie ist auch hier nicht möglich.

(8.14) Typ ${}^2F_4$ — In der Hauptserie dieser Gruppen sind sieben unipotente Charaktere, die durch die irreduziblen Charaktere der Symmetriegruppe eines Achtecks, D_{16}, parametrisiert werden. In den Nebenserien sind 14 weitere Charaktere. Mit Hilfe der Charaktergrade und dem Kriterium aus (5.3) schafft man es, die unipotenten Charaktere der Hauptserie zuzuordnen. In den Nebenserien gelingt dies nicht. In der Gruppe ${}^2F_4(2)'.2$ sind zehn Nebenserien-Charaktere, bei denen man nicht weiß, welcher Kandidat der richtige ist. In der Gruppe ${}^2F_4(8)$ findet man zumindest alle unipotenten Charaktere. Aber in den Nebenserien gibt es fünf Paare von unipotenten Charakteren mit gleichem Grad. Die Parametrisierung der unipotenten Charaktere gelingt in der Nebenserie nur für die vier Charaktere, die schon durch den Grad bestimmt werden können.

§9 Unipotente Charaktere in GAP

In der GAP-Charaktertafel-Bibliothek `CTblLib` ist für die unipotenten Charaktere der endlichen Gruppen vom Lie-Typ ein Label gespeichert. Falls diese Bibliothek nicht geladen ist, so wird sie mit dem Befehl `LoadPackage("CTblLib")` verfügbar.

(9.1) Das Attribut `DeligneLusztigNames` — Eine Liste von Labeln der unipotenten Charaktere einer Charaktertafel erhält man mit dem Befehl `DeligneLusztigNames(`*tbl*`)`. Das Objekt *tbl* muss eine Charaktertafel der Charaktertafel-Bibliothek sein, die zu einer endlichen Gruppe vom Lie-Typ gehört. In der ausgegebenen Liste steht ein bestimmtes Label an der Position, an der in der Liste der irreduziblen Charaktere der zugehörige unipotente Charakter steht.

In einigen wenigen Fällen war es nicht möglich die unipotenten Charaktere vollständig zu ermitteln und zu parametrisieren (siehe §8). Um trotzdem zumindest alle Label auszugeben, wurde in den kritischen Fällen ein Charakter geraten. Siehe dazu auch das Beispiel der Gruppe $\mathrm{U}_6(2).3$ in (9.4). In diesen Fällen erscheint beim ersten Aufruf der Funktion die Warnung `Labeling is not unique`, zusammen mit dem Label, für das der unipotente Charakter nicht eindeutig bestimmt werden konnte. In den Fällen die in (4.17) beschrieben wurden, erscheint die Warnung nicht, weil das Labeling in diesem Fall zwar nicht eindeutig aber korrekt ist.

Es gibt zwei weitere Möglichkeiten die obige Funktion auszuführen. Der Einfachheit halber kann man anstelle der Charaktertafel auch die zugehörige Zeichenkette übergeben. Die entsprechende Operation berechnet dann die Charaktertafel und führt dann die Standardoperation für dieses Attribut aus.

Außerdem kann man ein Record der folgenden Art übergeben:

```
rec(isoc:= str1,
    l:= int1,
    q:= int2,
    isot:= str2
)
```

Dabei sind `str1` und `str2` Zeichenketten, die die Isogenieklasse (ohne l) und den Isogenietyp der zugehörigen Gruppe G bezeichnen. Die natürlichen Zahlen `int1` und `int2` geben die Werte für l und q an. Bei den Suzuki- und Ree-Gruppen muss man die Komponente `q2` für den Wert von q^2 setzen. Durch diese vier Werte wird eine Gruppe eindeutig identifiziert. Darüber hinaus kann man so zum Beispiel die Gruppe $\mathrm{L}_2(7) \cong \mathrm{L}_3(2)$ als Gruppe vom Typ A_1 und als Gruppe vom Typ A_2 auffassen.

Die Bedeutung der einzelnen Recordkomponenten wird an folgenden Beispielen deutlich:

```
rec1:= rec(isoc:= "A", 1, 7, "ad")
rec2:= rec(isoc:= "A", 1, 7, "sc")
rec3:= rec(isoc:= "A", 1, 7, "simple")
rec4:= rec(isoc:= "A", 2, 2, "all")
```

Mit diesen Werten werden die unipotenten Charaktere der Gruppen $\mathrm{PGL}_2(7)$, $\mathrm{SL}_2(7)$, $\mathrm{L}_2(7)$ und $\mathrm{PGL}_3(2) \cong \mathrm{SL}_3(2) \cong \mathrm{L}_3(2)$ berechnet. Dabei ist es so, dass das Attribut `DeligneLusztigNames` für die Charaktertafel der isomorphen Gruppen $\mathrm{L}_2(7)$ und $\mathrm{L}_3(2)$, wie alle Attribute, nur einmal gesetzt werden kann. Ein Aufruf von `DeligneLusztigNames` mit `rec3` und dann mit `rec4` liefert zwar die richtigen Listen, aber das Attribut der Charaktertafel bleibt nach dem ersten Aufruf gleich.

(9.2) Die Operation `UnipotentCharacter` — Um den unipotenten Charakter einer Charaktertafel zu einem Label zu erhalten, verwendet man die Operation `UnipotentCharacter(` *tbl*`,` *label* `)`. Das erste Argument muss eine Charaktertafel der Bibliothek zu einer endlichen Gruppe vom Lie-Typ sein, während das zweite Argument ein Label eines unipotenten Charakters dieser Gruppe sein muss. Ein solches Label ist entweder eine Liste von Zahlen, eine Liste der Länge zwei von Zahlenlisten oder eine Zeichenkette. Dabei ist zu beachten, dass das Label in der Art übergeben werden muss, wie es in der Bibliothek der unipotenten Charaktere gespeichert ist.

Das heißt, wenn die zugehörige Gruppe vom Typ A_l oder ${}^2A_l$ ist, dann muss das Label eine Liste sein, die eine Partition von $l+1$ darstellt. Bei den anderen klassischen Typen übergibt man eine Liste der Form `[` *lsta*`,` *lstb* `]`, wobei *lsta* und *lstb* wachsende Zahlenfolgen ohne Wiederholungen sind. Diese Konstruktion soll in GAP ein Symbol darstellen. Natürlich muss der Rang dieses Symbols gleich der Zahl l der zugehörigen Gruppe sein. Bei den Gruppen vom Ausnahmetyp verwendet man die Bezeichnung eines irreduziblen Charakters der relativen Weyl-Gruppe als Label. Diese Bezeichnung muss als Zeichenkette übergeben werden. Zum Beispiel werden die unipotenten Charaktere der Gruppen vom Typ G_2 mit `"phi{1,0}"`, `"G2[1]"`, `"G2[theta]"`, `"G2[theta^2]"`, `"G2[-1]"`, `"phi{1,3}'"`, `"phi{1,3}''"`, `"phi{2,1}"`, `"phi{2,2}"` und `"phi{1,6}"` bezeichnet. Solche Label wurden auch schon im Beispiel (7.7) in Tabelle 9 verwendet.

Ein Aufruf der Operation `UnipotentCharacter` beinhaltet einen Aufruf von `DeligneLusztigNames` mit der gleichen Charaktertafel. Das heißt, `UnipotentCharacter` macht nicht mehr, als das Label in der Liste die von `DeligneLusztigNames` berechnet wird zu suchen, und den entsprechenden Charakter der Charaktertafel auszugeben.

(9.3) Das Attribut `DeligneLusztigName` **für einen Charakter** — Mit dem Befehl `DeligneLusztigName(` *chi* `)` erhält man das Label des unipotenten Charakters *chi*, das als Attribut von *chi* gespeichert wird. Dieses Label ist von der Art, wie es in (9.2) beschrieben wird. Bei der Ausführung von `DeligneLusztigNames` wird auch das Attribut `DeligneLusztigName` für jeden unipotenten Charakter gesetzt. Umgekehrt ist es so, dass ein Aufruf der Form `DeligneLusztigName(` *chi* `)` zunächst `DeligneLusztigNames( UnderlyingCharacterTable(` *chi* `) )` ausführt, und dann das Label zurückgibt, das zu *chi* gehört.

(9.4) Beispiele — Einige Beispiele verdeutlichen, wie die obigen Operationen verwendet werden können.

```
gap> LoadPackage("CTblLib");
true
gap> DeligneLusztigNames( rec( isoc:="A", isot:="ad", l:=2, q:=2 ) );
[ [ 3 ],,, [ 2, 1 ],, [ 1, 1, 1 ] ]
gap> DeligneLusztigNames( rec( isoc:="A", isot:="simple", l:=1, q:=7 ) );
[ [ 2 ],,,, [ 1, 1 ] ]
gap> tbl:= CharacterTable("L2(7)");
CharacterTable( "L3(2)" )
gap> HasDeligneLusztigNames(tbl);
true
gap> DeligneLusztigNames(tbl);
[ [ 3 ],,, [ 2, 1 ],, [ 1, 1, 1 ] ]
gap>
```

```
gap> tbl:= CharacterTable("U6(2).3");;
gap> lst:= DeligneLusztigNames(tbl);;
Labeling is not unique:
[ 3, 2, 1 ]
gap> Position(lst, [ 3, 2, 1 ]);
19
gap> Display(tbl, rec(chars:=[19..21], classes:=[1,109,110,111,112,113,114],
> powermap:=false,centralizers:=false));
U6(2).3

         1a 33a 33b 33c 33d 36a 36b

X.19    560  -1  -1  -1  -1   1   1
X.20    560   A  /A   A  /A  -A -/A
X.21    560  /A   A  /A   A -/A  -A

A = -E(3)
  = (1-ER(-3))/2 = -b3
gap>
gap> tbl:= CharacterTable("S4(5).2");
CharacterTable( "S4(5).2" )
gap> UnipotentCharacter(tbl,[[0,2],[1]]);
Character( CharacterTable( "S4(5).2" ), [ 90, 18, 6, 0, 0, 6, 0, 15, 0, 5,
  0, 0, 0, 0, 3, 3, -2, 1, 0, 0, -1, -1, -1, 0, 0, 1, 0, 12, 0, 6, 2,
  0, 0, 0, 0, 0, 2, -3, 0, 0, 1, 0, 0, -1, -1, -1, 0 ] )
gap> HasDeligneLusztigName(Irr(tbl)[1]);
true
gap> DeligneLusztigName(Irr(tbl)[1]);
[ [ 2 ], [  ] ]
gap>
gap> tbl:=CharacterTable("2F4(2)");
CharacterTable( "2F4(2)'.2" )
gap> DeligneLusztigNames(tbl);
[ "1", "cusp2", "cusp10", "^2B_2[a],1", "^2B_2[b],1", "cusp4", "cusp5",
  "eps'", "cusp3", "cusp8", "cusp9", "cusp1",, "rho_2'",, "cusp6",,
  "cusp7",, "eps''", "rho_2",, "rho_2''",,,, "^2B_2[b],eps",
  "^2B_2[a],eps", "eps" ]
gap> UnipotentCharacter(tbl,"eps");
Character( CharacterTable( "2F4(2)'.2" ),
[ 4096, 0, 0, -8, 0, 0, 0, -4, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
  0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 ] )
gap> DeligneLusztigName(Irr(tbl)[27]);
"^2B_2[b],eps"
```

(9.5) Aufbau der Bibliothek — Die Bibliothek der unipotenten Charaktere besteht aus einer Liste mit einem Eintrag für jede vorkommende Gruppe. Ein solcher Eintrag ist ein Record mit den Komponenten `identifier`, `isoc`, `isot`, `l` und `q`. Bei den ersten beiden Komponenten handelt es sich um Zeichenketten, die den Standardnamen der Gruppe und die Isogenieklasse der zugehörigen algebraischen Gruppe (ohne l) bezeichnen. Die dritte Komponente ist eine Liste von Zeichenketten, die bestimmt, zu welchen Isogenietypen die zugehörige algebraische Gruppe gehören kann. Die Komponenten `l` und `q` stehen für die Zahlen l und q. Bei den Suzuki- und Ree-Gruppen ist der Wert q^2 in der Komponente `q2` gespeichert.

Hinzu kommt noch eine weitere Komponente `labeling` oder `labelingfrom`. Ist die Komponente `labeling` definiert, dann besteht diese Komponente aus einer Liste von Records, die die Parametrisierung der unipotenten Charaktere speichert. Jedes Record hat die Komponenten `label` und `index`, die einem Label eine Position in der Liste der irreduziblen Charaktere zuordnen. Ist für ein Label der zugehörige unipotente Charakter nicht (eindeutig) bestimmt, dann ist die Komponente `warn` gesetzt. In den Fällen wo eine Zuordnung in jedem Fall willkürlich wäre, ist diese Komponente nicht gesetzt.

Wenn die Komponente `labeling` nicht definiert ist, dann beschreibt die Zeichenkette, die in der Komponente `labelingfrom` gespeichert ist, die Gruppe, von der das Labeling abgeleitet wird.

Im folgenden sieht man vier Elemente der Liste, die die unipotenten Charaktere speichert.

```
rec( isoc := "C", l := 2, q := 4, isot := [ "ad", "sc", "simple" ],
    identifier := "S4(4)",
    labeling := [ rec( label := [ [ 1, 2 ], [ 0 ] ], index := 3 ),
        rec( label := [ [ 0, 2 ], [ 1 ] ], index := 5 ),
        rec( label := [ [ 0, 1, 2 ], [ 1, 2 ] ], index := 25 ),
        rec( label := [ [ 2 ], [  ] ], index := 1 ),
        rec( label := [ [ 0, 1 ], [ 2 ] ], index := 4 ),
        rec( label := [ [ 0, 1, 2 ], [  ] ], index := 2 ) ] ),
rec( isoc := "C", l := 2, q := 5, isot := [ "ad" ],
    identifier := "S4(5).2",
    labeling := [ rec( label := [ [ 1, 2 ], [ 0 ] ], index := 9 ),
        rec( label := [ [ 0, 2 ], [ 1 ] ], index := 11 ),
        rec( label := [ [ 0, 1, 2 ], [ 1, 2 ] ], index := 45 ),
        rec( label := [ [ 2 ], [  ] ], index := 1 ),
        rec( label := [ [ 0, 1 ], [ 2 ] ], index := 6 ),
        rec( label := [ [ 0, 1, 2 ], [  ] ], index := 5 ) ] ),
rec( identifier := "2.S4(5)", isoc := "C", isot := [ "sc" ],
    l := 2, q := 5, labelingfrom := "S4(5)" ),
rec( identifier := "S4(5)", isoc := "C", isot := [ "simple" ],
    l := 2, q := 5, labelingfrom := "S4(5).2" ),
```

(9.6) Weitere Funktionen — Zusätzlich zu den oben beschriebenen Operationen gibt es weitere Funktionen die von den Hauptfunktionen benötigt werden, und Funktionen, die beim Ausrechnen und Testen der Parametrisierung unipotenter Charaktere hilfreich sind.

Insbesondere für die klassischen Gruppen gibt es eine Reihe interessanter Funktionen, zum Beispiel sind die Gradformeln implementiert. Darauf aufbauend gibt es eine Funktion, die die Label einer Gruppe und die zugehörigen Kandidaten berechnet, und in einer Liste ausgibt. In einer solchen Liste kann man für jedes Label einen Kandidaten bestimmen, und für diese Zuordnung kann man die Charaktere $\vartheta = \sum_{\phi\in\mathrm{Irr}(W)}(\phi,(1_{W_J})^W)\chi_\phi$ berechnen lassen. Für diese Charaktere kann man überprüfen lassen, ob sie die notwendigen Bedingungen für Permutations-Charaktere erfüllen.

Des weiteren lassen sich Familien unipotenter Charaktere berechnen. Für die häufig vorkommenden Familien der Größe vier gibt es eine Funktion, die den potentiellen Fast-Charakter zu einem Symbol, das nicht in der Hauptserie liegt, berechnet. Den so berechneten Charakter kann man mit einer weiteren Funktion darauf prüfen, ob er auf allen halbeinfachen Konjugiertenklassen verschwindet.

Da noch nicht klar ist, welche Funktionen letztendlich übrigbleiben, sind diese hier noch nicht dokumentiert.

§10 JORDAN-Zerlegung irreduzibler Charaktere

In den bisherigen Paragraphen wurden die unipotenten Charaktere gewisser endlicher Gruppen vom LIE-Typ bestimmt und parametrisiert. Jetzt betrachten wir eine Möglichkeit, alle irreduziblen Charaktere dieser Gruppen zu parametrisieren. Diese Parametrisierung wird auch LUSZTIG-Klassifikation genannt. Dabei ordnet man jedem irreduziblen Charakter einen eindeutig bestimmten halbeinfachen Charakter der gleichen Gruppe und einen unipotenten Charakter einer anderen Gruppe zu. Durch diese Zuordnung, die als JORDAN-Zerlegung bezeichnet wird, erhält man ein Labeling der irreduziblen Charaktere durch halbeinfache und unipotente Charaktere. Dieses Konzept soll in diesem Paragraphen, der aber nur als Ausblick zu verstehen ist, kurz vorgestellt werden. Siehe dazu auch [Car85] Abschnitt 12.9.

Als zusätzliche Voraussetzung soll für diesen Paragraphen das Zentrum von G zusammenhängend sein, obwohl die vorgestellten Aussagen mit kleinen Änderungen auch allgemeiner gelten. Da für diesen Ausblick aber nicht zu viel Notation eingeführt werden soll, beschränken wir uns hier auf Gruppen G mit zusammenhängendem Zentrum.

Der Name JORDAN-Zerlegung ist durch die JORDAN-Zerlegung eines Endomorphismus' eines Vektorraumes in den unipotenten und den halbeinfachen Anteil motiviert.

(10.1) Reguläre unipotente Elemente von G^F — Die Gruppe G ist über dem Körper K mit $\mathrm{char}(K) = p > 0$ definiert. Ein Element u der Gruppe G^F ist unipotent, wenn die Ordnung von u eine p-Potenz ist. Weiterhin ist $g \in G$ regulär, wenn $\dim \mathrm{C}_G(g) = \mathrm{Rang}\ G$ ist. Ein Element $u \in G^F$ ist regulär unipotent, wenn es unipotent und regulär (als Element von G) ist.

Abhängig vom Typ der Gruppe definiert man schlechte Primzahlen p für G. Die schlechten Primzahlen für die einzelnen Typen sind:

keine	Typ A_l
$p = 2$	Typ B_l, C_l und D_l
$p = 2, 3$	Typ G_2, F_4, E_6 und E_7
$p = 2, 3, 5$	Typ E_8

Alle anderen Primzahlen sind gute Primzahlen. Siehe dazu auch [Car85] Abschnitt 1.14.

Fasst man die Propositionen 5.1.7 und 5.1.9. aus [Car85] zusammen, so erhält man die folgende Aussage:

Sei das Zentrum Z von G zusammenhängend, und p eine gute Primzahl für G, dann gibt es genau eine Konjugiertenklasse von regulären unipotenten Elementen in G^F. Diese Konjugiertenklasse enthält $|G^F|/|Z^F|q^l$ Elemente.

Gibt es nur eine Konjugiertenklasse dieser Größe, die unipotente Elemente enthält, dann kennt man alle regulären unipotenten Elemente.

(10.2) Halbeinfache Charaktere — Sei $Z := \mathrm{Z}(G)$ zusammenhängend. Ein irreduzibler Charakter χ von G^F heißt halbeinfach, wenn der Durchschnittswert von χ auf den regulären unipotenten Elementen nicht 0 ist. Dieser Durchschnittswert ist dann ± 1 (siehe [Car85] Prop. 8.3.3).

Wenn es also möglich ist, die Konjugiertenklassen regulärer unipotenter Elemente zu identifizieren, dann findet man auch alle halbeinfachen Charaktere.

(10.3) Geometrische Konjugiertenklassen — Dieser Abschnitt orientiert sich an [Car85] Abschnitt 12.1.

In (2.1) wurden DELIGNE-LUSZTIG-Charaktere $R_{T,\theta}$ vorgestellt. Dabei war T

ein maximaler F-invarianter Torus von G und θ ein irreduzibler Charakter von T^F. Auf der Menge der Paare (T, θ) ist eine bestimmte Äquivalenzrelation definiert. Die Definition findet man in [Car85] nach dem Beweis der Proposition 4.1.3. Die Äquivalenzklassen dieser Relation heißen geometrische Konjugiertenklassen.

Das Korollar 7.5.8 aus [Car85] besagt, dass jeder irreduzible Charakter χ Konstituent eines DELIGNE-LUSZTIG-Charakters $R_{T,\theta}$ ist. Weiterhin folgt aus [Car85] Satz 7.3.8: Ist ein irreduzibler Charakter χ Konstituent von zwei Charakteren $R_{T,\theta}$ und $R_{T',\theta'}$, dann sind (T, θ) und (T', θ') geometrisch konjugiert.

Auf diese Weise erhält man geometrische Konjugiertenklassen von irreduziblen Charakteren. Zwei irreduzible Charaktere χ_1 und χ_2 sind geometrisch konjugiert, wenn es geometrisch konjugierte Paare (T, θ) und (T', θ') gibt, so dass χ_1 Konstituent von $R_{T,\theta}$ und χ_2 Konstituent von $R_{T',\theta'}$ ist. Die unipotenten Charaktere bilden eine eigene geometrische Konjugiertenklasse, weil die Paare $(T, 1)$ und (T', θ') genau dann geometrisch konjugiert sind, wenn $\theta' = 1$ ist.

Satz. Jede geometrische Konjugiertenklasse von irreduziblen Charakteren enthält einen eindeutig bestimmten halbeinfachen Charakter. In der Klasse der unipotenten Charaktere ist dies der 1-Charakter.

Die Aussagen dieses Satzes findet man ebenfalls in [Car85] Abschnitt 12.1.

(10.4) Duale Gruppen — Das Konzept dualer Gruppen wird in [Car85] in den Abschnitten 4.2 bis 4.5 vorgestellt. Dort werden sowohl zu zusammenhängenden reduktiven Gruppen G als auch zu den zugehörigen endlichen Gruppen vom LIE-Typ G^F duale Gruppen definiert. Die duale Gruppe zu G beziehungsweise G^F wird mit G^* beziehungsweise G^{*F^*} bezeichnet, und die duale Gruppe zu G^* ist G und die zu G^{*F^*} ist G^F. In [Car85] Abschnitt 4.4 findet man eine Liste mit Paaren von dualen Gruppen. Tabelle 10 ist ein Auszug dieser Liste.

$(A_l)_{\mathrm{sc}}(q)$	$(A_l)_{\mathrm{ad}}(q)$
$(^2A_l)_{\mathrm{sc}}(q)$	$(^2A_l)_{\mathrm{ad}}(q)$
$(B_l)_{\mathrm{sc}}(q)$	$(C_l)_{\mathrm{ad}}(q)$
$(C_l)_{\mathrm{sc}}(q)$	$(B_l)_{\mathrm{ad}}(q)$
$(D_l)_{\mathrm{sc}}(q)$	$(D_l)_{\mathrm{ad}}(q)$
$(^2D_l)_{\mathrm{sc}}(q)$	$(^2D_l)_{\mathrm{ad}}(q)$
$(E_6)_{\mathrm{sc}}(q)$	$(E_6)_{\mathrm{ad}}(q)$
$(^2E_6)_{\mathrm{sc}}(q)$	$(^2E_6)_{\mathrm{ad}}(q)$
$(E_7)_{\mathrm{sc}}(q)$	$(E_7)_{\mathrm{ad}}(q)$

Tabelle 10: Paare von dualen Gruppen

Die Gruppen $E_8(q)$, $F_4(q)$ und $G_2(q)$ sowie die SUZUKI- und REE-Gruppen sind selbstdual. Das heißt in diesen Fällen gilt $G^F \cong G^{*F^*}$.

Für die nächste Aussage aus [Car85] Theorem 4.4.6, muss das Zentrum Z von G nicht zusammenhängend sein.

Satz. Sei G eine reduktive zusammenhängende Gruppe.

(i) Es gibt eine Bijektion zwischen den geometrischen Konjugiertenklassen von Paaren (T, θ) zu G und den F^*-invarianten halbeinfachen Konjugiertenklassen von G^*.

(ii) Die Anzahl geometrischer Konjugiertenklassen in G ist $|(Z^0)^F|q^l$, wobei Z^0 die Zusammenhangskomponente des Zentrums von G ist, die die 1 enthält.

(10.5) Die Gruppe $\mathbf{C}_{G^*}(s^*)$ — Die folgenden Aussagen findet man in [Car85] Theorem 4.5.9.

Satz. Sei G eine zusammenhängende reduktive Gruppe mit zusammenhängendem Zentrum $\mathrm{Z}(G)$, G^* die duale Gruppe und s^* ein halbeinfaches Element der dualen Gruppe. Dann ist auch $\mathrm{C}_{G^*}(s^*)$ zusammenhängend und reduktiv.

Aufgrund dieser Aussage sind unipotente Charaktere für die Gruppen $\mathrm{C}_{G^{*F^*}}(s^*) = \mathrm{C}_{G^*}(s^*)^{F^*}$ definiert. Außerdem erhält man zu jeder F^*-invarianten halbeinfachen Konjugiertenklasse von G^* genau eine halbeinfache Konjugiertenklasse von G^{*F^*} (siehe dazu [Car85] vor Theorem 8.4.8).

In der Einleitung für diesen Paragraphen wurde gesagt, dass der unipotente Charakter der Jordan-Zerlegung eines irreduziblen Charakters χ kein Charakter von G^F sondern ein Charakter einer anderen Gruppe ist. Der Zentralisator $\mathrm{C}_{G^{*F^*}}(s^*)$ eines halbeinfachen Elements s^* der dualen Gruppe G^{*F^*}, deren Konjugiertenklasse in Bijektion zur geometrischen Konjugiertenklasse von χ steht, wird diese andere Gruppe sein.

Der halbeinfache Charakter, der in Bijektion zu einem Zentralisator $\mathrm{C}_{G^{*F^*}}(s^*)$ steht hat die folgende Eigenschaft (siehe [Car85] Theorem 8.4.8).

Satz. Sei χ_h ein halbeinfacher Charakter und $s^* \in G^{*F^*}$ ein Element der halbeinfachen Konjugiertenklasse, die in Bijektion zu der geometrischen Konjugiertenklasse von χ_h steht. Dann gilt:

$$\chi_h(1) = |G^{*F^*} : \mathrm{C}_{G^{*F^*}}(s^*)|_{p'}.$$

Diese Aussage kann man verwenden, um aus dem Grad von χ_h und der Ordnung der dualen Gruppe G^{*F^*} den p'-Teil der Zentralisator-Ordnung $|\mathrm{C}_{G^{*F^*}}(s^*)|_{p'}$ zu berechnen.

(10.6) Die Jordan-Zerlegung irreduzibler Charaktere — Dem Abschnitt 12.9 aus [Car85] folgend, kommen wir nun zur Jordan-Zerlegung irreduzibler Charaktere.

Sei χ ein irreduzibler Charakter von G^F. Dann existiert ein halbeinfacher Charakter χ_h der in der gleichen geometrischen Konjugiertenklasse liegt. Der Satz aus (10.4) liefert eine F^*-invariante halbeinfache Konjugiertenklasse der dualen Gruppe G^*, die dem halbeinfachen Charakter χ_h zugeordnet ist. Da das Zentrum Z von G zusammenhängend ist, erhält man eine halbeinfache Konjugiertenklasse von G^{*F^*}. Sei s^* ein Element aus dieser Konjugiertenklasse und betrachte den Zentralisator $\mathrm{C}_{G^{*F^*}}(s^*)$.

Die Jordan-Zerlegung irreduzibler Charaktere kann man folgendermaßen ausdrücken. Es gibt eine bijektive Abbildung $\chi \mapsto (\chi_h, \chi_u)$ zwischen den irreduziblen Charakteren von G^F und den Paaren (χ_h, χ_u), wobei χ_h ein halbeinfacher Charakter von G^F und χ_u ein unipotenter Charakter von $\mathrm{C}_{G^{*F^*}}(s^*)$ ist. Diese Bijektion kann so gewählt werden, dass eine Reihe von Eigenschaften gelten. Siehe dazu ebenfalls [Car85] Abschnitt 12.9.

Insbesondere wählt man die Bijektion so, dass

$$\chi(1) = \chi_h(1)\chi_u(1)$$

gilt, und dass ein halbeinfacher Charakter χ_h auf $(\chi_h, 1_{\mathrm{C}_{G^{*F^*}}(s^*)})$ abgebildet wird. Der halbeinfache Charakter χ_h ist der eindeutig bestimmte halbeinfache Charakter in der geometrischen Konjugiertenklasse, in der χ liegt. Allerdings ist die Bijektion durch diese Bedingungen nicht eindeutig bestimmt.

(10.7) Beispiele — Im folgenden werden die bisherigen Ergebnisse dieses Paragraphen, und die Kenntnis der unipotenten Charaktere einer endlichen Gruppe vom Lie-Typ angewandt, um die Jordan-Zerlegung irreduzibler Charaktere von GAP-Charaktertafeln der endlichen Gruppen vom Lie-Typ zu bestimmen.

Für kleine Gruppen erhält man so die JORDAN-Zerlegung aller irreduziblen Charaktere, aber im Allgemeinen ist es sehr schwierig, die vollständige LUSZTIG-Klassifikation nachträglich aus der Charaktertafel zu bestimmen.

a) Ist χ ein unipotenter Charakter, dann ist $\chi_h = 1$. Das halbeinfache Element der dualen Gruppe, das in Bijektion zu $\chi_h = 1$ steht, ist das 1-Element der dualen Gruppe. Der Zentralisator $\mathrm{C}_{G^{*F^*}}(s^*)$ ist also die duale Gruppe G^{*F^*} zu G^F. Ist G^F selbstdual, dann ist $\chi_u = \chi$. Sei G^F eine Gruppe für die G adjungiert ist und G^{*F^*} die duale Gruppe, für die G^* einfach zusammenhängend ist. Dann erhält man χ_u mit der Abbildung die in (2.8) vorgestellt wurde.

b) Betrachte die Gruppe $G^F = (A_2)_{\mathrm{ad}}(11) = \mathrm{PGL}_2(11)$ der Ordnung 1320. Die Primzahl $p = 11$ ist eine gute Primzahl für diesen Typ. Die duale Gruppe ist $G^{*F^*} = \mathrm{SL}_2(11)$. Zunächst bestimmen wir die Konjugiertenklasse regulärer unipotenter Elemente. Ein Ergebnis aus (10.1) liefert uns, dass diese Konjugiertenklasse $1320/11 = 120$ Elemente hat. In der GAP-Charaktertafel `CharacterTable( "L2(11).2" )` ist die gesuchte Konjugiertenklasse die mit Nummer 7. Bis auf zwei Charaktere, nämlich die mit Nummern 8 und 9, haben alle Charaktere den Wert ± 1 auf dieser Konjugiertenklasse. Also sind alle Charaktere bis auf diese beiden halbeinfach.

Zunächst sei $\chi = \chi_h$ ein halbeinfacher Charakter vom Grad 1. Das zugehörige Element $s^* \in G^{*F^*}$ ist das 1-Element, beziehungsweise das andere Element des Zentrums. In beiden Fällen gilt $\mathrm{C}_{G^{*F^*}}(s^*) = G^{*F^*} = \mathrm{SL}_2(11)$. Wegen der Gleichung $\chi(1) = \chi_h(1)\chi_u(1)$ ist der gesuchte unipotente Charakter dieser Gruppe der 1-Charakter.

Sei χ einer der fünf halbeinfachen Charaktere vom Grad 10. Der Satz aus (10.5) liefert $|\mathrm{C}_{G^{*F^*}}(s^*)|_{p'} = 12$. Schaut man sich an, welche Ordnungen die Zentralisatoren haben, dann erhält man $|\mathrm{C}_{G^{*F^*}}(s^*)| = 12$. In der Charaktertafel der GAP-Charaktertafel-Bibliothek steht diese Konjugiertenklasse an Position 11. Es stellt sich heraus, dass $\mathrm{C}_{G^{*F^*}}(s^*)$ die zyklische Gruppe C_{12} der Ordnung 12 ist. Dies ist eine endliche Gruppe vom LIE-Typ vom Rang $l = 0$ und der gesuchte unipotente Charakter kann nur der 1-Charakter dieser Gruppe sein.

Sei χ einer der vier halbeinfachen Charaktere vom Grad 12. Dann erhält man die JORDAN-Zerlegung dieser Charaktere genau so wie im letzten Fall. Der unipotente Charakter ist jeweils der 1-Charakter der zyklischen Gruppe $\mathrm{GL}_1(11)$.

Sei χ der unipotente Charakter vom Grad 8. Dann ist $\chi_h = 1$, und das zugehörige Element $s^* \in G^{*F^*}$ ist das 1-Element. Also gilt $\mathrm{C}_{G^{*F^*}}(s^*) = G^{*F^*} = \mathrm{SL}_2(11)$. Wegen der Gleichung $\chi(1) = \chi_h(1)\chi_u(1)$ ist χ_u der unipotente Charakter der Gruppe $\mathrm{SL}_2(11)$ vom Grad 8.

Schließlich sei χ der irreduzible aber nicht unipotente Charakter vom Grad 8. Dies ist der einzige Charakter der weder unipotent noch halbeinfach ist. Wegen der Formel $\chi(1) = \chi_h(1)\chi_u(1)$ kann χ_h nur ein Charakter vom Grad 1 sein. Die unipotenten Charaktere bilden eine geometrische Konjugiertenklasse, in der auch der 1-Charakter liegt (siehe (10.3)). Weil χ nicht unipotent ist, kann χ_h nur der andere Charakter vom Grad 1 sein. Das zugehörige Element $s^* \in G^{*F^*}$ ist das Element, das im Zentrum liegt, aber nicht das 1-Element ist. Der Zentralisator $\mathrm{C}_{G^{*F^*}}(s^*)$ ist also wie im letzten Fall die ganze Gruppe G^{*F^*} und der gesuchte unipotente Charakter χ_u dieser Gruppe ist der unipotente Charakter vom Grad 8.

c) Das folgende Beispiel zeigt deutlich, dass die hier vorgestellten Mittel nur in wenigen Fällen ausreichen, um die JORDAN-Zerlegung irreduzibler Charaktere zu bestimmen.

Sei $G^F = \mathrm{SO}_7(3)$. Dann ist $G^{*F^*} = \mathrm{Sp}_6(3)$. In der Gruppe G^F gibt es $|G^F|/q^l = 339655680$ unipotente Elemente, die in einer Konjugiertenklasse liegen. Diese Konjugiertenklasse ist durch die Größe eindeutig bestimmt. Man kann also die unipotenten und die halbeinfachen Charaktere bestimmen.

Sei χ einer der beiden irreduziblen Charaktere vom Grad 1092. Dann ist χ weder halbeinfach noch unipotent. Aus den Graden der halbeinfachen Charaktere ermittelt man, dass der halbeinfache Charakter χ_h, der in der gleichen geometrischen Konjugiertenklasse wie χ liegt, den Grad 1, 91 oder 182 haben muss. Es gibt jeweils zwei halbeinfache Charaktere mit diesen Graden. Der zugehörige unipotente Charakter χ_u von $\mathrm{C}_{G^{*F^*}}(s^*)$ hätte dann den Grad 1092, 12 oder 6. Man kann ausschließen, dass $\chi_h(1) = 1$ ist, weil in diesem Fall $\mathrm{C}_{G^{*F^*}}(s^*) = G^{*F^*} = \mathrm{Sp}_6(3)$ gilt, und diese Gruppe keinen unipotenten Charakter mit Grad 1092 besitzt. Sei χ_h so, dass $\chi_h(1) = 91$ ist, dann gilt $|\mathrm{C}_{G^{*F^*}}(s^*)|_{p'} = 5120$. Es gibt zwei Konjugiertenklassen, so dass die zugehörige Zentralisatorordnung einen p'-Teil von 5120 hat. In beiden Fällen ist $|\mathrm{C}_{G^{*F^*}}(s^*)| = 1244160$. Ist $\chi_h(1) = 182$, dann gilt $|\mathrm{C}_{G^{*F^*}}(s^*)|_{p'} = 2560$. Auch in diesem Fall gibt es zwei Konjugiertenklassen, mit diesem p'-Teil der zugehörigen Zentralisatorordnung die in beiden Fällen gleich 207360 ist. Die Ordnungen dieser Zentralisatoren ist zu groß, um zu bestimmen, um was für Gruppen es sich dabei handelt. Deshalb kann man keinen der beiden Fälle $\chi_h(1) = 91$ oder $\chi_h(1) = 182$ ausschließen. Mit den hier vorgestellten Aussagen ist es also nicht möglich, den halbeinfachen Charakter χ_h zu χ zu bestimmen. Selbst den Grad, den χ_h haben muss, findet man nicht heraus.

Anhang A: Charakter-Tafeln in GAP

Die folgende Tabelle enthält Namen von GAP-Charaktertafeln von endlichen Gruppen vom Lie-Typ und von den zugehörigen einfachen Gruppen. Dabei steht in der dritten Spalte der erste Name für die adjungierte, der zweite für die einfach zusammenhängende und der dritte für die zugehörige einfache Gruppe.

Lie-Typ	q	GAP-Namen der Charaktertafeln
A_1	2	`"S3"`
	3	`"s4", "2.L2(3)", "a4"`
	4	`"A5"`
	5	`"A5.2", "2.A5", "A5"`
	7	`"L3(2).2", "2.L3(2)", "L3(2)"`
	8	`"L2(8)"`
	9	`"A6.2_1", "2.A6", "A6"`
	11	`"L2(11).2", "2.L2(11)", "L2(11)"`
	13	`"L2(13).2", "2.L2(13)", "L2(13)"`
	16	`"L2(16)"`
	17	`"L2(17).2", "2.L2(17)", "L2(17)"`
	19	`"L2(19).2", "2.L2(19)", "L2(19)"`
	23	`"L2(23).2", "2.L2(23)", "L2(23)"`
	25	`"L2(25).2_1", "2.L2(25)", "L2(25)"`
	27	`"L2(27).2", "2.L2(27)", "L2(27)"`
	29	`"L2(29).2", "2.L2(29)", "L2(29)"`
	31	`"L2(31).2", "2.L2(31)", "L2(31)"`
	32	`"L2(32)"`
	49	`"L2(49).2_1", "2.L2(49)", "L2(49)"`
	64	`"L2(64)"`
A_2	2	`"L3(2)"`
	3	`"L3(3)"`
	4	`"L3(4).3", "3.L3(4)", "L3(4)",`
	5	`"L3(5)"`
	7	`"L3(7).3", "3.L3(7)", "L3(7)",`
	8	`"L3(8)"`
	9	`"L3(9)"`
	11	`"L3(11)"`
A_3	2	`"A8"`
	3	`"L4(3).2_1", "2.L4(3)", "L4(3)"`
	4	`"L4(4)"`
A_4	2	`"L5(2)"`
	3	`"L5(3)"`
A_5	2	`"L6(2)"`
A_6	2	`"L7(2)"`
A_7	2	`"L8(2)"`

LIE-Typ	q	GAP-Namen der Charaktertafeln
$^2A_2$	2	, ,"3^2:Q8"
	3	"U3(3)"
	4	"U3(4)"
	5	"U3(5).3", "3.U3(5)", "U3(5)"
	7	"U3(7)"
	8	, "3.U3(8)", "U3(8)"
	9	"U3(9)"
	11	"U3(11).3", "3.U3(11)", "U3(11)"
$^2A_3$	2	"U4(2)"
	3	"U4(3).4", "4.U4(3)", "U4(3)"
	4	"U4(4)"
	5	, , "U4(5)"
$^2A_4$	2	"U5(2)"
$^2A_5$	2	"U6(2).3", "3.U6(2)", "U6(2)"
B_3	3	"O7(3).2", "2.O7(3)", "O7(3)"
	5	"O7(5).2", , "O7(5)"
C_2	2	"A6.2_1"
	3	"U4(2).2", "2.U4(2)", "U4(2)"
	4	"S4(4)"
	5	"S4(5).2", "2.S4(5)", "S4(5)"
	7	"S4(7).2", , "S4(7)"
	8	"S4(8)"
C_3	2	"S6(2)"
	3	"S6(3).2", "2.S6(3)", "S6(3)"
	4	"S6(4)"
	5	, ,"S6(5)"
C_4	2	"S8(2)"
	3	, , "S8(3)"
C_5	2	"S10(2)"
C_6	2	"S12(2)"
D_4	2	"O8+(2)"
	3	"O8+(3).(2^2)_{111}", , "O8+(3)"
D_5	2	"O10+(2)"
$^2D_4$	2	"O8-(2)"
$^2D_5$	2	"O10-(2)"

LIE-Typ	q	GAP-Namen der Charaktertafeln
$^3D_4$	2	`"3D4(2)"`
E_6	2	`"E6(2)"`
$^2E_6$	2	`"2E6(2).3", , "2E6(2)"`
F_4	2	`"F4(2)"`
G_2	2	`"U3(3).2"`
	3	`"G2(3)"`
	4	`"G2(4)"`
	5	`"G2(5)"`
LIE-Typ	q^2	GAP-Namen der Charaktertafeln
$^2B_2$	2	`"5:4"`
	8	`"Sz(8)"`
	32	`"Sz(32)"`
$^2G_2$	3	`"L2(8).3"`
	27	`"R(27)"`
$^2F_4$	2	`"2F4(2)'.2"`
	8	`"2F4(8)"`

Tabelle 11: GAP-Charaktertafeln endlicher Gruppen vom LIE-Typ

Anhang B: Charaktergrade unipotenter Charaktere

Die Charaktergrade unipotenter Charaktere sind in den folgenden Tabellen angegeben. Für die Gruppen der klassischen Typen sind die Werte mit den Gradformeln aus (5.1) ausgerechnet worden. Die Tabellen zu den exzeptionellen Gruppen sind aus [Car85] Abschnitt 13.9.

Aus Gründen der Übersichtlichkeit werden die Polynome in q als Produkt von Kreisteilungspolynomen Φ_k dargestellt. Mit Φ_k wird dabei das Polynom über $\mathbb{Q}$ in q bezeichnet, dessen Nullstellen die primitiven k-ten Einheitswurzeln sind.

Die expliziten Charaktergrade sind für die Fälle gegeben, in denen sich die zugehörige Gruppe in der Charaktertafel-Bibliothek `CTblLib` von GAP befindet.

Label	Grad
(2)	1
$(1,1)$	q

Tabelle 12: Grade unipotenter Charaktere vom Typ A_1

Label	Grad q	$q=2$	$q=3$	$q=4$	$q=5$	$q=7$	$q=8$	$q=9$	$q=11$
(3)	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$(2,1)$	$q\Phi_2$	6	12	20	30	56	72	90	132
$(1,1,1)$	q^3	8	27	64	125	343	512	729	1331

Tabelle 13: Grade unipotenter Charaktere vom Typ A_2

Label	Grad q	$q=2$	$q=3$	$q=4$
(4)	1	1	1	1
$(3,1)$	$q\Phi_3$	14	39	84
$(2,2)$	$q^2\Phi_4$	20	90	272
$(2,1,1)$	$q^3\Phi_3$	56	351	1344
$(1,1,1,1)$	q^6	64	729	4096

Tabelle 14: Grade unipotenter Charaktere vom Typ A_3

Label	Grad		
	q	$q=2$	$q=3$
(5)	1	1	1
$(4,1)$	$q\Phi_2\Phi_4$	30	120
$(3,2)$	$q^2\Phi_5$	124	1089
$(3,1,1)$	$q^3\Phi_3\Phi_4$	280	3510
$(2,2,1)$	$q^4\Phi_5$	496	9801
$(2,1,1,1)$	$q^6\Phi_2\Phi_4$	960	29160
$(1,1,1,1,1)$	q^{10}	1024	59049

Tabelle 15: Grade unipotenter Charaktere vom Typ A_4

Label	Grad	
	q	$q=2$
(6)	1	1
$(5,1)$	$q\Phi_5$	62
$(4,2)$	$q^2\Phi_3^2\Phi_6$	588
$(4,1,1)$	$q^3\Phi_4\Phi_5$	1240
$(3,3)$	$q^3\Phi_5\Phi_6$	744
$(3,2,1)$	$q^4\Phi_2^3\Phi_4\Phi_6$	6480
$(3,1,1,1)$	$q^6\Phi_4\Phi_5$	9920
$(2,2,2)$	$q^6\Phi_5\Phi_6$	5952
$(2,2,1,1)$	$q^7\Phi_3^2\Phi_6$	18816
$(2,1,1,1,1)$	$q^{10}\Phi_5$	31744
$(1,1,1,1,1,1)$	q^{15}	32768

Tabelle 16: Grade unipotenter Charaktere vom Typ A_5

Label	Grad	
	q	$q=2$
(7)	1	1
$(6,1)$	$q\Phi_2\Phi_3\Phi_6$	126
$(5,2)$	$q^2\Phi_4\Phi_7$	2540
$(5,1,1)$	$q^3\Phi_3\Phi_5\Phi_6$	5208
$(4,3)$	$q^3\Phi_2\Phi_6\Phi_7$	9144
$(4,2,1)$	$q^4\Phi_5\Phi_7$	62992
$(4,1,1,1)$	$q^6\Phi_2\Phi_4\Phi_5\Phi_6$	89280
$(3,3,1)$	$q^5\Phi_3\Phi_6\Phi_7$	85344
$(3,2,2)$	$q^6\Phi_3\Phi_6\Phi_7$	170688
$(3,2,1,1)$	$q^7\Phi_5\Phi_7$	503936
$(3,1,1,1,1)$	$q^{10}\Phi_3\Phi_5\Phi_6$	666624
$(2,2,2,1)$	$q^9\Phi_2\Phi_6\Phi_7$	585216
$(2,2,1,1,1)$	$q^{11}\Phi_4\Phi_7$	1300480
$(2,1,1,1,1,1)$	$q^{15}\Phi_2\Phi_3\Phi_6$	2064384
$(1,1,1,1,1,1,1)$	q^{21}	2097152

Tabelle 17: Grade unipotenter Charaktere vom Typ A_6

Label	Grad q	$q=2$
(8)	1	1
$(7,1)$	$q\Phi_7$	254
$(6,2)$	$q^2\Phi_4\Phi_5\Phi_8$	10540
$(6,1,1)$	$q^3\Phi_3\Phi_6\Phi_7$	21336
$(5,3)$	$q^3\Phi_4\Phi_7\Phi_8$	86360
$(5,2,1)$	$q^4\Phi_2^3\Phi_4^2\Phi_6\Phi_8$	550800
$(5,1,1,1)$	$q^6\Phi_5\Phi_6\Phi_7$	755904
$(4,4)$	$q^4\Phi_6\Phi_7\Phi_8$	103632
$(4,3,1)$	$q^5\Phi_5\Phi_7\Phi_8$	2141728
$(4,2,2)$	$q^6\Phi_4^2\Phi_7\Phi_8$	3454400
$(4,2,1,1)$	$q^7\Phi_3^2\Phi_5\Phi_6\Phi_8$	9916032
$(4,1,1,1,1)$	$q^{10}\Phi_5\Phi_6\Phi_7$	12094464
$(3,3,2)$	$q^7\Phi_3\Phi_6\Phi_7\Phi_8$	5803392
$(3,3,1,1)$	$q^8\Phi_4^2\Phi_7\Phi_8$	13817600
$(3,2,2,1)$	$q^9\Phi_5\Phi_7\Phi_8$	34267648
$(3,2,1,1,1)$	$q^{11}\Phi_2^3\Phi_4^2\Phi_6\Phi_8$	70502400
$(3,1,1,1,1,1)$	$q^{15}\Phi_3\Phi_6\Phi_7$	87392256
$(2,2,2,2)$	$q^{12}\Phi_6\Phi_7\Phi_8$	26529792
$(2,2,2,1,1)$	$q^{13}\Phi_4\Phi_7\Phi_8$	88432640
$(2,2,1,1,1,1)$	$q^{16}\Phi_4\Phi_5\Phi_8$	172687360
$(2,1,1,1,1,1,1)$	$q^{21}\Phi_7$	266338304
$(1,1,1,1,1,1,1,1)$	q^{28}	268435456

Tabelle 18: Grade unipotenter Charaktere vom Typ A_7

Label	Grad q	$q=2$	$q=3$	$q=4$	$q=5$	$q=7$	$q=8$	$q=9$	$q=11$
(3)	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$(2,1)$	$q\Phi_1$	2	6	12	20	42	56	72	110
$(1,1,1)$	q^3	8	27	64	125	343	512	729	1331

Tabelle 19: Grade unipotenter Charaktere vom Typ ${}^2A_2$

Label	Grad q	$q=2$	$q=3$	$q=4$	$q=5$
(4)	1	1	1	1	1
$(3,1)$	$q\Phi_6$	6	21	52	105
$(2,2)$	$q^2\Phi_4$	20	90	272	650
$(2,1,1)$	$q^3\Phi_6$	24	189	832	2625
$(1,1,1,1)$	q^6	64	729	4096	15625

Tabelle 20: Grade unipotenter Charaktere vom Typ ${}^2A_3$

Label	Grad q	$q = 2$
(5)	1	1
$(4,1)$	$q\Phi_1\Phi_4$	10
$(3,2)$	$q^2\Phi_{10}$	44
$(3,1,1)$	$q^3\Phi_4\Phi_6$	120
$(2,2,1)$	$q^4\Phi_{10}$	176
$(2,1,1,1)$	$q^6\Phi_1\Phi_4$	320
$(1,1,1,1,1)$	q^{10}	1024

Tabelle 21: Grade unipotenter Charaktere vom Typ ${}^2A_4$

Label	Grad q	$q = 2$
(6)	1	1
$(5,1)$	$q\Phi_{10}$	22
$(4,2)$	$q^2\Phi_3\Phi_6^2$	252
$(4,1,1)$	$q^3\Phi_4\Phi_{10}$	440
$(3,3)$	$q^3\Phi_3\Phi_{10}$	616
$(3,2,1)$	$q^4\Phi_1^3\Phi_3\Phi_4$	560
$(3,1,1,1)$	$q^6\Phi_4\Phi_{10}$	3520
$(2,2,2)$	$q^6\Phi_3\Phi_{10}$	4928
$(2,2,1,1)$	$q^7\Phi_3\Phi_6^2$	8064
$(2,1,1,1,1)$	$q^{10}\Phi_{10}$	11264
$(1,1,1,1,1,1)$	q^{15}	32768

Tabelle 22: Grade unipotenter Charaktere vom Typ ${}^2A_5$

Label	Grad q	$q=2$	$q=3$	$q=4$	$q=5$	$q=7$	$q=8$
$\binom{2}{-}$	1	1	1	1	1	1	1
$\binom{0\,1\,2}{-}$	$\frac{1}{2}q\Phi_1^2$	1	6	18	40	126	196
$\binom{1\,2}{0}$	$\frac{1}{2}q\Phi_4$	5	15	34	65	175	260
$\binom{0\,1}{2}$	$\frac{1}{2}q\Phi_4$	5	15	34	65	175	260
$\binom{0\,2}{1}$	$\frac{1}{2}q\Phi_2^2$	9	24	50	90	224	324
$\binom{0\,1\,2}{1\,2}$	q^4	16	81	256	625	2401	4096

Tabelle 23: Grade unipotenter Charaktere vom Typ B_2 und C_2

Label	Grad q	$q=2$	$q=3$	$q=4$	$q=5$
$\binom{3}{-}$	1	1	1	1	1
$\binom{0\,1\,3}{-}$	$\frac{1}{2}q\Phi_1^2\Phi_3$	7	78	378	1240
$\binom{0\,1}{3}$	$\frac{1}{2}q\Phi_4\Phi_6$	15	105	442	1365
$\binom{1\,3}{0}$	$\frac{1}{2}q\Phi_2^2\Phi_6$	27	168	650	1890
$\binom{0\,3}{1}$	$\frac{1}{2}q\Phi_3\Phi_4$	35	195	714	2015
$\binom{0\,2}{2}$	$q^2\Phi_3\Phi_6$	84	819	4368	16275
$\binom{1\,2}{1}$	$q^3\Phi_3\Phi_6$	168	2457	17472	81375
$\binom{0\,1\,2\,3}{1}$	$\frac{1}{2}q^4\Phi_1^2\Phi_3$	56	2106	24192	155000
$\binom{1\,2\,3}{0\,1}$	$\frac{1}{2}q^4\Phi_4\Phi_6$	120	2835	28288	170625
$\binom{0\,1\,2}{1\,3}$	$\frac{1}{2}q^4\Phi_2^2\Phi_6$	216	4536	41600	236250
$\binom{0\,1\,3}{1\,2}$	$\frac{1}{2}q^4\Phi_3\Phi_4$	280	5265	45696	251875
$\binom{0\,1\,2\,3}{1\,2\,3}$	q^9	512	19683	262144	1953125

Tabelle 24: Grade unipotenter Charaktere vom Typ B_3 und C_3

Label	Grad q	$q=2$	$q=3$
$\binom{4}{-}$	1	1	1
$\binom{0\,1\,4}{-}$	$\frac{1}{2}q\Phi_1^2\Phi_3\Phi_4$	35	780
$\binom{0\,1}{4}$	$\frac{1}{2}q\Phi_6\Phi_8$	51	861
$\binom{1\,4}{0}$	$\frac{1}{2}q\Phi_3\Phi_8$	119	1599
$\binom{0\,4}{1}$	$\frac{1}{2}q\Phi_2^2\Phi_4\Phi_6$	135	1680
$\binom{0\,2\,3}{-}$	$\frac{1}{2}q^2\Phi_1^2\Phi_3\Phi_8$	238	19188
$\binom{2\,3}{0}$	$\frac{1}{2}q^2\Phi_4\Phi_6\Phi_8$	510	25830
$\binom{0\,2}{3}$	$\frac{1}{2}q^2\Phi_2^2\Phi_6\Phi_8$	918	41328
$\binom{0\,3}{2}$	$\frac{1}{2}q^2\Phi_3\Phi_4\Phi_8$	1190	47970
$\binom{1\,3}{1}$	$q^3\Phi_4^2\Phi_8$	3400	221400
$\binom{0\,1\,2\,4}{1}$	$\frac{1}{2}q^4\Phi_1^2\Phi_2^2\Phi_3\Phi_6$	1512	235872
$\binom{1\,2\,4}{0\,1}$	$\frac{1}{2}q^4\Phi_3\Phi_6\Phi_8$	2856	302211
$\binom{0\,1\,2}{1\,4}$	$\frac{1}{2}q^4\Phi_3\Phi_6\Phi_8$	2856	302211
$\binom{0\,1\,4}{1\,2}$	$\frac{1}{2}q^4\Phi_3\Phi_4^2\Phi_6$	4200	368550
$\binom{1\,2}{2}$	$q^4\Phi_3\Phi_6\Phi_8$	5712	604422
$\binom{0\,1\,3}{1\,3}$	$q^5\Phi_4^2\Phi_8$	13600	1992600
$\binom{0\,1\,2\,3}{2}$	$\frac{1}{2}q^6\Phi_1^2\Phi_3\Phi_8$	3808	1554228
$\binom{0\,1\,2}{2\,3}$	$\frac{1}{2}q^6\Phi_4\Phi_6\Phi_8$	8160	2092230
$\binom{1\,2\,3}{0\,2}$	$\frac{1}{2}q^6\Phi_2^2\Phi_6\Phi_8$	14688	3347568
$\binom{0\,2\,3}{1\,2}$	$\frac{1}{2}q^6\Phi_3\Phi_4\Phi_8$	19040	3885570
$\binom{0\,1\,2\,3\,4}{1\,2}$	$\frac{1}{2}q^9\Phi_1^2\Phi_3\Phi_4$	8960	5117580
$\binom{1\,2\,3\,4}{0\,1\,2}$	$\frac{1}{2}q^9\Phi_6\Phi_8$	13056	5649021
$\binom{0\,1\,2\,4}{1\,2\,3}$	$\frac{1}{2}q^9\Phi_2^2\Phi_4\Phi_6$	34560	11022480
$\binom{0\,1\,2\,3}{1\,2\,4}$	$\frac{1}{2}q^9\Phi_3\Phi_8$	30464	10491039
$\binom{0\,1\,2\,3\,4}{1\,2\,3\,4}$	q^{16}	65536	43046721

Tabelle 25: Grade unipotenter Charaktere vom Typ B_4 und C_4

Label	Grad q	$q=2$
$\binom{5}{-}$	1	1
$\binom{0\,1\,5}{-}$	$\frac{1}{2}q\Phi_1^2\Phi_4\Phi_5$	155
$\binom{0\,1}{5}$	$\frac{1}{2}q\Phi_8\Phi_{10}$	187
$\binom{1\,5}{0}$	$\frac{1}{2}q\Phi_2^2\Phi_4\Phi_{10}$	495
$\binom{0\,5}{1}$	$\frac{1}{2}q\Phi_5\Phi_8$	527
$\binom{0\,2\,4}{-}$	$\frac{1}{2}q^2\Phi_1^2\Phi_2^2\Phi_5\Phi_{10}$	6138
$\binom{2\,4}{0}$	$\frac{1}{2}q^2\Phi_5\Phi_8\Phi_{10}$	11594
$\binom{0\,2}{4}$	$\frac{1}{2}q^2\Phi_5\Phi_8\Phi_{10}$	11594
$\binom{0\,4}{2}$	$\frac{1}{2}q^2\Phi_4^2\Phi_5\Phi_{10}$	17050
$\binom{0\,1\,2\,5}{1}$	$\frac{1}{2}q^4\Phi_1^2\Phi_3\Phi_5\Phi_8$	29512
$\binom{0\,1\,2}{1\,5}$	$\frac{1}{2}q^4\Phi_2^2\Phi_6\Phi_8\Phi_{10}$	40392

Label	q	$q=2$
$\binom{1\,2\,5}{0\,1}$	$\frac{1}{2}q^4\Phi_3\Phi_4\Phi_8\Phi_{10}$	52360
$\binom{0\,1\,5}{1\,2}$	$\frac{1}{2}q^4\Phi_4\Phi_5\Phi_6\Phi_8$	63240
$\binom{0\,3}{3}$	$q^3\Phi_5\Phi_8\Phi_{10}$	46376
$\binom{1\,2\,3}{-}$	$\frac{1}{2}q^4\Phi_1^2\Phi_5\Phi_8\Phi_{10}$	46376
$\binom{2\,3}{1}$	$\frac{1}{2}q^4\Phi_4\Phi_5\Phi_8\Phi_{10}$	231880
$\binom{1\,2}{3}$	$\frac{1}{2}q^4\Phi_4\Phi_5\Phi_8\Phi_{10}$	231880
$\binom{1\,3}{2}$	$\frac{1}{2}q^4\Phi_2^2\Phi_5\Phi_8\Phi_{10}$	417384
$\binom{1\,4}{1}$	$q^3\Phi_3\Phi_5\Phi_6\Phi_{10}$	57288
$\binom{0\,1\,3\,4}{1}$	$\frac{1}{2}q^5\Phi_1^2\Phi_3\Phi_4\Phi_5\Phi_{10}$	190960
$\binom{1\,3\,4}{0\,1}$	$\frac{1}{2}q^5\Phi_5\Phi_6\Phi_8\Phi_{10}$	278256
$\binom{0\,1\,3}{1\,4}$	$\frac{1}{2}q^5\Phi_3\Phi_5\Phi_8\Phi_{10}$	649264
$\binom{0\,1\,4}{1\,3}$	$\frac{1}{2}q^5\Phi_2^2\Phi_4\Phi_5\Phi_6\Phi_{10}$	736560
$\binom{0\,1\,2\,3}{3}$	$\frac{1}{2}q^7\Phi_1^2\Phi_5\Phi_8\Phi_{10}$	371008
$\binom{1\,2\,3}{0\,3}$	$\frac{1}{2}q^7\Phi_4\Phi_5\Phi_8\Phi_{10}$	1855040
$\binom{0\,1\,3}{2\,3}$	$\frac{1}{2}q^7\Phi_4\Phi_5\Phi_8\Phi_{10}$	1855040
$\binom{0\,2\,3}{1\,3}$	$\frac{1}{2}q^7\Phi_2^2\Phi_5\Phi_8\Phi_{10}$	3339072
$\binom{0\,1\,2\,4}{2}$	$\frac{1}{2}q^6\Phi_1^2\Phi_3\Phi_4\Phi_5\Phi_{10}$	381920
$\binom{0\,1\,2}{2\,4}$	$\frac{1}{2}q^6\Phi_5\Phi_6\Phi_8\Phi_{10}$	556512
$\binom{1\,2\,4}{0\,2}$	$\frac{1}{2}q^6\Phi_3\Phi_5\Phi_8\Phi_{10}$	1298528
$\binom{0\,2\,4}{1\,2}$	$\frac{1}{2}q^6\Phi_2^2\Phi_4\Phi_5\Phi_6\Phi_{10}$	1473120
$\binom{0\,1\,2\,3\,5}{1\,2}$	$\frac{1}{2}q^9\Phi_1^2\Phi_3\Phi_5\Phi_8$	944384
$\binom{1\,2\,3\,5}{0\,1\,2}$	$\frac{1}{2}q^9\Phi_2^2\Phi_6\Phi_8\Phi_{10}$	1292544
$\binom{0\,1\,2\,3}{1\,2\,5}$	$\frac{1}{2}q^9\Phi_3\Phi_4\Phi_8\Phi_{10}$	1675520
$\binom{0\,1\,2\,5}{1\,2\,3}$	$\frac{1}{2}q^9\Phi_4\Phi_5\Phi_6\Phi_8$	2023680
$\binom{0\,1\,2\,3\,4}{1\,3}$	$\frac{1}{2}q^{11}\Phi_1^2\Phi_2^2\Phi_5\Phi_{10}$	3142656
$\binom{1\,2\,3\,4}{0\,1\,3}$	$\frac{1}{2}q^{11}\Phi_5\Phi_8\Phi_{10}$	5936128
$\binom{0\,1\,2\,3}{1\,3\,4}$	$\frac{1}{2}q^{11}\Phi_5\Phi_8\Phi_{10}$	5936128
$\binom{0\,1\,3\,4}{1\,2\,3}$	$\frac{1}{2}q^{11}\Phi_4^2\Phi_5\Phi_{10}$	8729600
$\binom{0\,1\,2\,3\,4\,5}{1\,2\,3}$	$\frac{1}{2}q^{16}\Phi_1^2\Phi_4\Phi_5$	5079040
$\binom{1\,2\,3\,4\,5}{0\,1\,2\,3}$	$\frac{1}{2}q^{16}\Phi_8\Phi_{10}$	6127616
$\binom{0\,1\,2\,3\,4}{1\,2\,3\,5}$	$\frac{1}{2}q^{16}\Phi_2^2\Phi_4\Phi_{10}$	16220160
$\binom{0\,1\,2\,3\,5}{1\,2\,3\,4}$	$\frac{1}{2}q^{16}\Phi_5\Phi_8$	17268736
$\binom{1\,2\,3}{1\,2}$	$q^{10}\Phi_5\Phi_8\Phi_{10}$	5936128
$\binom{0\,1\,2\,4}{1\,2\,4}$	$q^{10}\Phi_3\Phi_5\Phi_6\Phi_{10}$	7332864
$\binom{0\,1\,2\,3\,4\,5}{1\,2\,3\,4\,5}$	q^{25}	33554432

Tabelle 26: Grade unipotenter Charaktere vom Typ B_5 und C_5

Label	Grad	
	q	$q=2$
$\binom{6}{-}$	1	1
$\binom{0\,1\,6}{-}$	$\frac{1}{2}q\Phi_1^2\Phi_3\Phi_5\Phi_6$	651
$\binom{0\,1}{6}$	$\frac{1}{2}q\Phi_4\Phi_{10}\Phi_{12}$	715
$\binom{1\,6}{0}$	$\frac{1}{2}q\Phi_4\Phi_5\Phi_{12}$	2015
$\binom{0\,6}{1}$	$\frac{1}{2}q\Phi_2^2\Phi_3\Phi_6\Phi_{10}$	2079
$\binom{0\,2\,5}{-}$	$\frac{1}{2}q^2\Phi_1^2\Phi_3^2\Phi_5\Phi_6\Phi_{12}$	118482
$\binom{0\,2}{5}$	$\frac{1}{2}q^2\Phi_2^2\Phi_3\Phi_6^2\Phi_{10}\Phi_{12}$	162162
$\binom{2\,5}{0}$	$\frac{1}{2}q^2\Phi_3^2\Phi_4\Phi_6\Phi_{10}\Phi_{12}$	210210
$\binom{0\,5}{2}$	$\frac{1}{2}q^2\Phi_3\Phi_4\Phi_5\Phi_6^2\Phi_{12}$	253890
$\binom{0\,1\,2\,6}{1}$	$\frac{1}{2}q^4\Phi_1^2\Phi_2^2\Phi_3\Phi_5\Phi_6\Phi_{10}$	515592
$\binom{0\,1\,2}{1\,6}$	$\frac{1}{2}q^4\Phi_5\Phi_8\Phi_{10}\Phi_{12}$	602888
$\binom{1\,2\,6}{0\,1}$	$\frac{1}{2}q^4\Phi_4^2\Phi_5\Phi_{10}\Phi_{12}$	886600
$\binom{0\,1\,6}{1\,2}$	$\frac{1}{2}q^4\Phi_3\Phi_5\Phi_6\Phi_8\Phi_{10}$	973896
$\binom{0\,3\,4}{-}$	$\frac{1}{2}q^3\Phi_1^2\Phi_3\Phi_4\Phi_5\Phi_{10}\Phi_{12}$	620620
$\binom{3\,4}{0}$	$\frac{1}{2}q^3\Phi_5\Phi_6\Phi_8\Phi_{10}\Phi_{12}$	904332
$\binom{0\,3}{4}$	$\frac{1}{2}q^3\Phi_3\Phi_5\Phi_8\Phi_{10}\Phi_{12}$	2110108
$\binom{0\,4}{3}$	$\frac{1}{2}q^3\Phi_2^2\Phi_4\Phi_5\Phi_6\Phi_{10}\Phi_{12}$	2393820
$\binom{1\,5}{1}$	$q^3\Phi_3\Phi_4^2\Phi_6\Phi_8\Phi_{12}$	928200
$\binom{1\,2\,4}{-}$	$\frac{1}{2}q^4\Phi_1^2\Phi_3^2\Phi_5\Phi_6\Phi_{10}\Phi_{12}$	5213208
$\binom{1\,2}{4}$	$\frac{1}{2}q^4\Phi_3\Phi_4\Phi_5\Phi_6^2\Phi_{10}\Phi_{12}$	11171160
$\binom{2\,4}{1}$	$\frac{1}{2}q^4\Phi_2^2\Phi_3\Phi_5\Phi_6^2\Phi_{10}\Phi_{12}$	20108088
$\binom{1\,4}{2}$	$\frac{1}{2}q^4\Phi_3^2\Phi_4\Phi_5\Phi_6\Phi_{10}\Phi_{12}$	26066040
$\binom{0\,1\,2\,3\,4}{-}$	$\frac{1}{4}q^7\Phi_1^6\Phi_3^2\Phi_5\Phi_{10}\Phi_{12}$	6950944
$\binom{0\,1\,2\,3}{4}$	$\frac{1}{4}q^7\Phi_1^2\Phi_3\Phi_5\Phi_6\Phi_8\Phi_{10}\Phi_{12}$	50642592
$\binom{1\,2\,3\,4}{0}$	$\frac{1}{4}q^7\Phi_1^2\Phi_3\Phi_5\Phi_6\Phi_8\Phi_{10}\Phi_{12}$	50642592
$\binom{2\,3\,4}{0\,1}$	$\frac{1}{4}q^7\Phi_4\Phi_5\Phi_6^2\Phi_8\Phi_{10}\Phi_{12}$	108519840
$\binom{0\,1\,2}{3\,4}$	$\frac{1}{4}q^7\Phi_4\Phi_5\Phi_6^2\Phi_8\Phi_{10}\Phi_{12}$	108519840
$\binom{0\,2\,3\,4}{1}$	$\frac{1}{4}q^7\Phi_1^2\Phi_2^2\Phi_3\Phi_4\Phi_5\Phi_6\Phi_{10}\Phi_{12}$	134053920
$\binom{0\,1\,2\,4}{3}$	$\frac{1}{4}q^7\Phi_1^2\Phi_2^2\Phi_3\Phi_4\Phi_5\Phi_6\Phi_{10}\Phi_{12}$	134053920
$\binom{0\,1\,3\,4}{2}$	$\frac{1}{4}q^7\Phi_1^2\Phi_3^2\Phi_4^2\Phi_5\Phi_{10}\Phi_{12}$	173773600
$\binom{1\,2\,3}{0\,4}$	$\frac{1}{4}q^7\Phi_2^2\Phi_4^2\Phi_5\Phi_6^2\Phi_{10}\Phi_{12}$	287258400
$\binom{0\,1\,4}{2\,3}$	$\frac{1}{4}q^7\Phi_3\Phi_4^3\Phi_5\Phi_6\Phi_{10}\Phi_{12}$	372372000
$\binom{0\,3\,4}{1\,2}$	$\frac{1}{4}q^7\Phi_3\Phi_4^3\Phi_5\Phi_6\Phi_{10}\Phi_{12}$	372372000
$\binom{1\,3\,4}{0\,2}$	$\frac{1}{4}q^7\Phi_2^2\Phi_3\Phi_5\Phi_6\Phi_8\Phi_{10}\Phi_{12}$	455783328
$\binom{0\,1\,3}{2\,4}$	$\frac{1}{4}q^7\Phi_2^2\Phi_3\Phi_5\Phi_6\Phi_8\Phi_{10}\Phi_{12}$	455783328
$\binom{1\,2\,4}{0\,3}$	$\frac{1}{4}q^7\Phi_3^2\Phi_4\Phi_5\Phi_8\Phi_{10}\Phi_{12}$	590830240
$\binom{0\,2\,3}{1\,4}$	$\frac{1}{4}q^7\Phi_3^2\Phi_4\Phi_5\Phi_8\Phi_{10}\Phi_{12}$	590830240
$\binom{0\,2\,4}{1\,3}$	$\frac{1}{4}q^7\Phi_2^6\Phi_5\Phi_6^2\Phi_{10}\Phi_{12}$	930717216
$\binom{0\,1\,3\,5}{1}$	$\frac{1}{2}q^5\Phi_1^2\Phi_3\Phi_4^2\Phi_5\Phi_8\Phi_{12}$	19182800
$\binom{1\,3\,5}{0\,1}$	$\frac{1}{2}q^5\Phi_2^2\Phi_4^2\Phi_6\Phi_8\Phi_{10}\Phi_{12}$	26254800
$\binom{0\,1\,3}{1\,5}$	$\frac{1}{2}q^5\Phi_3\Phi_4^3\Phi_8\Phi_{10}\Phi_{12}$	34034000
$\binom{0\,1\,5}{1\,3}$	$\frac{1}{2}q^5\Phi_4^3\Phi_5\Phi_6\Phi_8\Phi_{12}$	41106000
$\binom{0\,1\,2\,5}{2}$	$\frac{1}{2}q^6\Phi_1^2\Phi_3^2\Phi_4\Phi_5\Phi_6^2\Phi_{12}$	28435680
$\binom{0\,1\,2}{2\,5}$	$\frac{1}{2}q^6\Phi_3^2\Phi_6^2\Phi_8\Phi_{10}\Phi_{12}$	34306272
$\binom{1\,2\,5}{0\,2}$	$\frac{1}{2}q^6\Phi_2^2\Phi_3^2\Phi_4\Phi_6^2\Phi_{10}\Phi_{12}$	90810720

Label	q	$q=2$
$\binom{0\,2\,5}{1\,2}$	$\frac{1}{2}q^6\Phi_3^2\Phi_5\Phi_6^2\Phi_8\Phi_{12}$	96681312
$\binom{1\,3}{3}$	$q^5\Phi_4^2\Phi_5\Phi_8\Phi_{10}\Phi_{12}$	60288800
$\binom{0\,1\,2\,3\,6}{1\,2}$	$\frac{1}{2}q^9\Phi_1^2\Phi_3^2\Phi_5\Phi_8\Phi_{10}$	72717568
$\binom{0\,1\,2\,3}{1\,2\,6}$	$\frac{1}{2}q^9\Phi_4\Phi_5\Phi_8\Phi_{10}\Phi_{12}$	96462080
$\binom{1\,2\,3\,6}{0\,1\,2}$	$\frac{1}{2}q^9\Phi_4\Phi_5\Phi_8\Phi_{10}\Phi_{12}$	96462080
$\binom{0\,1\,2\,6}{1\,2\,3}$	$\frac{1}{2}q^9\Phi_2^2\Phi_5\Phi_6^2\Phi_8\Phi_{10}$	120206592
$\binom{2\,3}{2}$	$q^6\Phi_3\Phi_5\Phi_6\Phi_8\Phi_{10}\Phi_{12}$	101285184
$\binom{0\,1\,4}{1\,4}$	$q^6\Phi_3^2\Phi_5\Phi_6^2\Phi_{10}\Phi_{12}$	125116992
$\binom{0\,1\,2\,4\,5}{1\,2}$	$\frac{1}{2}q^{10}\Phi_1^2\Phi_3^2\Phi_4\Phi_5\Phi_6^2\Phi_{12}$	454970880
$\binom{1\,2\,4\,5}{0\,1\,2}$	$\frac{1}{2}q^{10}\Phi_3^2\Phi_6^2\Phi_8\Phi_{10}\Phi_{12}$	548900352
$\binom{0\,1\,2\,4}{1\,2\,5}$	$\frac{1}{2}q^{10}\Phi_2^2\Phi_3^2\Phi_4\Phi_6^2\Phi_{10}\Phi_{12}$	1452971520
$\binom{0\,1\,2\,5}{1\,2\,4}$	$\frac{1}{2}q^{10}\Phi_3^2\Phi_5\Phi_6^2\Phi_8\Phi_{12}$	1546900992
$\binom{0\,1\,2\,3\,5}{1\,3}$	$\frac{1}{2}q^{11}\Phi_1^2\Phi_3\Phi_4^2\Phi_5\Phi_8\Phi_{12}$	1227699200
$\binom{0\,1\,2\,3}{1\,3\,5}$	$\frac{1}{2}q^{11}\Phi_2^2\Phi_4^2\Phi_6\Phi_8\Phi_{10}\Phi_{12}$	1680307200
$\binom{1\,2\,3\,5}{0\,1\,3}$	$\frac{1}{2}q^{11}\Phi_3\Phi_4^3\Phi_8\Phi_{10}\Phi_{12}$	2178176000
$\binom{0\,1\,3\,5}{1\,2\,3}$	$\frac{1}{2}q^{11}\Phi_4^3\Phi_5\Phi_6\Phi_8\Phi_{12}$	2630784000
$\binom{0\,1\,2\,3\,4}{1\,4}$	$\frac{1}{2}q^{12}\Phi_1^2\Phi_3^2\Phi_5\Phi_6\Phi_{10}\Phi_{12}$	1334581248
$\binom{1\,2\,3\,4}{0\,1\,4}$	$\frac{1}{2}q^{12}\Phi_3\Phi_4\Phi_5\Phi_6^2\Phi_{10}\Phi_{12}$	2859816960
$\binom{0\,1\,2\,4}{1\,3\,4}$	$\frac{1}{2}q^{12}\Phi_2^2\Phi_3\Phi_5\Phi_6^2\Phi_{10}\Phi_{12}$	5147670528
$\binom{0\,1\,3\,4}{1\,2\,4}$	$\frac{1}{2}q^{12}\Phi_3^2\Phi_4\Phi_5\Phi_6\Phi_{10}\Phi_{12}$	6672906240
$\binom{0\,2\,3}{2\,3}$	$q^{10}\Phi_3\Phi_5\Phi_6\Phi_8\Phi_{10}\Phi_{12}$	1620562944
$\binom{1\,2\,4}{1\,2}$	$q^{10}\Phi_3^2\Phi_5\Phi_6^2\Phi_{10}\Phi_{12}$	2001871872
$\binom{0\,1\,2\,3\,4\,6}{1\,2\,3}$	$\frac{1}{2}q^{16}\Phi_1^2\Phi_2^2\Phi_3\Phi_5\Phi_6\Phi_{10}$	2111864832
$\binom{0\,1\,2\,3\,4}{1\,2\,3\,6}$	$\frac{1}{2}q^{16}\Phi_4^2\Phi_5\Phi_{10}\Phi_{12}$	3631513600
$\binom{1\,2\,3\,4\,6}{0\,1\,2\,3}$	$\frac{1}{2}q^{16}\Phi_5\Phi_8\Phi_{10}\Phi_{12}$	2469429248
$\binom{0\,1\,2\,3\,6}{1\,2\,3\,4}$	$\frac{1}{2}q^{16}\Phi_3\Phi_5\Phi_6\Phi_8\Phi_{10}$	3989078016
$\binom{0\,1\,2\,3\,4}{2\,3}$	$\frac{1}{2}q^{15}\Phi_1^2\Phi_3\Phi_4\Phi_5\Phi_{10}\Phi_{12}$	2542059520
$\binom{0\,1\,2\,3}{2\,3\,4}$	$\frac{1}{2}q^{15}\Phi_5\Phi_6\Phi_8\Phi_{10}\Phi_{12}$	3704143872
$\binom{1\,2\,3\,4}{0\,2\,3}$	$\frac{1}{2}q^{15}\Phi_3\Phi_5\Phi_8\Phi_{10}\Phi_{12}$	8643002368
$\binom{0\,2\,3\,4}{1\,2\,3}$	$\frac{1}{2}q^{15}\Phi_2^2\Phi_4\Phi_5\Phi_6\Phi_{10}\Phi_{12}$	9805086720
$\binom{1\,2\,3}{1\,3}$	$q^{11}\Phi_4^2\Phi_5\Phi_8\Phi_{10}\Phi_{12}$	3858483200
$\binom{0\,1\,2\,3\,4\,5}{1\,2\,4}$	$\frac{1}{2}q^{18}\Phi_1^2\Phi_3^2\Phi_5\Phi_6\Phi_{12}$	7764836352
$\binom{1\,2\,3\,4\,5}{0\,1\,2\,4}$	$\frac{1}{2}q^{18}\Phi_2^2\Phi_3\Phi_6^2\Phi_{10}\Phi_{12}$	10627448832
$\binom{0\,1\,2\,3\,4}{1\,2\,4\,5}$	$\frac{1}{2}q^{18}\Phi_3^2\Phi_4\Phi_6\Phi_{10}\Phi_{12}$	13776322560
$\binom{0\,1\,2\,4\,5}{1\,2\,3\,4}$	$\frac{1}{2}q^{18}\Phi_3\Phi_4\Phi_5\Phi_6^2\Phi_{12}$	16638935040
$\binom{0\,1\,2\,3\,4\,5\,6}{1\,2\,3\,4}$	$\frac{1}{2}q^{25}\Phi_1^2\Phi_3\Phi_5\Phi_6$	10921967616
$\binom{1\,2\,3\,4\,5\,6}{0\,1\,2\,3\,4}$	$\frac{1}{2}q^{25}\Phi_4\Phi_{10}\Phi_{12}$	11995709440
$\binom{0\,1\,2\,3\,4\,5}{1\,2\,3\,4\,6}$	$\frac{1}{2}q^{25}\Phi_4\Phi_5\Phi_{12}$	33806090240
$\binom{0\,1\,2\,3\,4\,6}{1\,2\,3\,4\,5}$	$\frac{1}{2}q^{25}\Phi_2^2\Phi_3\Phi_6\Phi_{10}$	34879832064
$\binom{0\,1\,2\,3\,5}{1\,2\,3\,5}$	$q^{17}\Phi_3\Phi_4^2\Phi_6\Phi_8\Phi_{12}$	15207628800
$\binom{0\,1\,2\,3\,4\,5\,6}{1\,2\,3\,4\,5\,6}$	q^{36}	68719476736

Tabelle 27: Grade unipotenter Charaktere vom Typ B_6 und C_6

Label	Grad		
	q	$q=2$	$q=3$
$\binom{0}{4}$	1	1	1
$\binom{1}{3}$	$q\Phi_4^2$	50	300
$\binom{2}{2}$	$q^2\Phi_3\Phi_6$	84	819
$\binom{2}{2}$	$q^2\Phi_3\Phi_6$	84	819
$\binom{0\,1}{1\,4}$	$q^2\Phi_3\Phi_6$	84	819
$\binom{0\,1\,2\,3}{-}$	$\frac{1}{2}q^3\Phi_1^4\Phi_3$	28	2808
$\binom{0\,1}{2\,3}$	$\frac{1}{2}q^3\Phi_4^2\Phi_6$	300	9450
$\binom{1\,2}{0\,3}$	$\frac{1}{2}q^3\Phi_3\Phi_4^2$	700	17550
$\binom{0\,2}{1\,3}$	$\frac{1}{2}q^3\Phi_2^4\Phi_6$	972	24192
$\binom{1\,2}{1\,2}$	$q^6\Phi_3\Phi_6$	1344	66339
$\binom{1\,2}{1\,2}$	$q^6\Phi_3\Phi_6$	1344	66339
$\binom{0\,1\,2}{1\,2\,4}$	$q^6\Phi_3\Phi_6$	1344	66339
$\binom{0\,1\,3}{1\,2\,3}$	$q^7\Phi_4^2$	3200	218700
$\binom{0\,1\,2\,3}{1\,2\,3\,4}$	q^{12}	4096	531441

Tabelle 28: Grade unipotenter Charaktere vom Typ D_4

Label	Grad	
	q	$q=2$
$\binom{0\,4}{-}$	1	1
$\binom{1\,3}{-}$	$q\Phi_8$	34
$\binom{0\,1\,4}{1}$	$q^2\Phi_3\Phi_6$	84
$\binom{1\,2\,3}{0}$	$\frac{1}{2}q^3\Phi_6\Phi_8$	204
$\binom{0\,1\,2}{3}$	$\frac{1}{2}q^3\Phi_6\Phi_8$	204
$\binom{0\,2\,3}{1}$	$\frac{1}{2}q^3\Phi_3\Phi_8$	476
$\binom{0\,1\,3}{2}$	$\frac{1}{2}q^3\Phi_3\Phi_8$	476
$\binom{0\,1\,2\,4}{1\,2}$	$q^6\Phi_3\Phi_6$	1344
$\binom{0\,1\,2\,3}{1\,3}$	$q^7\Phi_8$	2176
$\binom{0\,1\,2\,3\,4}{1\,2\,3}$	q^{12}	4096

Tabelle 29: Grade unipotenter Charaktere vom Typ ${}^2D_4$

Label	Grad q	$q=2$
$\binom{0}{5}$	1	1
$\binom{1}{4}$	$q\Phi_5\Phi_6$	186
$\binom{0\,1}{1\,5}$	$q^2\Phi_4\Phi_8$	340
$\binom{0\,1\,2\,4}{-}$	$\frac{1}{2}q^3\Phi_1^4\Phi_3\Phi_5$	868
$\binom{0\,1}{2\,4}$	$\frac{1}{2}q^3\Phi_5\Phi_6\Phi_8$	6324
$\binom{1\,2}{0\,4}$	$\frac{1}{2}q^3\Phi_4^2\Phi_5\Phi_6$	9300
$\binom{0\,2}{1\,4}$	$\frac{1}{2}q^3\Phi_3\Phi_5\Phi_8$	14756
$\binom{2}{3}$	$q^2\Phi_5\Phi_8$	2108
$\binom{0\,1\,2\,3\,4}{1}$	$\frac{1}{2}q^7\Phi_1^4\Phi_3\Phi_5$	13888
$\binom{0\,1\,2}{1\,3\,4}$	$\frac{1}{2}q^7\Phi_5\Phi_6\Phi_8$	101184
$\binom{1\,2\,3}{0\,1\,4}$	$\frac{1}{2}q^7\Phi_4^2\Phi_5\Phi_6$	148800
$\binom{0\,1\,3}{1\,2\,4}$	$\frac{1}{2}q^7\Phi_3\Phi_5\Phi_8$	236096
$\binom{0\,1\,2}{1\,2\,5}$	$q^6\Phi_3\Phi_6\Phi_8$	22848
$\binom{0\,3}{1\,3}$	$q^4\Phi_4\Phi_5\Phi_8$	42160
$\binom{0\,2}{2\,3}$	$q^5\Phi_5\Phi_6\Phi_8$	50592
$\binom{1\,2}{1\,3}$	$q^6\Phi_4\Phi_5\Phi_8$	168640
$\binom{0\,1\,2\,3}{1\,2\,3\,5}$	$q^{12}\Phi_4\Phi_8$	348160
$\binom{0\,2\,3}{1\,2\,3}$	$q^{10}\Phi_5\Phi_8$	539648
$\binom{0\,1\,2\,4}{1\,2\,3\,4}$	$q^{13}\Phi_5\Phi_6$	761856
$\binom{0\,1\,2\,3\,4}{1\,2\,3\,4\,5}$	q^{20}	1048576

Tabelle 30: Grade unipotenter Charaktere vom Typ D_5

Label	Grad q	$q=2$
$\binom{0\,5}{-}$	1	1
$\binom{1\,4}{-}$	$q\Phi_3\Phi_{10}$	154
$\binom{0\,1\,5}{1}$	$q^2\Phi_4\Phi_8$	340
$\binom{2\,3}{-}$	$q^2\Phi_8\Phi_{10}$	748
$\binom{0\,1\,2}{4}$	$\frac{1}{2}q^3\Phi_6\Phi_8\Phi_{10}$	2244
$\binom{1\,2\,4}{0}$	$\frac{1}{2}q^3\Phi_3\Phi_8\Phi_{10}$	5236
$\binom{0\,1\,4}{2}$	$\frac{1}{2}q^3\Phi_3\Phi_4^2\Phi_{10}$	7700
$\binom{0\,2\,4}{1}$	$\frac{1}{2}q^3\Phi_2^4\Phi_6\Phi_{10}$	10692
$\binom{0\,1\,3}{3}$	$q^4\Phi_4\Phi_8\Phi_{10}$	14960
$\binom{0\,1\,2\,5}{1\,2}$	$q^6\Phi_3\Phi_6\Phi_8$	22848
$\binom{1\,2\,3\,4}{0\,1}$	$\frac{1}{2}q^7\Phi_6\Phi_8\Phi_{10}$	35904
$\binom{0\,1\,2\,3}{1\,4}$	$\frac{1}{2}q^7\Phi_3\Phi_8\Phi_{10}$	83776
$\binom{0\,1\,3\,4}{1\,2}$	$\frac{1}{2}q^7\Phi_3\Phi_4^2\Phi_{10}$	123200
$\binom{0\,1\,2\,4}{1\,3}$	$\frac{1}{2}q^7\Phi_2^4\Phi_6\Phi_{10}$	171072
$\binom{0\,2\,3}{2}$	$q^5\Phi_3\Phi_8\Phi_{10}$	41888
$\binom{1\,2\,3}{1}$	$q^6\Phi_4\Phi_8\Phi_{10}$	59840
$\binom{0\,1\,2\,3}{2\,3}$	$q^{10}\Phi_8\Phi_{10}$	191488
$\binom{0\,1\,2\,3\,5}{1\,2\,3}$	$q^{12}\Phi_4\Phi_8$	348160
$\binom{0\,1\,2\,3\,4}{1\,2\,4}$	$q^{13}\Phi_3\Phi_{10}$	630784
$\binom{0\,1\,2\,3\,4\,5}{1\,2\,3\,4}$	q^{20}	1048576

Tabelle 31: Grade unipotenter Charaktere vom Typ $^2D_5$

Label	Grad q	$q=2$
$\phi_{1,0}$	1	1
$\phi'_{1,3}$	$q\Phi_{12}$	26
$\phi_{2,2}$	$\frac{1}{2}q^3\Phi_2^2\Phi_{12}$	468
$\phi_{2,1}$	$\frac{1}{2}q^3\Phi_2^2\Phi_6^2$	324
${}^3D_4[-1]$	$\frac{1}{2}q^3\Phi_1^2\Phi_3^2$	196
${}^3D_4[1]$	$\frac{1}{2}q^3\Phi_1^2\Phi_{12}$	52
$\phi''_{1,3}$	$q^7\Phi_{12}$	1664
$\phi_{1,6}$	q^{12}	4096

Tabelle 32: Grade unipotenter Charaktere vom Typ ${}^3D_4$

Label	Grad q	$q=2$	$q=3$	$q=4$	$q=5$
$\phi_{1,0}$	1	1	1	1	1
$\phi'_{1,3}$	$\frac{1}{3}q\Phi_3\Phi_6$	14	91	364	1085
$\phi''_{1,3}$	$\frac{1}{3}q\Phi_3\Phi_6$	14	91	364	1085
$\phi_{2,1}$	$\frac{1}{6}q\Phi_2^2\Phi_3$	21	104	350	930
$\phi_{2,2}$	$\frac{1}{2}q\Phi_2^2\Phi_6$	27	168	650	1890
$G_2[1]$	$\frac{1}{6}q\Phi_1^2\Phi_6$	1	14	78	280
$G_2[-1]$	$\frac{1}{2}q\Phi_1^2\Phi_3$	7	78	378	1240
$G_2[\theta]$	$\frac{1}{3}q\Phi_1^2\Phi_2^2$	6	64	300	960
$G_2[\theta^2]$	$\frac{1}{3}q\Phi_1^2\Phi_2^2$	6	64	300	960
$\phi_{1,6}$	q^6	64	729	4096	15625

Tabelle 33: Grade unipotenter Charaktere vom Typ G_2

Label	Grad q	$q=2$
$\phi_{1,0}$	1	1
$\phi_{9,2}$	$q^2\Phi_3^2\Phi_6^2\Phi_{12}$	22932
$\phi'_{8,3}$	$q^3\Phi_4^2\Phi_8\Phi_{12}$	44200
$\phi''_{8,3}$	$q^3\Phi_4^2\Phi_8\Phi_{12}$	44200
$\phi'_{8,9}$	$q^9\Phi_4^2\Phi_8\Phi_{12}$	2828800
$\phi''_{8,9}$	$q^9\Phi_4^2\Phi_8\Phi_{12}$	2828800
$\phi_{9,10}$	$q^{10}\Phi_3^2\Phi_6^2\Phi_{12}$	5870592
$\phi_{1,24}$	q^{24}	16777216
$\phi_{4,1}$	$\frac{1}{2}q\Phi_2^2\Phi_6^2\Phi_8$	1377
$\phi''_{2,4}$	$\frac{1}{2}q\Phi_4\Phi_8\Phi_{12}$	1105
$\phi'_{2,4}$	$\frac{1}{2}q\Phi_4\Phi_8\Phi_{12}$	1105
$B_2,((2)())$	$\frac{1}{2}q\Phi_1^2\Phi_3^2\Phi_8$	833
$\phi_{4,13}$	$\frac{1}{2}q^{13}\Phi_2^2\Phi_6^2\Phi_8$	5640192
$\phi'_{2,16}$	$\frac{1}{2}q^{13}\Phi_4\Phi_8\Phi_{12}$	4526080
$\phi''_{2,16}$	$\frac{1}{2}q^{13}\Phi_4\Phi_8\Phi_{12}$	4526080
$B_2,(()(1,1))$	$\frac{1}{2}q^{13}\Phi_1^2\Phi_3^2\Phi_8$	3411968
$\phi_{12,4}$	$\frac{1}{24}q^4\Phi_2^4\Phi_3^2\Phi_8\Phi_{12}$	584766
$\phi''_{9,6}$	$\frac{1}{8}q^4\Phi_3^2\Phi_4^2\Phi_8\Phi_{12}$	541450
$\phi'_{9,6}$	$\frac{1}{8}q^4\Phi_3^2\Phi_4^2\Phi_8\Phi_{12}$	541450
$\phi''_{1,12}$	$\frac{1}{8}q^4\Phi_4^2\Phi_6^2\Phi_8\Phi_{12}$	99450
$\phi'_{1,12}$	$\frac{1}{8}q^4\Phi_4^2\Phi_6^2\Phi_8\Phi_{12}$	99450
$\phi''_{4,7}$	$\frac{1}{4}q^4\Phi_2^2\Phi_4\Phi_6^2\Phi_8\Phi_{12}$	358020
$\phi'_{4,7}$	$\frac{1}{4}q^4\Phi_2^2\Phi_4\Phi_6^2\Phi_8\Phi_{12}$	358020
$\phi_{4,8}$	$\frac{1}{8}q^4\Phi_2^4\Phi_6^2\Phi_8\Phi_{12}$	322218
$\phi'_{6,6}$	$\frac{1}{3}q^4\Phi_3^2\Phi_6^2\Phi_8\Phi_{12}$	519792
$\phi''_{6,6}$	$\frac{1}{12}q^4\Phi_3^2\Phi_4^2\Phi_6^2\Phi_8$	249900
$\phi_{16,5}$	$\frac{1}{4}q^4\Phi_2^4\Phi_4^2\Phi_6^2\Phi_{12}$	947700
$B_2,((1)(1))$	$\frac{1}{4}q^4\Phi_1^2\Phi_2^2\Phi_3^2\Phi_6^2\Phi_8$	269892
$B_2,(()(2))$	$\frac{1}{4}q^4\Phi_1^2\Phi_3^2\Phi_4\Phi_8\Phi_{12}$	216580
$B_2,((1,1)())$	$\frac{1}{4}q^4\Phi_1^2\Phi_3^2\Phi_4\Phi_8\Phi_{12}$	216580
$F4[\theta]$	$\frac{1}{3}q^4\Phi_1^4\Phi_2^4\Phi_4^2\Phi_8$	183600
$F4[\theta^2]$	$\frac{1}{3}q^4\Phi_1^4\Phi_2^4\Phi_4^2\Phi_8$	183600
$F4[i]$	$\frac{1}{4}q^4\Phi_1^4\Phi_2^4\Phi_3^2\Phi_6^2$	142884
$F4[-i]$	$\frac{1}{4}q^4\Phi_1^4\Phi_2^4\Phi_3^2\Phi_6^2$	142884
$F4^I[1]$	$\frac{1}{8}q^4\Phi_1^4\Phi_3^2\Phi_8\Phi_{12}$	21658
$F4^{II}[1]$	$\frac{1}{24}q^4\Phi_1^4\Phi_6^2\Phi_8\Phi_{12}$	1326
$F4[-1]$	$\frac{1}{4}q^4\Phi_1^4\Phi_3^2\Phi_4^2\Phi_{12}$	63700

Tabelle 34: Grade unipotenter Charaktere vom Typ F_4

Label	Grad q	$q=2$
$\phi_{1,0}$	1	1
$\phi_{6,1}$	$q\Phi_8\Phi_9$	2482
$\phi_{20,2}$	$q^2\Phi_4\Phi_5\Phi_8\Phi_{12}$	137020
$\phi_{64,4}$	$q^4\Phi_2^3\Phi_4^2\Phi_6^2\Phi_8\Phi_{12}$	21481200
$\phi_{60,5}$	$q^5\Phi_4\Phi_5\Phi_8\Phi_9\Phi_{12}$	80019680
$\phi_{81,6}$	$q^6\Phi_3^3\Phi_6^2\Phi_9\Phi_{12}$	187492032
$\phi_{24,6}$	$q^6\Phi_4^2\Phi_8\Phi_9\Phi_{12}$	25812800
$\phi_{81,10}$	$q^{10}\Phi_3^3\Phi_6^2\Phi_9\Phi_{12}$	2999872512
$\phi_{60,11}$	$q^{11}\Phi_4\Phi_5\Phi_8\Phi_9\Phi_{12}$	5121259520
$\phi_{24,12}$	$q^{12}\Phi_4^2\Phi_8\Phi_9\Phi_{12}$	1652019200
$\phi_{64,13}$	$q^{13}\Phi_2^3\Phi_4^2\Phi_6^2\Phi_8\Phi_{12}$	10998374400
$\phi_{20,20}$	$q^{20}\Phi_4\Phi_5\Phi_8\Phi_{12}$	35918970880
$\phi_{6,25}$	$q^{25}\Phi_8\Phi_9$	41641050112
$\phi_{1,36}$	q^{36}	68719476736
$\phi_{30,3}$	$\frac{1}{2}q^3\Phi_4^2\Phi_5\Phi_9\Phi_{12}$	2941900
$\phi_{15,5}$	$\frac{1}{2}q^3\Phi_5\Phi_6^2\Phi_8\Phi_9$	1384956
$\phi_{15,4}$	$\frac{1}{2}q^3\Phi_5\Phi_8\Phi_9\Phi_{12}$	2000492
$D_4, 1$	$\frac{1}{2}q^3\Phi_1^4\Phi_3^2\Phi_5\Phi_9$	443548
$\phi_{30,15}$	$\frac{1}{2}q^{15}\Phi_4^2\Phi_5\Phi_9\Phi_{12}$	12050022400
$\phi_{15,17}$	$\frac{1}{2}q^{15}\Phi_5\Phi_6^2\Phi_8\Phi_9$	5672779776
$\phi_{15,16}$	$\frac{1}{2}q^{15}\Phi_5\Phi_8\Phi_9\Phi_{12}$	8194015232
D_4, ε	$\frac{1}{2}q^{15}\Phi_1^4\Phi_3^2\Phi_5\Phi_9$	1816772608
$\phi_{80,7}$	$\frac{1}{6}q^7\Phi_2^4\Phi_5\Phi_8\Phi_9\Phi_{12}$	864212544
$\phi_{20,10}$	$\frac{1}{6}q^7\Phi_4^2\Phi_5\Phi_6^2\Phi_8\Phi_9$	184660800
$\phi_{60,8}$	$\frac{1}{2}q^7\Phi_4^2\Phi_5\Phi_8\Phi_9\Phi_{12}$	800196800
$\phi_{10,9}$	$\frac{1}{3}q^7\Phi_5\Phi_6^2\Phi_8\Phi_9\Phi_{12}$	192047232
$\phi_{90,8}$	$\frac{1}{3}q^7\Phi_3^3\Phi_5\Phi_6^2\Phi_8\Phi_{12}$	902358912
D_4, r	$\frac{1}{2}q^7\Phi_1^4\Phi_3^2\Phi_5\Phi_8\Phi_9$	120645056
$E_6[\theta]$	$\frac{1}{3}q^7\Phi_1^6\Phi_2^4\Phi_4^2\Phi_5\Phi_8$	45532800
$E_6[\theta^2]$	$\frac{1}{3}q^7\Phi_1^6\Phi_2^4\Phi_4^2\Phi_5\Phi_8$	45532800

Tabelle 35: Grade unipotenter Charaktere vom Typ E_6

Label	Grad q	$q=2$
$\phi_{1,0}$	1	1
$\phi'_{2,4}$	$q\Phi_8\Phi_{18}$	1938
$\phi_{4,1}$	$q^2\Phi_4\Phi_8\Phi_{10}\Phi_{12}$	48620
$^2A_5[1]$	$q^4\Phi_1^3\Phi_3^2\Phi_4^2\Phi_8\Phi_{12}$	4331600
$\phi'_{4,7}$	$q^5\Phi_4\Phi_8\Phi_{10}\Phi_{12}\Phi_{18}$	22170720
$\phi'_{9,6}$	$q^6\Phi_3^2\Phi_6^3\Phi_{12}\Phi_{18}$	62741952
$\phi''_{8,3}$	$q^6\Phi_4^2\Phi_8\Phi_{12}\Phi_{18}$	20155200
$\phi''_{9,6}$	$q^{10}\Phi_3^2\Phi_6^3\Phi_{12}\Phi_{18}$	1003871232
$\phi''_{4,7}$	$q^{11}\Phi_4\Phi_8\Phi_{10}\Phi_{12}\Phi_{18}$	1418926080
$\phi'_{8,9}$	$q^{12}\Phi_4^2\Phi_8\Phi_{12}\Phi_{18}$	1289932800
$^2A_5[\varepsilon]$	$q^{13}\Phi_1^3\Phi_3^2\Phi_4^2\Phi_8\Phi_{12}$	2217779200
$\phi_{4,13}$	$q^{20}\Phi_4\Phi_8\Phi_{10}\Phi_{12}$	12745441280
$\phi''_{2,16}$	$q^{25}\Phi_8\Phi_{18}$	32514244608
$\phi_{1,24}$	q^{36}	68719476736
$\phi''_{2,4}$	$\frac{1}{2}q^3\Phi_4^2\Phi_{10}\Phi_{12}\Phi_{18}$	815100
$\phi_{9,2}$	$\frac{1}{2}q^3\Phi_3^2\Phi_8\Phi_{10}\Phi_{18}$	2089164
$\phi'_{1,12}$	$\frac{1}{2}q^3\Phi_8\Phi_{10}\Phi_{12}\Phi_{18}$	554268
$\phi'_{8,3}$	$\frac{1}{2}q^3\Phi_2^4\Phi_6^2\Phi_{10}\Phi_{18}$	1828332
$\phi'_{2,16}$	$\frac{1}{2}q^{15}\Phi_4^2\Phi_{10}\Phi_{12}\Phi_{18}$	3338649600
$\phi_{9,10}$	$\frac{1}{2}q^{15}\Phi_3^2\Phi_8\Phi_{10}\Phi_{18}$	8557215744
$\phi''_{1,12}$	$\frac{1}{2}q^{15}\Phi_8\Phi_{10}\Phi_{12}\Phi_{18}$	2270281728
$\phi''_{8,9}$	$\frac{1}{2}q^{15}\Phi_2^4\Phi_6^2\Phi_{10}\Phi_{18}$	7488847872
$^2E_6[1]$	$\frac{1}{6}q^7\Phi_1^4\Phi_8\Phi_{10}\Phi_{12}\Phi_{18}$	2956096
$\phi_{12,4}$	$\frac{1}{6}q^7\Phi_3^2\Phi_4^2\Phi_8\Phi_{10}\Phi_{18}$	278555200
$\phi_{4,8}$	$\frac{1}{2}q^7\Phi_4^2\Phi_8\Phi_{10}\Phi_{12}\Phi_{18}$	221707200
$\phi'_{6,6}$	$\frac{1}{3}q^7\Phi_3^2\Phi_8\Phi_{10}\Phi_{12}\Phi_{18}$	289697408
$\phi''_{6,6}$	$\frac{1}{3}q^7\Phi_3^2\Phi_6^3\Phi_8\Phi_{10}\Phi_{12}$	137225088
$\phi_{16,5}$	$\frac{1}{2}q^7\Phi_2^4\Phi_6^2\Phi_8\Phi_{10}\Phi_{18}$	497306304
$^2E_6[\theta]$	$\frac{1}{3}q^7\Phi_1^4\Phi_2^6\Phi_4^2\Phi_8\Phi_{10}$	145411200
$^2E_6[\theta^2]$	$\frac{1}{3}q^7\Phi_1^4\Phi_2^6\Phi_4^2\Phi_8\Phi_{10}$	145411200

Tabelle 36: Grade unipotenter Charaktere vom Typ $^2E_6$

Label	Grad q	$q^2=2$	$q^2=8$	$q^2=32$
1		1	1	1
ε	q^4	4	64	1024
$^2B_2[a]$	$\frac{1}{\sqrt{2}}q\Phi_1\Phi_2$	1	14	124
$^2B_2[b]$	$\frac{1}{\sqrt{2}}q\Phi_1\Phi_2$	1	14	124

Tabelle 37: Grade unipotenter Charaktere vom Typ $^2B_2$

Label	Grad q	$q^2 = 3$	$q^2 = 27$
1	1	1	1
ε	q^6	27	19683
$cusp1$	$\frac{1}{\sqrt{3}}q\Phi_1\Phi_2\Phi_4$	8	2184
$cusp2$	$\frac{1}{\sqrt{3}}q\Phi_1\Phi_2\Phi_4$	8	2184
$cusp3$	$\frac{1}{2\sqrt{3}}q\Phi_1\Phi_2\Phi'_{12}$	1	741
$cusp4$	$\frac{1}{2\sqrt{3}}q\Phi_1\Phi_2\Phi'_{12}$	1	741
$cusp5$	$\frac{1}{2\sqrt{3}}q\Phi_1\Phi_2\Phi''_{12}$	7	1443
$cusp6$	$\frac{1}{2\sqrt{3}}q\Phi_1\Phi_2\Phi''_{12}$	7	1443

Tabelle 38: Grade unipotenter Charaktere vom Typ ${}^2G_2$

Label	Grad q	$q^2 = 2$	$q^2 = 8$
1	1	1	1
ε'	$q^2\Phi_{12}\Phi_{24}$	78	1839048
ε''	$q^{10}\Phi_{12}\Phi_{24}$	1248	7532740608
ε	q^{24}	4096	68719476736
${}^2B_2[a], 1$	$q\Phi_1\Phi_2\Phi_4^2\Phi_{12}$	27	64638
${}^2B_2[b], 1$	$q\Phi_1\Phi_2\Phi_4^2\Phi_{12}$	27	64638
${}^2B_2[a], \varepsilon$	$q^{13}\Phi_1\Phi_2\Phi_4^2\Phi_{12}$	1728	16944463872
${}^2B_2[b], \varepsilon$	$q^{13}\Phi_1\Phi_2\Phi_4^2\Phi_{12}$	1728	16944463872
ρ'_2	$q^4\Phi_4^2\Phi_{12}\Phi_8''^2\Phi'_{24}$	351	201301200
ρ''_2	$q^4\Phi_4^2\Phi_{12}\Phi_8'^2\Phi''_{24}$	675	461921616
ρ_2	$q^4\Phi_8^2\Phi_{24}$	650	545261600
$cusp1$	$q^4\Phi_1^2\Phi_2^2\Phi_{12}\Phi_8'^2\Phi'_{24}$	325	274399216
$cusp2$	$q^4\Phi_1^2\Phi_2^2\Phi_{12}\Phi_8''^2\Phi''_{24}$	1	13778800
$cusp3$	$q^4\Phi_1^2\Phi_2^2\Phi_4^2\Phi_{24}$	78	170741088
$cusp4$	$q^4\Phi_1^2\Phi_2^2\Phi_4^2\Phi_{12}\Phi''_{24}$	27	133929936
$cusp5$	$q^4\Phi_1^2\Phi_2^2\Phi_4^2\Phi_{12}\Phi''_{24}$	27	133929936
$cusp6$	$q^4\Phi_1^2\Phi_2^2\Phi_4^2\Phi_{12}\Phi'_{24}$	351	394550352
$cusp7$	$q^4\Phi_1^2\Phi_2^2\Phi_4^2\Phi_{12}\Phi'_{24}$	351	394550352
$cusp8$	$q^4\Phi_1^2\Phi_2^2\Phi_4^2\Phi_8^2$	300	357739200
$cusp9$	$q^4\Phi_1^2\Phi_2^2\Phi_4^2\Phi_8^2$	300	357739200
$cusp10$	$q^4\Phi_1^2\Phi_2^2\Phi_{12}\Phi_{24}$	52	240302272

Tabelle 39: Grade unipotenter Charaktere vom Typ ${}^2F_4$

Literaturverzeichnis

[Bre04] T. Breuer. *Manual for the GAP Character Table Library, Version 1.1*, 2004.

[Car85] R. W. Carter. *Finite Groups Of Lie Type.* John Wiley and Sons, 1985.

[CCN+85] J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norton, R. A. Parker und R. A. Wilson. *Atlas Of Finite Groups.* Oxford University Press, 1985.

[CR87] C. W. Curtis und I. Reiner. *Methods Of Representation Theory*, Band 2. John Wiley and Sons, 1987.

[DM91] F. Digne und J. Michel. *Representations of Finite Groups of Lie Type.* Cambridge University Press, 1991.

[FS90] P. Fong und B. Srinivasan. Brauer trees in classical groups. *J. Algebra 131*, 179–225, 1990.

[GAP04] The GAP Group. *GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.4*, 2004. (`http://www.gap-system.org`).

[GHL+96] M. Geck, G. Hiss, F. Lübeck, G. Malle und G. Pfeiffer. CHEVIE – A system for computing and processing generic character tables for finite groups of Lie type, Weyl groups and Hecke algebras. *Appl. Algebra Engrg. Comm. Comput.*, 7, 175–210, 1996.

[Isa76] I. M. Isaacs. *Character theory of finite groups.* Academic Press, 1976.

[Lüb93] F. Lübeck. *Charaktertafeln für die Gruppen CSp(6,q) mit ungeradem q und Sp(6,q) mit geradem q.* Dissertation, Universität Heidelberg, 1993.

[Sri68] B. Srinivasan. The characters of the finite symplectic group Sp(4,q). *Trans. Amer. Math. Soc. 131*, 488–525, 1968.