

Zerlegung von Tensorprodukten einfacher Moduln der symmetrischen Gruppe

von
Johannes Orlob

DIPLOMARBEIT

in Mathematik

vorgelegt der
Fakultät für Mathematik, Informatik und Naturwissenschaften der
Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen
Juni 2006

Angefertigt am
Lehrstuhl D für Mathematik
bei
Professor Dr. G. Hiß

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	5
1 Grundlagen aus der Darstellungstheorie	7
1.1 Darstellungen von Gruppen	7
1.2 Idempotente und Blöcke	9
1.3 Radikal und Sockel	10
1.4 Direkte Zerlegungen von Moduln	11
1.5 Unzerlegbare und projektive Moduln	12
1.6 Zerlegungsmatrix	14
1.7 Brauercharaktere	15
1.8 Blöcke für Gruppenalgebren	16
1.9 Defektgruppen von Blöcken	17
1.10 Tensorprodukte von kG -Moduln	19
2 Darstellungstheorie der symmetrischen Gruppe	23
2.1 Charakteristik 0	23
2.2 Allgemeiner Fall	25
2.3 Nakayamas Vermutung	28
3 Zerlegung von speziellen Produkten	31
3.1 Mullineuxs Vermutung	31
3.2 Allgemeines zu $V^{\otimes 2}$	33
3.3 Permutations-, Specht- und Youngmoduln	35
3.4 Zerlegung von $D^{(n-1,1)^{\otimes 2}}$	42
4 Angewandte Methoden und Probleme	53
4.1 Zerlegung von Moduln	53
4.2 Kondensation	54
4.3 Probleme und Kniffe	57
4.4 Angewandte Kondensation	58
4.4.1 $\mathbb{F}_2\mathcal{S}_8$	59
4.4.2 $\mathbb{F}_3\mathcal{S}_8$	59
4.4.3 $\mathbb{F}_2\mathcal{S}_9$	59
4.4.4 $\mathbb{F}_3\mathcal{S}_9$	60
4.4.5 $\mathbb{F}_5\mathcal{S}_9$	61
4.4.6 $\mathbb{F}_7\mathcal{S}_9$	61
4.4.7 $\mathbb{F}_2\mathcal{S}_{10}$	61
4.4.8 $\mathbb{F}_3\mathcal{S}_{10}$	62
4.4.9 $\mathbb{F}_5\mathcal{S}_{10}$	63
A Ergebnisse	65
A.1 $h_p(\mathcal{S}_n)$	65
A.2 Legende und Bemerkungen	67
A.3 \mathcal{S}_5	68
A.3.1 $\mathbb{F}_2\mathcal{S}_5$	68
A.3.2 $\mathbb{F}_3\mathcal{S}_5$	68
A.3.3 $\mathbb{F}_5\mathcal{S}_5$	69

A.4	\mathcal{S}_6	70
A.4.1	$\mathbb{F}_2\mathcal{S}_6$	70
A.4.2	$\mathbb{F}_3\mathcal{S}_6$	70
A.4.3	$\mathbb{F}_5\mathcal{S}_6$	71
A.5	\mathcal{S}_7	72
A.5.1	$\mathbb{F}_2\mathcal{S}_7$	72
A.5.2	$\mathbb{F}_3\mathcal{S}_7$	73
A.5.3	$\mathbb{F}_5\mathcal{S}_7$	75
A.5.4	$\mathbb{F}_7\mathcal{S}_7$	77
A.6	\mathcal{S}_8	79
A.6.1	$\mathbb{F}_2\mathcal{S}_8$	79
A.6.2	$\mathbb{F}_3\mathcal{S}_8$	81
A.6.3	$\mathbb{F}_5\mathcal{S}_8$	83
A.6.4	$\mathbb{F}_7\mathcal{S}_8$	86
A.7	\mathcal{S}_9	89
A.7.1	$\mathbb{F}_2\mathcal{S}_9$	89
A.7.2	$\mathbb{F}_3\mathcal{S}_9$	91
A.7.3	$\mathbb{F}_5\mathcal{S}_9$	93
A.7.4	$\mathbb{F}_7\mathcal{S}_9$	97
A.8	\mathcal{S}_{10}	101
A.8.1	$\mathbb{F}_2\mathcal{S}_{10}$	101
A.8.2	$\mathbb{F}_3\mathcal{S}_{10}$	105
A.8.3	$\mathbb{F}_5\mathcal{S}_{10}$	111
B	GAP-Routinen	123
B.1	Die Mullineuxabbildung	123
B.2	Dimensionsberechnung von kondensierten Moduln	127

Vorwort

*Nehmet Holz vom Fichtenstamme,
Doch recht trocken laßt es sein,
Daß die eingepreßte Flamme
Schlage zu dem Schwalch hinein.
Kocht des Kupfers Brei,
Schnell das Zinn herbei,
Daß die zähe Glockenspeise
Fließe nach der rechten Weise.*

*Aus Das Lied von der Glocke
von F. Schiller.*

Die Darstellungstheorie der symmetrischen Gruppe auf n Punkten, S_n , weckt bis heute das Interesse vieler Mathematiker. Obwohl sie in einigen Teilen schon weit entwickelt ist, lassen sich immer noch viele interessante Fragen stellen. Zum Beispiel: Was läßt sich über die Struktur des Tensorproduktes zweier einfacher kS_n -Moduln aussagen? Ist k ein Körper der Charakteristik Null, so kann man mit der Determinantenform und der Littlewood-Richardson Regel die Zerlegung eines solchen Produktes bestimmen; man vergleiche dazu Abschnitt 2.9 in [11].

Ist die Charakteristik von $k = p > 0$, so wurde bis jetzt noch kein Verfahren gefunden, mit dem man die Zerlegung des Tensorproduktes zweier einfacher kS_n -Moduln in unzerlegbare Moduln angeben kann. Mullineux gibt in [17] eine Abbildung an, die man auch Mullineuxabbildung nennt, und vermutet, dass man mit ihr das Tensorprodukt eines einfachen kS_n -Moduln mit dem Signummodul beschreiben kann. Diese Vermutung haben Ford und Kleshchev in [6] bewiesen.

Eine speziellere Frage zu Tensorprodukten ist: Gibt es zwei einfache Moduln, deren Dimension echt größer als eins ist, so dass das Produkt dieser beiden wieder einfach ist? Nach [22] ist die Antwort nein, falls k die Charakteristik Null hat. Gow und Kleshchev geben in [8] eine Vermutung an, wann ein Tensorprodukt einfach ist. In [2] wird gezeigt, dass im modularen Fall nur für $p = 2$ solche einfachen Tensorprodukte vorkommen können. In [9] wird ein Teil der Vermutung von Gow und Kleshchev bewiesen. Ein Teil der Vermutung ist noch offen.

Durch den heutigen Stand der Technik ist es möglich „Experimente“, das heißt, Berechnungen von Beispielen, durchzuführen, deren Durchführung früher unmöglich erschien. Das Ziel dieser Arbeit ist es, mit Hilfe der computergestützten Darstellungstheorie Einsichten über die Struktur von Tensorprodukten einfacher kS_n -Moduln im modularen Fall zu bekommen. Dabei wird hauptsächlich die Zerlegung von Tensorprodukten in unzerlegbare Moduln und die Struktur dieser Summanden betrachtet. Die Berechnung der Zerlegungen der Tensorprodukte und die Berechnung der Struktur der unzerlegbaren Summanden wird mit der MeatAxe, [20], realisiert. Mit der MeatAxe ist es möglich, konkret Darstellungen von Gruppen „in die Hand zu nehmen“ und zu untersuchen. Als weiteres Hilfsmittel wird GAP, [7], benutzt.

Der Inhalt des ersten Kapitels besteht aus allgemeinen Grundlagen zur modularen Darstellungstheorie von Gruppen.

Das zweite Kapitel geht auf die irreduziblen Darstellungen von S_n sowie deren Parametrisierung durch Partitionen von n ein. Zudem wird die Nakayama-Vermutung, die die p -Blockeinteilung der irreduziblen Darstellungen beschreibt, am Ende des Kapitels aufgeführt.

Spezielle Tensorprodukte werden im dritten Kapitel betrachtet. Zuerst wird die Mullineuxabbildung angegeben. Dann werden Tensorprodukte eines Moduls mit sich selbst betrachtet. Der größte Teil des Kapitels wird von dem Beweis zur Zerlegung des Tensorproduktes des einfachen Moduls zur natürlichen Darstellung von S_n mit sich selbst eingenommen. Die Vermutung zur Zerlegung des Produktes wurde aus der Betrachtung der berechneten Beispiele gewonnen.

Auf den theoretischen Hintergrund zur Zerlegung eines Moduls und die hierbei auftretenden Probleme sowie deren Lösungen bei den Berechnungen mit der **MeatAxe** wird im vierten Kapitel eingegangen. Desweiteren wird die Grundidee eines wichtigen Hilfsmittels, der Fixpunktcondensation, kurz vorgestellt. Mit diesem Werkzeug ist es möglich, auch sehr große Moduln mit dem Rechner zu bearbeiten.

Die Ergebnisse der berechneten Beispiele werden im letzten Kapitel aufgeführt. Abschließend werden genutzte **GAP**-Routinen angegeben.

Das Thema der Diplomarbeit verdanke ich Herrn Prof. Dr. Gerhard Hiß. Weiter möchte ich mich bei ihm für die gute Betreuung bedanken. Ein sehr großer Dank geht an Herrn Dr. Felix Noeske, der sich immer Zeit für die Fragen seines Padawans nahm. Zudem möchte ich auch Herrn Prof. Dr. Klaus Lux danken, der mir bei meinen Problemen mit der **MeatAxe** half. Herrn Dr. Jürgen Müller verdanke ich den Beweis für meine Vermutung, der am Ende des dritten Kapitels aufgeführt wird. Zudem danke ich ihm für die interessanten Gespräche rund um das Thema dieser Arbeit. Ich möchte mich auch bei allen anderen Mitarbeitern des Lehrstuhls D für Mathematik für die gute Arbeitsatmosphäre bedanken und auch dafür, dass man ohne größere Terminabsprache vorbeikommen und Fragen stellen kann.

Kapitel 1

Grundlagen aus der Darstellungstheorie

Dieses Kapitel gibt eine Übersicht der Grundlagen und genutzten Methoden der modularen Darstellungstheorie an. In diesem ganzen Kapitel sei A ein Ring mit 1 und alle A -Moduln seien A -Rechtsmoduln und endlich erzeugt.

1.1 Darstellungen von Gruppen

Zur Untersuchung von Gruppen mit Computern ist es nötig, diese in einer für den Computer erfassbaren Form darzustellen. Dies geschieht in dieser Arbeit mittels Darstellungen einer Gruppe durch Matrizen.

Die MeatAxe, die hauptsächlich genutzt wurde, arbeitet genau mit solchen Matrizen. Deshalb soll der Zusammenhang zwischen Darstellung und Gruppe kurz erläutert werden.

Es seien in diesem Abschnitt k ein Körper, A eine k -Algebra, $\text{Gl}_n(k)$ sei die Menge der invertierbaren Matrizen in $k^{n \times n}$ und G eine endliche Gruppe.

1.1.1 Definition

Eine *Darstellung* von A ist ein k -Algebrenhomomorphismus

$$\mathfrak{X} : A \rightarrow k^{n \times n}.$$

Dabei heißt n der *Grad* von \mathfrak{X} . Zwei Darstellungen \mathfrak{X} und \mathfrak{Y} vom Grad n heißen *äquivalent*, falls eine Matrix $P \in \text{Gl}_n(k)$ existiert mit

$$\mathfrak{X}(a) = P^{-1}\mathfrak{Y}(a)P \text{ für alle } a \in A.$$

□

Darstellungen von A sind eigentlich nur eine andere Sichtweise auf die A -Moduln. Die folgende Bemerkung gibt den Zusammenhang zwischen Darstellungen und Moduln an.

1.1.2 Bemerkung

Aus Darstellungen von A lässt sich leicht ein A -Modul konstruieren und andererseits auch Darstellungen aus Moduln. Ist \mathfrak{X} eine Darstellung von A vom Grad n , so wird $k^{1 \times n}$ durch

$$va := v\mathfrak{X}(a) \text{ für } v \in k^{1 \times n}, a \in A$$

zum A -Modul.

Sei umgekehrt M ein A -Modul. Dann wähle eine k -Basis von M und betrachte für $a \in A$ die Matrix $\mathfrak{X}(a)$ des von a auf M bewirkten Endomorphismus bezüglich der gewählten Basis. Dann ist \mathfrak{X} eine Darstellung von A . Eine andere Basiswahl ergibt im allgemeinen auch eine andere Darstellung.

Weiter gilt: Sind M und N zwei isomorphe A -Moduln, dann sind die korrespondierenden Darstellungen äquivalent. Insbesondere sind zwei Darstellungen, die vom selben Modul bewirkt werden, äquivalent. Damit erhält man eine Bijektion zwischen den Isomorphieklassen der A -Moduln und den Äquivalenzklassen von A -Darstellungen. □

1.1.3 Definition

Eine Darstellung \mathfrak{X} vom Grad n heißt *reduzibel*, falls $Z \in \text{Gl}_n(k)$ existiert mit

$$Z^{-1}\mathfrak{X}(a)Z = \begin{pmatrix} \mathfrak{X}_1(a) & 0 \\ * & \mathfrak{X}_2(a) \end{pmatrix} \text{ für alle } a \in A \text{ und der Grad von } \mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2 > 0.$$

In diesem Fall sind \mathfrak{X}_1 und \mathfrak{X}_2 Darstellungen von A . Existiert kein solches Z , so heißt \mathfrak{X} *irreduzibel*. Existiert ein Z mit $* = 0$, dann heißt \mathfrak{X} *zerlegbar*. Andernfalls heißt \mathfrak{X} *unzerlegbar*. \square

Mit der obigen Definition folgt nun:

1.1.4 Bemerkung

Es sei M ein A -Modul, $N \leq M$ ein Untermodul von M und B eine Basis von N . Ergänzt man B zu einer Basis von M und betrachtet die entsprechende Darstellung \mathfrak{X} von M bezüglich dieser Basis, so hat diese die folgende Gestalt:

$$\mathfrak{X}(a) = \begin{pmatrix} \mathfrak{X}_1(a) & 0 \\ * & \mathfrak{X}_2(a) \end{pmatrix} \text{ für alle } a \in A.$$

Hierbei ist \mathfrak{X}_1 die von N bewirkte Darstellung bezüglich B und \mathfrak{X}_2 eine von M/N bewirkte Darstellung.

Ist umgekehrt \mathfrak{X} eine reduzible Darstellung von M , so existiert ein Untermodul N von M , der eine zu \mathfrak{X}_1 äquivalente Darstellung bewirkt. Der Faktormodul M/N bewirkt dann eine zu \mathfrak{X}_2 äquivalente Darstellung.

Damit ist M ein einfacher A -Modul genau dann, wenn \mathfrak{X} irreduzibel ist und es gilt: M ist unzerlegbar als A -Modul genau dann, wenn \mathfrak{X} unzerlegbar ist. \square

1.1.5 Definition

Eine *Darstellung von G über k vom Grad n* ist ein Gruppenhomomorphismus

$$\mathfrak{X} : G \rightarrow \text{Gl}_n(k).$$

\square

Ist \mathfrak{X} eine Darstellung von kG vom Grad n , so ist $\mathfrak{X}|_G$ eine Darstellung von G über k . Ist umgekehrt \mathfrak{X} eine Darstellung von G , so wird durch

$$\mathfrak{X}\left(\sum_i a_i g_i\right) := \sum_i a_i \mathfrak{X}(g_i)$$

eine Darstellung von kG definiert. Da G eine Basis von kG ist, genügt es $\mathfrak{X}|_G$ zu betrachten um nachzuprüfen, ob \mathfrak{X} irreduzibel ist oder unzerlegbar. Abschließend wird noch die Definition des Charakters einer Darstellung angegeben.

1.1.6 Definition

Es sei \mathfrak{X} eine Darstellung von kG vom Grad n . Dann heißt

$$\begin{aligned} \chi : G &\rightarrow k \\ g &\mapsto \text{Spur}(\mathfrak{X}(g)) \end{aligned}$$

der *Charakter* von \mathfrak{X} . \square

1.2 Idempotente und Blöcke

Mit Hilfe von Idempotenten eines Ringes ist es möglich, mehr über den Aufbau des Ringes zu erfahren. Eine Zerlegung eines Ringes in Ideale korrespondiert zu einer Zerlegung der Eins des Ringes in Idempotente. Dieser Zusammenhang zwischen Idealen und Idempotenten wird hier dargestellt.

1.2.1 Definition

Ein Element $e \in A$ heißt *Idempotent*, falls $e \neq 0$ und $ee = e$ gilt. Zwei Idempotente e und e' sind *orthogonal* zueinander, falls $ee' = 0 = e'e$ gilt. Man nennt ein Idempotent *primitiv*, wenn es sich nicht als Summe zweier orthogonaler Idempotente schreiben lässt. Ein Idempotent heißt *zentral*, falls es im Zentrum von A liegt. Ist e ein zentrales Idempotent, das primitiv im Zentrum von A ist, so nennt man e *zentral primitiv*. \square

Es folgen nun zwei Sätze, die einen Zusammenhang von Idempotenten von A und direkten Zerlegungen von A angeben.

1.2.2 Satz

Es sei $e_1 + \dots + e_n = 1 \in A$ eine Zerlegung der Eins in paarweise orthogonale Idempotente. Dann ist $A = e_1A \oplus \dots \oplus e_nA$. Ist e_i primitiv für alle $1 \leq i \leq n$, dann ist e_iA für alle $1 \leq i \leq n$ unzerlegbar. Sind alle e_i zentral, so gilt $e_iA = Ae_i$, das heißt: e_iA ist ein zweiseitiges Ideal für alle $1 \leq i \leq n$. Sind alle e_i zentral primitiv, so ist e_iA unzerlegbar als zweiseitiges Ideal.

Beweis:

Man vergleiche die Lemmata (7.1), (7.2), (7.3) und (7.4) aus Kapitel I in [5]. \square

1.2.3 Satz

Es sei $A = A_1 \oplus \dots \oplus A_n$ und $A_i \neq 0$ für alle $1 \leq i \leq n$. Es sei weiter $1 = e_1 + \dots + e_n$ mit $e_i \in A_i$. Dann ist $\{e_i\}$ eine Menge von paarweise orthogonalen Idempotenten. Ist A_i unzerlegbar für alle $1 \leq i \leq n$, dann ist e_i primitiv für alle $1 \leq i \leq n$. Ist A_i ein zweiseitiges Ideal beziehungsweise ein zweiseitiges unzerlegbares Ideal für alle $1 \leq i \leq n$, dann ist e_i primitiv beziehungsweise zentral primitiv für alle $1 \leq i \leq n$.

Beweis:

Man vergleiche die Lemmata (7.1), (7.2) und (7.3) aus Kapitel I in [5]. \square

1.2.4 Definition

Ein *Block* von A ist ein unzerlegbares, zweiseitiges Ideal B von A , wobei $B = eB = Be = eBe$ für ein zentral primitives Idempotent e von A ist. Ein A -Modul M gehört zum Block B oder liegt im Block B , falls $Me = M$ ist. \square

Liegt eine Zerlegung von A in unzerlegbare, zweiseitige Ideale vor, so lassen sich die unzerlegbaren A -Moduln eindeutig einem Block von A zuordnen.

1.2.5 Bemerkung

Es sei $\{0\} \neq M$ ein unzerlegbarer A -Modul und $A = e_1A \oplus \dots \oplus e_nA$ eine Zerlegung von A , wobei e_i zentral primitiv für alle $1 \leq i \leq n$ ist. Dann gehört M zu genau einem Block e_iA , das heißt $Me_i = M$ und weiter $Me_j = \{0\}$ für $j \neq i$. Alle Unter- und Faktormoduln von M liegen in e_iA . Insbesondere gehört jeder einfache A -Modul zu einem Block.

Beweis:

Nach Voraussetzung ist $1 = e_1 + \dots + e_n$. Dann ist $M = Me_1 \oplus \dots \oplus Me_n$. Da $\{0\} \neq M$ und M unzerlegbar ist, folgt $M = Me_i$ für ein $1 \leq i \leq n$ und $Me_j = \{0\}$ für $j \neq i$. Damit folgt auch die Aussage für Unter- und Faktormoduln. \square

1.3 Radikal und Sockel

Wichtige Untermoduln eines Moduls sind sein Radikal und sein Sockel. Um die Struktur eines Moduls näher zu bestimmen, wird ausgehend von diesen beiden Begriffen seine Radikal- und Sockelreihe sowie seine Loewylänge definiert. Diese beiden Reihen erlauben es, mehr Informationen über den Aufbau eines Moduls zu erhalten. In diesem Abschnitt sei A eine endlich-dimensionale k -Algebra.

1.3.1 Definition

Es sei M ein A -Modul. Der minimale Untermodul von M , dessen Faktormodul halbeinfach ist, heißt *das Radikal* von M . Er wird mit $\text{rad}(M)$ bezeichnet. \square

1.3.2 Definition

Es sei M ein A -Modul. Das *ite Radikal* $\text{rad}^i(M)$ ist definiert als das Radikal von $\text{rad}^{i-1}(M)$, wobei $\text{rad}^0 := M$ ist. Die Reihe

$$M = \text{rad}^0(M) > \text{rad}(M) > \cdots > \text{rad}^r(M) = \{0\}$$

heißt *Radikalreihe* von M . Weiter heißt der Faktormodul $\text{rad}^{i-1}(M)/\text{rad}^i(M)$ der *ite Kopf* von M . Der 1. Kopf von M wird der *Kopf* von M genannt. \square

1.3.3 Definition

Es sei M ein A -Modul. Der größte halbeinfache Untermodul von M heißt *der Sockel* von M . Er wird mit $\text{soc}(M)$ bezeichnet. \square

1.3.4 Definition

Es sei M ein A -Modul. Man definiert den *iten Sockel* von M durch

$$\text{soc}_i(M)/\text{soc}_{i-1}(M) := \text{soc}(M/\text{soc}_{i-1}(M)),$$

wobei $\text{soc}_0(M) := \{0\}$ ist. Man nennt die Reihe

$$\{0\} = \text{soc}_0(M) < \text{soc}_1(M) < \cdots < \text{soc}_l(M) = M$$

Sockelreihe von M . \square

1.3.5 Satz

Es sei M ein A -Modul. Dann sind die Längen der Radikal- und Sockelreihe gleich. Man nennt die Länge der Sockelreihe *Loewylänge* von M . Desweiteren gilt

$$\text{rad}^{l-i}(M) \subseteq \text{soc}_i(M).$$

Beweis:

Vergleiche Satz (8.19) aus Kapitel I in [18]. \square

1.3.6 Satz

Es sei M ein A -Modul und l die Loewylänge von M . Dann sind äquivalent:

1. M hat eine eindeutige Kompositionsreihe mit einfachen Faktoren.
2. Der *ite Kopf* von M ist einfach, für alle $1 \leq i \leq l$.
3. Der *ite Sockel* von M ist einfach, für alle $1 \leq i \leq l$.

Erfüllt M eine dieser Eigenschaften, so nennt man M *uniserial*.

Beweis:

Siehe Proposition 5 aus Kapitel II Abschnitt 4 in [1]. \square

Zum Schluss des Abschnitts wird eine Form von Nakayamas Lemma angegeben, die im praktischen Teil dieser Arbeit genutzt wird.

1.3.7 Lemma

Es sei M ein A -Modul. Gilt $M/\text{rad}(M) = \langle v_i + \text{rad}(M) \mid v_i \in M, 1 \leq i \leq n \rangle_A$, dann gilt

$$M = \langle v_i \mid 1 \leq i \leq n \rangle_A.$$

Beweis:

Siehe Korollar (5.3) in [4]. \square

1.4 Direkte Zerlegungen von Moduln

Für die zentrale Aufgabe dieser Arbeit, die Zerlegung von Tensorprodukten, ist der folgende Satz die Grundlage für eine bis auf Isomorphie eindeutige Zerlegung eines Moduls in unzerlegbare Moduln.

1.4.1 Satz (Krull-Schmidt)

Es sei M ein A -Modul. Ist M artinsch und noethersch, dann lässt sich M in eine endliche direkte Summe von unzerlegbaren Moduln zerlegen. Sind weiter

$$M = M_1 \oplus \dots \oplus M_m = N_1 \oplus \dots \oplus N_n$$

zwei Zerlegungen von M in unzerlegbare Moduln, dann ist $m = n$ und $M_i \cong N_{\pi(i)}$ für $1 \leq i \leq n$ und ein $\pi \in \mathcal{S}_n$.

Beweis:

Siehe Satz (6.12) in [4]. □

1.4.2 Definition

Es sei M ein A -Modul, der die Voraussetzungen für den Satz von Krull-Schmidt erfüllt. Es sei weiter U ein unzerlegbarer A -Modul. Die Anzahl der zu U isomorphen Summanden in der Zerlegung von M in unzerlegbare Moduln heißt die *Vielfachheit* von U in M . Diese ist nach dem Satz von Krull-Schmidt wohldefiniert. □

Das folgende Lemma spielt eine zentrale Rolle bei der Berechnung von Zerlegungen eines Moduls. Auch für den praktischen Teil dieser Arbeit erweist es sich als hilfreich.

1.4.3 Lemma (Lemma von Fitting)

Es sei M ein A -Modul und M sei artinsch und noethersch. Es sei weiter $\varphi \in \text{End}_A(M)$. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass

$$M = \text{Bild}(\varphi^n) \oplus \text{Kern}(\varphi^n)$$

ist.

Beweis:

Man betrachte folgende Ketten von Untermoduln von M :

$$\text{Bild}(\varphi) \supseteq \text{Bild}(\varphi^2) \supseteq \text{Bild}(\varphi^3) \supseteq \dots$$

und

$$\text{Kern}(\varphi) \subseteq \text{Kern}(\varphi^2) \subseteq \text{Kern}(\varphi^3) \subseteq \dots$$

Da M artinsch und noethersch ist, existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\text{Bild}(\varphi^n) = \text{Bild}(\varphi^{n+m}) \text{ und } \text{Kern}(\varphi^n) = \text{Kern}(\varphi^{n+m})$$

für alle $m \in \mathbb{N}$. Ist nun $x \in \text{Bild}(\varphi^n) \cap \text{Kern}(\varphi^n)$, dann existiert ein $y \in \text{Bild}(\varphi^n)$ mit $\varphi^n(y) = x$. Es gilt ferner $0 = \varphi^n(x) = \varphi^{2n}(y)$. Also ist $y \in \text{Kern}(\varphi^{2n}) = \text{Kern}(\varphi^n)$. Damit gilt $0 = \varphi^n(y) = x$. Somit ist $\text{Bild}(\varphi^n) \cap \text{Kern}(\varphi^n) = 0$

Es sei $x \in M$. Dann existiert ein $x' \in M$ mit $\varphi^{2n}(x') = \varphi^n(x)$, da $\text{Bild}(\varphi^n) = \text{Bild}(\varphi^{2n})$ ist. Es ist $x = x - \varphi^n(x') + \varphi^n(x')$. Damit gilt dann

$$\varphi^n(x - \varphi^n(x')) = \varphi^n(x) - \varphi^{2n}(x') = \varphi^n(x) - \varphi^n(x) = 0.$$

Also ist $M = \text{Bild}(\varphi^n) + \text{Kern}(\varphi^n)$. □

In den Untersuchungen, die in Kapitel 3 vorgenommen werden, spielen Permutationsmoduln eine wichtige Rolle. Einen Zusammenhang zwischen der Dimension eines Permutationsmoduls von kG , wobei k ein Körper und G eine endliche Gruppe ist, und dem Auftreten des trivialen Moduls als direktem Summanden gibt folgendes Lemma.

1.4.4 Lemma

Es sei G eine endliche Gruppe, k ein Körper und $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ eine transitive G -Menge. Dann gilt: Der triviale kG -Modul $T = k(\sum_{\omega \in \Omega} \omega)$ ist genau dann ein direkter Summand von $k\Omega$, wenn $\text{char}(k) \nmid n$.

Beweis:

Es sei der triviale Modul T ein direkter Summand von $k\Omega$. Es ist also $k\Omega = T \oplus U$ für einen Untermodul U .

Es seien $t \in T$ und $u_1 \in U$ mit $\omega_1 = t + u_1$. Ist $\omega \in \Omega$ beliebig, so existiert ein $g \in G$ mit $\omega_1 g = \omega$. Setze $u_\omega := u_1 g$. Damit gilt dann

$$u_\omega = \omega - t.$$

Setze $u := \sum_{\omega \in \Omega} u_\omega$. Damit gilt $u \in U$, da $u_\omega \in U$ für alle $\omega \in \Omega$. Andererseits ist aber

$$u = \sum_{\omega \in \Omega} (\omega - t) = \sum_{\omega \in \Omega} \omega - |\Omega|t \in T.$$

Also gilt $u = 0$, da $T \cap U = \{0\}$. Damit gilt dann $\sum_{\omega \in \Omega} \omega - |\Omega|t = 0$ und somit $\text{char}(k) \nmid |\Omega| = n$. Es gelte andererseits $\text{char}(k) \nmid n$. Dann ist

$$S := \left\{ \sum_{i=1}^n a_i \omega_i \mid \sum_{i=1}^n a_i = 0, a_i \in k \right\}$$

ein Untermodul von $k\Omega$. Da $\text{char}(k) \nmid n$ gilt ist $T \not\subseteq S$. Weiter ist $\{\omega_i - \omega_{i+1} \mid 1 \leq i \leq n-1\}$ eine Basis von S . Damit ist dann $\dim_k(S) = n-1$. Also gilt $k\Omega = T \oplus S$. Somit folgt die Behauptung. \square

1.5 Unzerlegbare und projektive Moduln

Die unzerlegbaren Moduln eines freien Moduls haben eine besondere Stellung in der modularen Darstellungstheorie. Hier werden nun Eigenschaften von diesen und allgemein von unzerlegbaren Moduln aufgeführt.

1.5.1 Definition

Ein direkter Summand eines freien A -Moduls heißt *projektiv*. Ist der Summand unzerlegbar, so wird im folgenden die Abkürzung PIM benutzt. \square

Der folgende Satz gibt Charakterisierungen von projektive Moduln an.

1.5.2 Satz

Es sei M ein A -Modul. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. M ist projektiv.
2. Ist V ein A -Modul und ist $\varphi \in \text{Hom}_A(V, M)$ surjektiv, dann ist $\text{Kern}(\varphi)$ ein direkter Summand von V .
3. Sind V und W A -Moduln und ist $\varphi \in \text{Hom}_A(V, W)$ surjektiv und $\vartheta \in \text{Hom}_A(M, W)$, dann existiert ein $\sigma \in \text{Hom}_A(M, V)$ mit $\varphi \circ \sigma = \vartheta$.

Beweis:

Siehe Kapitel II, Abschnitt 5, Satz 2 in [1]. \square

1.5.3 Definition

Ein Ring A heißt *lokal*, falls er genau ein maximales Rechtsideal besitzt. \square

1.5.4 Satz

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- A ist lokal.
- Die Menge $S := \{a \mid a \in A, a \text{ ist keine Einheit von } A\}$ ist ein Rechtsideal.
- $A/\text{rad}(A)$ ist ein Schiefkörper.

Beweis:

Siehe Satz (5.21) in [4].

Die folgende Charakterisierung von unzerlegbaren Moduln erlaubt es, eine Methode anzugeben, mit der man zwei unzerlegbare Moduln auf Isomorphie testen kann. Dieser Isomorphietest von unzerlegbaren Moduln wird am Ende des Abschnitts angegeben.

1.5.5 Satz

Es sei M ein artinscher und noetherscher A -Modul. Dann ist M genau dann unzerlegbar, wenn $\text{End}_A(M)$ lokal ist.

Beweis:

Siehe Satz (6.10) in [4]. □

Erfüllt A die Voraussetzungen für den Satz von Krull-Schmidt, so besteht ein direkter Zusammenhang zwischen den PIMs von A und Zerlegungen von A in unzerlegbare Moduln.

1.5.6 Satz

Es sei A artinsch und noethersch als A -Rechtsmodul, und es sei P ein PIM von A . Dann gilt:

$$P \cong eA$$

für ein primitives Idempotent e von A .

Beweis:

Folgt direkt aus Satz 1.2.3 und dem Satz von Krull-Schmidt. □

Ab jetzt und für den Rest des Abschnitts sei k ein Körper, A eine endlich-dimensionale k -Algebra; insbesondere sind die A -Moduln damit endlich-dimensionale k -Vektorräume. Zuerst wird auf den Zusammenhang von PIMs und einfachen Moduln von A eingegangen.

1.5.7 Satz

Es sei P ein PIM von A . Die Abbildung

$$P \mapsto P/\text{rad}(P)$$

ist eine Bijektion zwischen den Isomorphieklassen der PIMs von A und den Isomorphieklassen der einfachen Moduln von A .

Beweis:

Siehe Kapitel II, Abschnitt 5, Satz 3 in [1]. □

Der obige Satz beinhaltet insbesondere, dass für einen PIM P von A der Kopf, $P/\text{rad}(P)$, einfach ist, und weiter, dass für zwei PIMs P und Q aus $P/\text{rad}(P) \cong Q/\text{rad}(Q)$ folgt: $P \cong Q$. Also ist ein PIM durch seinen Kopf bis auf Isomorphie bestimmt. Für einen Modul M mit einfachem Kopf gilt folgendes Lemma:

1.5.8 Lemma

Es sei M ein A -Modul, $M/\text{rad}(M)$ einfach und P ein PIM von A mit

$$M/\text{rad}(M) \cong P/\text{rad}(P).$$

Dann ist M ein homomorphes Bild von P .

Beweis:

Siehe Kapitel II, Abschnitt 5, Lemma 5 in [1]. □

Im Fall der Gruppenalgebra kG , wobei G eine endliche Gruppe ist, ist auch der Sockel eines PIMs einfach und es gilt der folgende Satz:

1.5.9 Satz

Für einen PIM P von kG gilt

$$P/\text{rad}(P) \cong \text{soc}(P).$$

Beweis:

Siehe Kapitel II, Abschnit 6, Satz 6 in [1]. □

Möchte man zwei nichtprojektive unzerlegbare Moduln auf Isomorphie vergleichen, so reicht es nicht aus, nur die Köpfe dieser Moduln zu betrachten. Dennoch kann man auf die Isomorphie zweier solcher Moduln schließen. Der folgende Teil ist aus Abschnitt 4.5 in [21] entnommen. Für einen Isomphietest wird hier noch folgendes Lemma gebraucht.

1.5.10 Lemma

Es sei M ein unzerlegbarer A -Modul und $\mathcal{E} := \text{End}_A(M)$ sein Endomorphismenring. Ist $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine k -Basis von \mathcal{E} , dann existiert mindestens ein $1 \leq i \leq n$, so dass v_i invertierbar ist.

Beweis:

Nach Satz 1.5.5 ist \mathcal{E} lokal. Nun ist $\text{id}_M = \sum_i a_i v_i$ mit $a_i \in k$ für $1 \leq i \leq n$. Da \mathcal{E} lokal ist, ist nach Satz 1.5.4 die Menge der Nicht-Einheiten ein Ideal in \mathcal{E} . Da id_M eine Einheit in \mathcal{E} ist, existiert also mindestens ein v_i , $1 \leq i \leq n$, so dass v_i invertierbar ist. □

1.5.11 Satz (Isomorphietest)

Es seien M und N zwei unzerlegbare A -Moduln und $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine k -Basis von $\text{Hom}_A(M, N)$. Dann sind M und N genau dann isomorph, wenn v_i ein Isomorphismus ist für mindestens ein i mit $1 \leq i \leq n$.

Beweis:

Sind M und N isomorph und $\varphi : N \rightarrow M$ ein Isomorphismus, dann ist $\varphi \circ v_1, \dots, \varphi \circ v_n$ eine Basis von $\text{End}_A(M)$. Nach 1.5.10 Lemma existiert ein i , so dass $\varphi \circ v_i$ invertierbar ist. Damit ist v_i invertierbar. Die andere Richtung ist trivial. \square

1.6 Zerlegungsmatrix

Um einen Zusammenhang von Darstellungen von A in Charakteristik Null und in Charakteristik $p > 0$ herzustellen, wird ein System von Ringen eingeführt. Ein wichtiger Begriff der modularen Darstellungstheorie, der diesen Zusammenhang widerspiegelt, ist die Zerlegungsmatrix von A . Zunächst werden die dazu notwendigen Grundlagen und Begriffe geklärt.

1.6.1 Definition

Es sei k ein Körper und A eine k -Algebra. Dann heißt k *Zerfällungskörper* von A , falls $\text{End}_A(V) \cong k$ für alle einfachen A -Moduln V ist. \square

1.6.2 Definition

Ein p -modulares System ist ein Tripel (K, R, k) von Ringen, wobei R ein vollständiger diskreter Bewertungsring ist, K der Quotientenkörper von R mit Charakteristik Null ist und $k = R/\pi R$, wobei πR das Jacobson Radikal von R ist, mit $\text{char}(k) = p$ ist. \square

Zum Beispiel bilden $(\mathbb{Q}_p, \mathbb{Z}_p, \mathbb{F}_p)$, wobei \mathbb{Z}_p der Ring der p -adischen Zahlen ist, ein p -modulares System. Ab jetzt sei (K, R, k) ein p -modulares System. Es werden folgende Bezeichnungen genutzt:

1.6.3 Bezeichnungen

Ist A eine R -Algebra, die frei und endlich erzeugt als R -Modul ist, dann sei $KA := K \otimes_R A$. Ist X ein A -Gitter, das heißt, X ist ein A -Modul und frei und endlich erzeugt als R -Modul, dann sei $KX := K \otimes_R X$. Weiter wird mit $\bar{A} := A/\pi A$ und $\bar{X} := X/\pi X$ die Reduktion modulo π bezeichnet. Es ist \bar{A} eine k -Algebra und \bar{X} ein \bar{A} -Modul.

1.6.4 Definition

Es sei M ein KA -Modul. Ein A -Gitter X heißt *R -Form* von M , falls $KX \cong M$ als KA -Moduln.

Eine Antwort auf die Frage nach der Existenz von R -Formen gibt folgender Satz:

1.6.5 Satz

Es sei M ein KA -Modul. Dann hat M eine R -Form X . Insbesondere gilt $\text{rk}_R(X) = \dim_K(M)$.

Beweis:

Es sei $\{a_1, \dots, a_n\}$ eine R -Basis von A und $\{v_1, \dots, v_m\}$ eine K -Basis von M . Es sei

$$X := \langle v_j a_i \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \rangle$$

als R -Modul. Offensichtlich ist X ein A -Modul und endlich erzeugt als R -Modul. Desweiteren gilt $rx \neq 0$ für alle $0 \neq r \in R$ und $0 \neq x \in X$. Damit ist X frei, da X torsionsfrei über dem Hauptidealring R ist. Nach Konstruktion ergibt sich $KX \cong M$. Ist zudem $\{x_1, \dots, x_n\}$ eine R -Basis von X , dann ist $\{1 \otimes x_1, \dots, 1 \otimes x_n\}$ eine K -Basis von KX . Damit folgt auch die zweite Behauptung. \square

1.6.6 Satz

Es sei M ein KA -Modul und seien X und Y zwei R -Formen von M . Dann haben \bar{X} und \bar{Y} bis auf Isomorphie die gleichen Kompositionsfaktoren als \bar{A} -Moduln.

Beweis:

Siehe Satz (17.7) aus Kapitel 1 in [5]. \square

Damit sind jetzt die Grundlagen gelegt, um die Zerlegungsmatrix von A einzuführen.

1.6.7 Definition

Es sei KA halbeinfach und es seien M_1, \dots, M_n Vertreter der Isomorphieklassen der einfachen KA -Moduln und X_1, \dots, X_n seien R -Formen davon. Weiter seien S_1, \dots, S_l Vertreter der einfachen \bar{A} -Moduln. Dann sei d_{ij} die Vielfachheit von S_j als Kompositionsfaktor in \bar{X}_i . Dies ist nach Satz 1.6.6 wohldefiniert. Die Matrix $D := (d_{ij})_{i,j}$ heißt *Zerlegungsmatrix* von A ; sie ist bis auf Permutation der Spalten und Zeilen eindeutig bestimmt. Ist $A = RG$, so nennt man D auch *p -modulare Zerlegungsmatrix* von G . \square

Der folgende Satz gibt einen Zusammenhang der PIMs von A und der Zerlegungsmatrix von A an.

1.6.8 Satz (Brauer Reziprozität)

Es sei KA halbeinfach, K ein Zerfällungskörper für KA und k ein Zerfällungskörper für kA . Es seien weiter P_1, \dots, P_l Repräsentanten der Isomorphieklassen von PIMs von A , so dass $\bar{P}_1, \dots, \bar{P}_l$ Repräsentanten der PIMs von \bar{A} sind und weiter $S_i = \bar{P}_i / \text{rad}(\bar{P}_i)$ Repräsentanten von einfachen \bar{A} -Moduln sind. Ist D die Zerlegungsmatrix von A , dann gilt mit den Bezeichnungen von Definition 1.6.7

$$d_{ij} = \text{Vielfachheit von } KX_i = M_i \text{ in } KP_j.$$

Beweis:

Siehe Satz (17.8) aus Kapitel 1 in [5]. \square

1.7 Brauercharaktere

In diesem Abschnitt sei G eine endliche Gruppe, p eine Primzahl und (K, R, k) ein p -modulares System. Ein wichtiges Hilfsmittel zur Untersuchungen von Moduln sind Brauercharaktere. Mit ihnen kann man unter anderem die Kompositionsfaktoren eines Moduln bestimmen.

1.7.1 Definition

Es sei

$$G_{p'} := \{g \in G \mid p \nmid |g|\}$$

die Menge der p -regulären Elemente von G . Die *p' -Konjugiertenklassen* von G sind die Konjugiertenklassen von G die in $G_{p'}$ liegen. Der *Exponent* der Gruppe ist definiert durch

$$\text{exp}(G) := \min\{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \mid g^n = 1 \forall g \in G\}.$$

Man sagt, K ist *genügend groß bezüglich* G , falls K alle $\text{exp}(G)$ -Einheitswurzeln besitzt. \square

1.7.2 Satz

Es sei (K, R, k) ein p -modulares System und K genügend groß bezüglich G . Damit sind K und k Zerfällungskörper für alle Untergruppen von G .

Beweis:

Siehe Korollar (17.2) [4]. \square

Dieser Satz führt zu folgender Namensgebung.

1.7.3 Definition

Ein p -modulares System (K, R, k) nennt man *p -modulares Zerfällungssystem für* G , falls K genügend groß bezüglich G ist. \square

Ab jetzt sei (K, R, k) ein p -modulares Zerfällungssystem für G .

1.7.4 Lemma

Es sei $\text{exp}(G) = p^a m$ mit $p \nmid m$. Es sei weiter ω eine primitive m -te Einheitswurzel in K und $\bar{} : R \rightarrow k$ der kanonische Epimorphismus. Dann ist $\bar{\omega}$ eine primitive m -te Einheitswurzel in k und

$$\bar{} : \langle \omega \rangle \rightarrow \langle \bar{\omega} \rangle$$

ist ein Isomorphismus.

Beweis:

Siehe Abschnitt 17.B in [4]. \square

1.7.5 Definition

Es sei M ein kG -Modul. Der *Brauercharakter* von M ist die Abbildung

$$\varphi_M : G_{p'} \rightarrow K,$$

die definiert ist durch:

Es sei $g \in G_{p'}$ und es seien $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ die Eigenwerte aus k der linearen Abbildung $v \mapsto vg$ für $v \in M$. Nach Lemma 1.7.4 existieren eindeutige x_1, \dots, x_m aus K mit $\bar{x}_i = \lambda_i$ für alle i . Damit setze $\varphi_M(g) := \sum_i x_i$. \square

1.7.6 Definition

Es seien S_1, \dots, S_n Vertreter der Isomorphieklassen von einfachen kG -Moduln. Dann heißt $\varphi_i := \varphi_{S_i}$ *irreduzibler Brauercharakter* und

$$\text{IBr}(G) := \text{IBr}_k(G) := \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$$

bezeichnet die Menge der irreduziblen Brauercharaktere. \square

1.7.7 Lemma

Die Anzahl der absolut einfachen FG -Moduln, wobei F ein Zerfällungskörper für G der Charakteristik p ist, ist gleich der Anzahl der p' -Konjugiertenklassen von G .

Beweis:

Man vergleiche Korollar (17.11) in [4]. \square

Einige Eigenschaften von Brauercharakteren sind im folgendem Satz zusammengefasst:

1.7.8 Satz

Es seien M und N kG -Moduln und φ_M, φ_N die zugehörigen Brauercharaktere. Dann gilt:

1. φ_M ist eine Klassenfunktion auf $G_{p'}$.
2. Ist $M \cong N$, dann ist $\varphi_M = \varphi_N$.
3. Es gilt $|\text{IBr}(G)| = \text{Anzahl der } p'\text{-Konjugiertenklassen in } G$.
4. Gilt $N \leq M$, so ist $\varphi_M = \varphi_{M/N} + \varphi_N$.
5. Gilt $\varphi_M = \varphi_N$, so haben M und N die gleichen Kompositionsfaktoren.

Beweis:

Für 1. und 4. siehe Satz (17.5) und für 3. siehe Satz (17.9) in [4]. Ist $M \cong N$, dann ist für $g \in G_{p'}$ die Matrix von g auf M ähnlich zu der von g auf N , somit folgt 2.. Die Behauptung 5. folgt aus Korollar (17.10) in [4]. \square

1.8 Blöcke für Gruppenalgebren

Es sei G eine endliche Gruppe, (K, R, k) ein p -modulares Zerfällungssystem für G . Mit der eindeutigen Zerlegung von RG in Blöcke kann man nun die Menge der Charaktere von G partitionieren.

1.8.1 Definition

- Ein *Block* oder *p-Block* von G ist ein Block von RG .
- Es sei $e \in RG$ ein zentral primitives Idempotent und $B = eRGe$ der zugehörige Block.
 - $\chi \in \text{Irr}_K(G)$ gehört zu B , falls $\chi(e) \neq 0$.
 - $\varphi \in \text{IBr}_k(G)$ gehört zu B , falls $M\bar{e} = M$ für einen einfachen kG -Modul M mit $\varphi = \varphi_M$.

\square

1.8.2 Bemerkung

Es sei $\chi \in \text{Irr}_K(G)$. Dann gehört χ zu genau einem Block. Ist $\varphi \in \text{IBr}_k(G)$ mit $d_{\chi, \varphi} \neq 0$, dann gehört φ zum selben Block wie χ .

Beweis:

Es sei X ein RG -Gitter mit $\chi = \chi_{KX}$. Dann ist X unzerlegbar, da χ irreduzibel ist. Aus Bemerkung 1.2.5 folgt, dass X zu genau einem Block $B = eRGe$ gehört. Es gilt $\chi(e) = \chi(1) \neq 0$, da e als Identität auf X operiert. Ist $B' = e'RGe' \neq B$, dann operiert e' als Null auf $X = Xe$, das bedeutet $\chi(e') = 0$. Also gehört χ nicht zu B' . Weiter operiert \bar{e} als Identität auf \bar{X} , somit gehört jeder Kompositionsfaktor von \bar{X} zu $\bar{B} = \bar{e}kG\bar{e}$. Ist dann $d_{\chi, \varphi} \neq 0$, dann gehört φ zu B , denn $\varphi = \varphi_M$ für einen Kompositionsfaktor M von \bar{X} . \square

Folgende Notationen werden jetzt eingeführt.

1.8.3 Definition

Für einen Block B von G sei

$$\text{Irr}(B) := \text{Irr}_K(B) := \{\chi \in \text{Irr}_K(G) \mid \chi \text{ gehört zu } B\}$$

und

$$\text{IBr}(B) := \text{IBr}_k(B) := \{\varphi \in \text{IBr}_k(G) \mid \varphi \text{ gehört zu } B\}.$$

Der Block, der den trivialen Charakter von G enthält, wird *Hauptblock* genannt. \square

Die Blockzugehörigkeit zweier gewöhnlicher irreduzibler Charaktere kann man mittels der zugehörigen zentralen Charaktere von G überprüfen. Für eine Konjugiertenklasse C von G sei

$$C^+ = \sum_{g \in C} g$$

die Konjugiertenklassensumme von C . Die Konjugiertenklassensummen von G bilden eine Basis von $Z(RG)$. Es sei $\chi \in \text{Irr}_K(G)$ und C eine Konjugiertenklasse von G . Dann ist der R -Algebrenhomomorphismus

$$\omega_\chi : Z(RG) \rightarrow R,$$

der durch lineare Fortsetzung von

$$\omega_\chi(C^+) := \frac{\chi(C^+)}{\chi(1)}$$

definiert ist, der zu χ gehörende *zentrale Charakter*. Da $\omega_\chi(C^+)$ eine ganze algebraische Zahl über R ist (vgl. Proposition (9.31) in [4]) und R ganz abgeschlossen ist, ist $\omega_\chi(C^+) \in R$. Damit ist ω wohldefiniert. Nun kann man folgenden k -Algebrenhomomorphismus betrachten:

$$\begin{array}{ccc} \overline{\omega_\chi} : Z(kG) & \rightarrow & k \\ C^+ & \mapsto & \overline{\omega_\chi(C^+)}. \end{array}$$

Mit Hilfe dieser Homomorphismen kann man die Einteilung der irreduziblen Charaktere in Blöcke bestimmen.

1.8.4 Satz

Es seien χ und χ' aus $\text{Irr}_K(G)$. Dann sind äquivalent:

- χ und χ' liegen im selben Block von G .
- $\overline{\omega_\chi} = \overline{\omega_{\chi'}}$

Beweis:

Siehe Kapitel IV, Lemma (4.2) in [5]. \square

1.9 Defektgruppen von Blöcken

Es sei G eine endliche Gruppe und (K, R, k) ein p -modulares Zerfallungssystem für G .

1.9.1 Definition

Es sei D eine Untergruppe von G und $\text{Fix}_D(RG)$ die Menge der Fixpunkte von D auf RG unter Konjugation. Sei weiter Γ eine Menge von Vertretern der Linksnebenklassen von D in G . Die *Spurabbildung relativ zu D* und G ist der R -Endomorphismus

$$\begin{array}{ccc} T_{G/D} : \text{Fix}_D(RG) & \rightarrow & Z(RG) \\ a & \mapsto & \sum_{x \in \Gamma} x^{-1}ax. \end{array}$$

\square

1.9.2 Satz

Ist e ein zentral primitives Idempotent von RG , dann existiert eine p -Untergruppe D von G mit den folgenden Eigenschaften:

- $e \in T_{G/D}(\text{Fix}_D(RG))$
- Ist $D' \leq G$ mit $e \in T_{G/D'}(\text{Fix}_{D'}(RG))$, dann ist D zu einer Untergruppe von D' konjugiert.

Beweis:

Siehe Kapitel III, Lemma (6.5) in [5]. \square

1.9.3 Definition

Es sei $B = eRGe$ ein Block von G und e das zugehörige zentral primitive Idempotent. Eine Gruppe D wie in Satz 1.9.2 heißt *Defektgruppe von e* oder *Defektgruppe von B* . Ist $|D| = p^d$, so nennt man d den *Defekt von B* . \square

Der nächste Satz gibt einen Zusammenhang zwischen dem Defekt eines Blockes und den gewöhnlichen Charakteren beziehungsweise den Brauercharakteren eines Blockes an.

1.9.4 Satz

Es sei B ein Block von G mit Defekt d und $a := \max\{n \in \mathbb{N} \mid p^n \mid |G|\}$. Dann gilt:

- d ist die kleinste Zahl, mit $p^{a-d} \mid \chi(1)$ für alle $\chi \in \text{Irr}(B)$.
- d ist die kleinste Zahl, mit $p^{a-d} \mid \varphi(1)$ für alle $\varphi \in \text{IBr}(B)$.

Beweis:

Siehe Kapitel IV, Satz (4.5) in [5]. \square

Nun kann man sich zwei Extremfälle ansehen.

1.9.5 Bemerkung

Nach Satz 1.9.4 ist der Defekt des Hauptblockes maximal, also sind seine Defektgruppen p -Sylowgruppen von G . Desweiteren ist offensichtlich $\{1\}$ eine Defektgruppe eines Blockes von G mit Defekt Null. \square

Über die Charaktere eines Blockes mit Defekt Null lässt sich sogar noch mehr aussagen.

1.9.6 Satz

Es sei B ein Block von RG und $\chi \in \text{Irr}(B)$. Folgende Aussagen sind äquivalent:

- B hat Defekt Null.
- $|\text{Irr}(B)| = |\text{IBr}(B)|$
- $p \nmid \frac{|G|}{\chi(1)}$
- $\text{Irr}(B) = \{\chi\}$
- $D_B = (1)$, dabei ist D_B der Teil der Zerlegungsmatrix D zu B .
- Alle kG -Moduln die in B liegen sind projektiv.

Beweis:

Vergleiche Kapitel IV, Lemma (4.19) in [5]. \square

1.9.7 Definition

Es sei B ein Block von G mit Defekt Null. Nach Satz 1.9.6 ist $\text{Irr}(B) = \{\chi\}$. Mann nennt χ einen *Charakter von Defekt Null*. \square

1.10 Tensorprodukte von kG -Moduln

Es seien G eine endliche Gruppe, k ein Körper mit Charakteristik p und M, N zwei endlich-dimensionale kG -Moduln. Das Tensorprodukt $M \otimes_k N$ von M und N über k ist zunächst ein k -Vektorraum. Durch Diagonaloperation von G auf $M \otimes_k N$, das heißt $(m \otimes n)g := mg \otimes ng$ für $g \in G, m \in M$ und $n \in N$, wird $M \otimes_k N$ ein kG -Modul. Im folgenden wird $M \otimes_k N$ mit $M \otimes N$ bezeichnet. Das nächste Lemma gibt Auskunft über den Charakter von $M \otimes N$.

1.10.1 Lemma

Es seien M und N zwei kG -Moduln mit Brauercharakteren χ und ρ . Dann bewirkt $M \otimes N$ den Charakter $\chi\rho$.

Beweis:

Siehe Lemma (17.13) in [4]. □

Das folgende Lemma gibt eine Möglichkeit, wie man mit einem treuen kG -Modul alle einfachen kG -Moduln bekommen kann.

1.10.2 Lemma

Es sei φ ein treuer Brauercharakter von kG mit genau n verschiedenen Werten und M ein kG -Modul mit $\varphi_M = \varphi$. Dann kommt jeder einfache kG -Modul als Kompositionsfaktor in mindestens einem der Produkte

$$M, M \otimes M, \dots, M^{\otimes n} = \underbrace{M \otimes \dots \otimes M}_{n\text{-Faktoren}}$$

vor.

Beweis:

Siehe Kapitel IV, Lemma (3.15) in [5]. □

Für PIMs von kG gilt ein ähnlicher Satz, für den es aber keine obere Schranke für die maximale Anzahl der Faktoren des Tensorproduktes gibt.

1.10.3 Definition

Ein kG -Modul M heißt *treu*, falls nur $1 \in G$ trivial auf M operiert. □

1.10.4 Satz

Es sei P ein PIM von kG und M ein treuer kG -Modul. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass P ein direkter Summand von $M^{\otimes n}$ ist.

Beweis:

Siehe Kapitel II, Abschnitt 7, Satz 1 in [1]. □

Die Frage ob kG einen treuen Modul hat, kann in bestimmten Fällen durch das folgende Lemma beantwortet werden.

1.10.5 Lemma

Es seien S_i , für $1 \leq i \leq n$, die einfachen kG -Moduln. Falls G keine nichttriviale normale p -Sylowgruppe hat, ist $S_1 \oplus \dots \oplus S_n$ ein treuer kG -Modul.

Beweis:

Siehe Kapitel II, Abschnitt 7, Proposition 2 in [1]. □

Das Tensorprodukt eines projektiven Moduls mit einem weiteren Modul ist wieder projektiv.

1.10.6 Lemma

Es sei P ein projektiver kG -Modul und V ein weiterer kG -Modul. Dann ist $P \otimes V$ projektiv.

Beweis:

Siehe Kapitel II, Paragraph 7, Lemma 4 in [1] □

Das folgende Lemma gibt Auskunft über Quotienten von Tensorprodukten.

1.10.7 Lemma

Es seien U, V und W endlich-dimensionale kG -Moduln mit $W \leq V$. Dann gilt:

$$(U \otimes V)/(U \otimes W) \cong U \otimes (V/W)$$

als kG -Moduln.

Beweis:

Es sei $\{u_1, \dots, u_n\}$ eine Basis von U und $\{v_1, \dots, v_m\}$ eine Basis von V . Dann ist

$$\{u_1 \otimes v_1, u_1 \otimes v_2, \dots, u_1 \otimes v_m, \dots, u_n \otimes v_1, \dots, u_n \otimes v_m\}$$

eine Basis von $U \otimes V$ und

$$\{u_1 \otimes v_1 + W, u_1 \otimes v_2 + W, \dots, u_1 \otimes v_m + W, \dots, u_n \otimes v_1 + W, \dots, u_n \otimes v_m + W\}$$

ein Erzeugendensystem von $U \otimes (V/W)$. Es sei

$$\varphi : U \otimes V \rightarrow U \otimes V/W$$

definiert durch

$$\varphi(u_i \otimes v_j) := u_i \otimes v_j + W \text{ für } 1 \leq i \leq n \text{ und } 1 \leq j \leq m$$

und linearer Fortsetzung. Dann ist φ wohldefiniert und surjektiv, desweiteren gilt

$$\varphi(u_i g \otimes v_j g) = u_i g \otimes v_j g + W = \varphi(u_i \otimes v_j) g \text{ für } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \text{ und für alle } g \in G.$$

Also ist φ ein kG -Homomorphismus. Offensichtlich gilt $U \otimes W \subseteq \text{Kern}(\varphi)$. Da φ surjektiv ist gilt

$$\dim_k \text{Bild}(\varphi) = \dim_k U (\dim_k V - \dim_k W)$$

und

$$\dim_k \text{Bild}(\varphi) + \dim_k \text{Kern}(\varphi) = \dim_k U \dim_k V.$$

Daraus folgt

$$\dim_k \text{Kern}(\varphi) = \dim_k U (\dim_k V - \dim_k V + \dim_k W) = \dim_k U \dim_k W.$$

Insgesamt folgt $\text{Kern}(\varphi) = U \otimes W$. Mit dem Homomorphiesatz folgt die Behauptung. \square

Eine Zerlegung des Tensorproduktes von induzierten Moduln gibt ein Satz von Mackey an.

1.10.8 Satz (Mackeys Tensorproduktsatz)

Es seien $H_1, H_2 \leq G$ und M, N kH_i -Rechtsmoduln, $i = 1, 2$. Dann gilt

$$M \uparrow^G \otimes N \uparrow^G \cong \bigoplus_{t \in H_1 \backslash G / H_2} (M^t \downarrow_{H_1^t \cap H_2} \otimes N \downarrow_{H_1^t \cap H_2}) \uparrow^G$$

als kG -Moduln. Hierbei bedeutet $t \in H_1 \backslash G / H_2$, dass t durch ein vollständiges System von Doppelnebenklassenvertretern von $H_1 \backslash G / H_2$ läuft. Weiter seien $H_1^t = t^{-1} H_1 t$ und $M^t = M \otimes_{kH_1} t$.

Beweis:

Man vergleiche Satz (1.17) Kapitel 3 in [18]. \square

1.10.9 Lemma

Es sei M ein n -dimensionaler kG -Modul und $M^* := \text{Hom}_k(M, k)$ der Dualraum von M . Durch

$$(fg)(m) := f(mg^{-1}),$$

wobei $g \in G, f \in M^*$ und $m \in M$ ist, wird M^* zum kG -Modul. Der kG -Modul M^* heißt *Kontragradient von M* .

Es sei $\{v_1, \dots, v_m\}$ eine Basis von M und $\{w_1, \dots, w_m\}$ die duale Basis von M^* , mit $w_i(v_j) = \delta_{i,j}$ für $1 \leq i, j \leq n$. Ist

$$v_i g = \sum_{j=1}^n b_{ij}(g) v_j,$$

für $g \in G$ und $b_{ij}(g) \in k$, dann ist

$$w_i g = \sum_{j=1}^n b_{ji}(g^{-1}) w_j.$$

Ist also $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ die Matrix von g auf M bezüglich $\{v_1, \dots, v_m\}$, so ist $(B^{-1})^T$ die Matrix von g auf M^* bezüglich der dualen Basis $\{w_1, \dots, w_m\}$.

Beweis:

Siehe Lemma (8.2) in [10]. \square

Abschließend wird noch ein Lemma zum Kontragredient eines Tensorproduktes angegeben.

1.10.10 Lemma

Es seien M und N zwei kG -Moduln. Dann gilt:

$$(M \otimes N)^* \cong M^* \otimes N^*$$

als kG -Moduln.

Beweis:

Siehe Lemma (8.4) aus Kapitel VII in [10].

□

Kapitel 2

Darstellungstheorie der symmetrischen Gruppe

In diesem Kapitel werden einige Grundlagen und Ergebnisse der Darstellungstheorie der symmetrischen Gruppe im nichtmodularen Fall und im modularen Fall aufgeführt. Partitionen spielen in der Darstellungstheorie der symmetrischen Gruppe eine wichtige Rolle. Durch sie können die einfachen Moduln parametrisiert werden. Im Fall, dass die Charakteristik des Körpers eine Primzahl p ist, wird nur eine Teilmenge der Partitionen, die p -regulären Partitionen, betrachtet.

In den nächsten beiden Abschnitten wird die Parametrisierung der irreduziblen Charaktere in Charakteristik Null und der einfachen Moduln im modularen Fall angesehen.

Der dritte Abschnitt beschäftigt sich mit der p -Blockeinteilung der irreduziblen Charaktere und dem dazu zentralen Satz, der Nakayama-Vermutung.

2.1 Charakteristik 0

Ziel dieses Abschnitts ist es, jeder Partition von $n \in \mathbb{N}$ eine einfache Darstellung zuzuordnen. Der zugrunde liegende Körper ist in diesem Abschnitt \mathbb{C} . Es wird sich aber herausstellen, dass die einfachen $\mathbb{C}\mathcal{S}_n$ -Darstellungen schon alle über \mathbb{Q} realisierbar sind.

2.1.1 Definition

Es sei $n \in \mathbb{N}$. Es heißt $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l)$ eine *Partition* von n , falls

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_l > 0$$

und

$$\sum_{i=1}^l \lambda_i = n$$

ist. Weiter heißt l die *Länge* von λ . Mit \mathbb{P}_n wird die Menge aller Partitionen von n bezeichnet. Sind $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$ und $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)$ Partitionen von n , dann heißt λ *dominiert* μ , geschrieben $\mu \leq \lambda$, falls

$$\sum_{i=1}^j \mu_i \leq \sum_{i=1}^j \lambda_i \text{ für alle } 1 \leq j \leq \min\{l, m\}.$$

□

Es ist bekannt, dass in der symmetrischen Gruppe zwei Elemente genau dann konjugiert sind, wenn sie den gleichen Zykeltyp haben (man vergleiche Lemma (1.2.6) in [11]). Nun kann man eindeutig jedem Zykeltyp eine Partition von n zuordnen. Dieses legt eine natürliche Bijektion zwischen den Partitionen von n und den irreduziblen Charakteren von \mathcal{S}_n nahe. Um die einfachen Darstellungen zu parametrisieren wird jeder Partition von n eine Untergruppe von \mathcal{S}_n zugeordnet.

2.1.2 Definition

Es sei $\lambda \in \mathbb{P}_n$ der Länge l . Es sei $n_i^\lambda := \{n \in \mathbb{N} \mid \lambda_1 + \dots + \lambda_{i-1} \leq n \leq \lambda_1 + \dots + \lambda_i\}$ für $1 \leq i \leq l$. Damit definiere $\mathcal{S}_\lambda := \{\pi \in \mathcal{S}_n \mid \pi(n_i^\lambda) = n_i^\lambda, 1 \leq i \leq l\}$. Die Gruppe \mathcal{S}_λ heißt die *Younguntergruppe zu λ* von \mathcal{S}_n . \square

Im folgenden wird für eine Partition λ mit $1_{\mathcal{S}_\lambda}$ der triviale Charakter von \mathcal{S}_λ und mit

$$\varepsilon_{\mathcal{S}_\lambda} : \begin{array}{l} \mathcal{S}_\lambda \rightarrow \mathbb{C}, \\ \pi \mapsto \text{sgn}(\pi) \end{array}$$

der Signumscharakter von \mathcal{S}_λ bezeichnet. Um einer Partition eine einfache Darstellung zuzuordnen, wird noch ein weiterer Begriff eingeführt.

2.1.3 Definition

Es sei $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l)$ eine Partition von $n \in \mathbb{N}$. Dann sei $\lambda' := (\lambda'_1, \dots, \lambda'_l)$ mit $\lambda'_j := |\{i \mid \lambda_i \geq j\}|$. Die Partition λ' heißt die zu λ *konjugierte Partition*. \square

2.1.4 Beispiel

Man kann eine Partition λ durch das dazugehörige Youngdiagramm, welches aus n Kreuzen besteht, verbildlichen. In der i ten Zeile des Diagramms stehen λ_i Kreuze. Es sei $\lambda = (4, 3, 1)$, dann haben die zu λ und λ' zugehörigen Youngdiagramme folgende Gestalt:

$$\begin{array}{ccc} \times & \times & \times & \times & & & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & & & & \times & \times & \\ \times & & & & & & \times & \times & \\ & & & & & & \times & & \\ & & & & & & & & \times \end{array}$$

Wenn man also Youngdiagramme betrachtet, ist das zu der konjugierten Partition gehörende Diagramm das an der Hauptachse gespiegelte Diagramm von λ . \square

Nun wird ein Satz angegeben, der eine Zuordnung zwischen Partitionen und einfachen Darstellungen ermöglicht.

2.1.5 Satz

Es sei $\lambda \in \mathbb{P}_n$. Dann haben $1_{\mathcal{S}_\lambda} \uparrow^{\mathcal{S}_n}$ und $\varepsilon_{\mathcal{S}_\lambda} \uparrow^{\mathcal{S}_n}$ genau einen gemeinsamen Konstituenten. Dieser werde mit $[\lambda]$ bezeichnet, der zugehörige Charakter mit ζ^λ . Weiter ist $[\lambda]$ über \mathbb{Q} realisierbar.

Beweis:

Siehe Satz (2.1.3) in [11]. \square

Die irreduziblen Charaktere $\zeta^{(n)}$ und $\zeta^{(1^n)}$ lassen sich leicht ermitteln. Weiter kann man auch einfach das Produkt $\varepsilon_{\mathcal{S}_n} \zeta^\lambda$ bestimmen.

2.1.6 Bemerkung

Für $\lambda \in \mathbb{P}_n$ gilt:

$$\begin{aligned} \zeta^{(n)} &= 1_{\mathcal{S}_n} \\ \zeta^{(1^n)} &= \varepsilon_{\mathcal{S}_n} \\ \zeta^{\lambda'} &= \varepsilon_{\mathcal{S}_n} \zeta^\lambda \end{aligned}$$

Beweis:

Es ist $\mathcal{S}_{(n)} = \mathcal{S}_n$ und mit $(n)' = (1^n)$ ist dann $\mathcal{S}_{(n)'} = \{1\}$. Damit folgen die ersten beiden Gleichungen. Es gilt:

$$\begin{aligned} (1_{\mathcal{S}_\lambda} \uparrow^{\mathcal{S}_n}) \varepsilon_{\mathcal{S}_n} &= \varepsilon_{\mathcal{S}_\lambda} \uparrow^{\mathcal{S}_n}, \\ (\varepsilon_{\mathcal{S}_\lambda} \uparrow^{\mathcal{S}_n}) \varepsilon_{\mathcal{S}_n} &= 1_{\mathcal{S}_\lambda} \uparrow^{\mathcal{S}_n} \end{aligned}$$

Mit der Definition von ζ^λ folgt damit die letzte Gleichung. \square

Aus der obigen Bemerkung folgt: Ist λ die zum Charakter χ gehörige Partition, dann ist λ' die zu $\varepsilon_{\mathcal{S}_n} \chi$ gehörige Partition. Im Fall, dass die Charakteristik des Körpers größer als Null ist, ist die Bestimmung des Tensorproduktes eines einfachen Moduls mit dem Signumsmodul nicht mehr so einfach. Im nächsten Kapitel wird auf dieses Problem eingegangen. Der nun folgende Satz gibt über die Anzahl von einfachen Darstellungen von \mathcal{S}_n Auskunft.

2.1.7 Satz

$\{[\lambda] \mid \lambda \in \mathbb{P}_n\}$ ist eine vollständige Menge von Repräsentanten der Äquivalenzklassen der gewöhnlichen einfachen Darstellungen von \mathcal{S}_n .

Beweis:

Siehe Satz (2.1.11) in [11]. □

Hiermit ist auch gezeigt, dass \mathbb{Q} ein Zerfällungskörper ist, da jede einfache Darstellung nach Satz 2.1.5 über \mathbb{Q} realisierbar ist. Allgemein gilt der folgende Satz.

2.1.8 Satz

Jeder Körper ist ein Zerfällungskörper für \mathcal{S}_n .

Beweis:

Siehe Satz (2.1.12) in [11]. □

2.2 Allgemeiner Fall

In diesem Abschnitt wird der Fall betrachtet, dass p , die Charakteristik des Körpers k , beliebig ist. Um die einfachen Moduln von $k\mathcal{S}_n$ zu erhalten, werden Spechtmoduln, das sind gewisse Untermoduln von Permutationsmoduln, angesehen. Mit diesen lassen sich alle einfachen Moduln konstruieren. Insbesondere ist die Konstruktion der Spechtmoduln unabhängig von k , so dass sogar alle einfachen Moduln für die gewöhnliche Darstellungstheorie von \mathcal{S}_n vorkommen. Weiter werden einige Eigenschaften von Spechtmoduln aufgeführt. Vorab müssen einige Begriffe, die dafür grundlegend sind, definiert werden.

2.2.1 Definition

Es sei $\lambda \in \mathbb{P}_n$ und $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Die Partition λ heißt *p-regulär*, falls gilt: Existiert ein i mit

$$\lambda_i = \lambda_{i+1} = \dots = \lambda_{i+r},$$

so ist $r \leq p - 1$. Wenn $p = 0$ ist, dann sind alle Partitionen *p-regulär*. □

Die Menge der *p-regulären* Partitionen von n steht in Bijektion zu den *p-regulären* Klassen von \mathcal{S}_n .

2.2.2 Lemma

Die Anzahl der *p-regulären* Klassen von \mathcal{S}_n ist gleich der Anzahl der *p-regulären* Partitionen.

Beweis:

Vergleiche Lemma (6.1.2) in [11]. □

Da jeder Körper nach Satz 2.1.8 ein Zerfällungskörper von \mathcal{S}_n ist, ist die Anzahl der Isomorphieklassen einfacher $k\mathcal{S}_n$ -Moduln gleich der Anzahl der *p-regulären* Partitionen.

2.2.3 Definition

Es sei $\lambda \in \mathbb{P}_n$. Ein λ -Tableau ist eines von $n!$ möglichen Diagrammen, das dadurch entsteht, dass jedes der Kreuze aus dem zu λ gehörenden Youngdiagramm durch eine der Zahlen $1, \dots, n$ ersetzt wird, wobei jede Zahl genau einmal vorkommt. Es sei t ein λ -Tableau und es seien z_1, \dots, z_f die Zeilen von t und s_1, \dots, s_g die Spalten von t . Man erhält nun zwei Untergruppen von \mathcal{S}_n , indem $\pi \in \mathcal{S}_n$ auf jeden Eintrag der Spalten bzw. Zeilen von t angewandt wird:

$$H^t := \{\pi \in \mathcal{S}_n \mid z_i \pi = z_i, 1 \leq i \leq f\}$$

$$V^t := \{\pi \in \mathcal{S}_n \mid s_i \pi = s_i, 1 \leq i \leq g\}.$$

H^t heißt die *Horizontalgruppe* von t und V^t die *Vertikalgruppe* von t . Eine λ -Klasse $\{t\}$ ist die Äquivalenzklasse von dem λ -Tableau t unter der Äquivalenzrelation

$$t_1 \sim t_2 \Leftrightarrow t_2 = t_1 \pi$$

mit $\pi \in H^{t_1}$. Hierbei ist mit $t_1 \pi$ gemeint, dass π auf jeden Eintrag von t_1 angewandt wird. □

Man betrachte nun den k -Vektorraum M^λ , der die λ -Klassen als Basis hat. Auf den λ -Klassen operiert \mathcal{S}_n wie folgt:

$$\{t\}\pi := \{t\pi\}$$

für ein $\pi \in \mathcal{S}_n$. Diese Operation ist wohldefiniert und durch k -lineare Fortsetzung dieser Operation wird M^λ zu einem $k\mathcal{S}_n$ -Modul.

2.2.4 Lemma

Es sei $\lambda \in \mathbb{P}_n$. Dann gilt

$$M^\lambda \cong 1_{\mathcal{S}_\lambda} \uparrow^{\mathcal{S}_n},$$

wobei $1_{\mathcal{S}_\lambda}$ der triviale $k\mathcal{S}_\lambda$ -Modul sei. Weiter ist M^λ ein zyklischer Modul und wird von jeder λ -Klasse erzeugt.

Beweis:

Die Operation von \mathcal{S}_n auf der Menge der λ -Klassen ist transitiv. Weiter sei t ein Tableau mit Zeilen z_1, \dots, z_l und die Einträge von z_i seien aus n_i^λ für $1 \leq i \leq l$. Der Stabilisator von t ist die Younguntergruppe \mathcal{S}_λ . Daraus folgt, dass M^λ ein zyklischer Modul ist, und dass

$$M^\lambda \cong 1_{\mathcal{S}_\lambda} \uparrow^{\mathcal{S}_n}$$

ist. □

2.2.5 Definition

Es sei $\lambda \in \mathbb{P}_n$ und t ein λ -Tableau. Dann sei die *signierte Spaltensumme* K_t definiert durch

$$K_t := \sum_{\pi \in V^t} \text{sgn}(\pi)\pi.$$

□

Dieses führt zu folgender Definition:

2.2.6 Definition und Bemerkung

Es sei $\lambda \in \mathbb{P}_n$ und t ein λ -Tableau. Das *Polytabloid* zu t ist das folgende Element aus M^λ

$$e_t := \{t\}K_t.$$

Es sei S^λ der Untervektorraum von M^λ der von den Polytabloiden aufgespannt wird. Für ein λ -Tableau t und $\pi \in \mathcal{S}_n$ gilt

$$e_t\pi = e_{t\pi}.$$

Damit ist S^λ ein $k\mathcal{S}_n$ -Untermodul von M^λ . Der Modul S^λ heißt *Spechtmodul zur Partition λ* .

Beweis:

Für $\pi \in \mathcal{S}_n$ und $\sigma \in V^t$ ist $\pi^{-1}\sigma\pi \in V^{t\pi}$. Weiter gilt

$$\begin{aligned} K_t\pi &= \pi\pi^{-1}K_t\pi \\ &= \pi\left(\sum_{\sigma \in V^t} \text{sgn}(\sigma)\pi^{-1}\sigma\pi\right) \\ &= \pi\left(\sum_{\sigma \in V^{t\pi}} \text{sgn}(\sigma)\sigma\right) \\ &= \pi K_{t\pi}. \end{aligned}$$

Damit folgt dann

$$\begin{aligned} e_t\pi &= \{t\}K_t\pi \\ &= \{t\}\pi K_{t\pi} \\ &= \{t\pi\}K_{t\pi} = e_{t\pi}. \end{aligned}$$

□

2.2.7 Bemerkung

Es sei $\lambda \in \mathbb{P}_n$. Der Spechtmodul S^λ ist zyklisch und wird von jedem λ -Polytabloid erzeugt. Weiter ist zu bemerken, dass eine Polytabloid e_t von dem Tableau t abhängt und nicht nur von der Äquivalenzklasse $\{t\}$. □

Bevor auf die einfachen $k\mathcal{S}_n$ -Moduln eingegangen wird, werden noch einige Eigenschaften von Spechtmoduln und Permutationsmoduln, die für weitere Untersuchungen eine zentrale Rolle spielen, aufgeführt. Für mehr Information zu Spechtmoduln sei hier auf [12] verwiesen. Ein Ergebnis, was die Charakteristik unabhängige Definition von Spechtmoduln unterstreicht, ist die Dimensionsformel für Spechtmoduln. Dafür werden noch die Haken eines Diagramms eingeführt.

2.2.8 Definition

Sei $\lambda \in \mathbb{P}_n$ und $[\lambda]$ das dazugehörige Youngdiagramm. Der (i, j) -*Haken*, H_{ij}^λ , von $[\lambda]$ besteht aus der Ecke (i, j) und alle Ecken rechts davon in derselben Zeile und aus allen Ecken unter (i, j) die in derselben Spalte wie (i, j) liegen. Man nennt die Ecke (i, λ_i) die *Hand* und die Ecke (λ'_j, j) den *Fuß* vom Haken. Der zu H_{ij}^λ gehörende *Rand* R_{ij}^λ ist der Rand des Youngdiagramms zwischen Fuß und Hand des Hakens. Hat der Haken H_{ij}^λ Länge q , so nennt man ihn einen q -*Haken*. Der entsprechende Rand wird q -*Randhaken* genannt. Der *Rand* von λ ist R_{11}^λ . □

2.2.9 Beispiel

Es sei $\lambda = (4, 3^2, 2)$ dann ist der (1,1)-Haken bzw. der Rand von λ :



□

2.2.10 Satz

Es sei λ eine Partition von n und S^λ der zugehörige Spechtmodul. Dann gilt:

$$\dim_k S^\lambda = \frac{n!}{\prod (\text{Hakenlängen in } \lambda)}.$$

Beweis:

Siehe Satz (20.1) in [12].

□

2.2.11 Satz

Es sei $\lambda \in \mathbb{P}_n$. Falls $\text{char}(k) \neq 2$ oder λ 2-regulär ist, so ist S^λ unzerlegbar.

Beweis:

Siehe Korollar (13.18) in [12].

□

Der folgende Satz gibt Informationen über eine Untermodulreihe und Kompositionsfaktoren eines Permutationsmoduls an.

2.2.12 Satz

Es sei $\lambda \in \mathbb{P}_n$. Der Modul M^λ hat eine Untermodulreihe, deren Faktoren isomorph zu Spechtmoduln S^μ mit $\lambda \leq \mu$ sind. Eine solche Reihe heißt *Spechtreihe*. Die Faktoren sind unabhängig vom Körper über dem die Moduln betrachtet werden.

Beweis:

Siehe Korollar (17.14) in [12].

□

Die Moduln $M^{(n-1,1)}$, $M^{(n-2,2)}$ und $M^{(n-2,1^2)}$ werden im anschließenden Kapitel genauer untersucht. Hier werden noch Spechtreihen von diesen angegeben.

2.2.13 Beispiel

Der Modul $M^{(n-1,1)}$ hat eine Spechtreihe mit Faktoren

$$S^{(n)}, S^{(n-1,1)}.$$

Eine Spechtreihe von $M^{(n-2,2)}$ hat die Faktoren

$$S^{(n)}, S^{(n-1,1)}, S^{(n-2,2)}.$$

Schließlich hat $M^{(n-2,1^2)}$ eine Spechtreihe mit Faktoren

$$S^{(n)}, S^{(n-1,1)}, S^{(n-1,1)}, S^{(n-2,2)}, S^{(n-2,1^2)}.$$

Beweis:

Siehe Satz (17.14) in [12].

□

Weitere Eigenschaften von Specht- und Permutationsmoduln werden in Kapitel 3 aufgeführt. Um nun jeder Partition einem einfachen Modul zuzuordnen, wird noch ein technisches Hilfsmittel eingeführt.

2.2.14 Definition und Bemerkung

Für $\lambda \in \mathbb{P}_n$ definiert man eine Bilinearform Φ auf M^λ durch

$$\Phi(\{t_1\}, \{t_2\}) := \begin{cases} 1, & \text{falls } \{t_1\} = \{t_2\} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

und bilineare Fortsetzung. Dann ist Φ symmetrisch, \mathcal{S}_n -invariant und nicht singulär. Ist $V \leq M^\lambda$ dann gilt:

$$\dim_k(V) + \dim_k(V^\perp) = \dim_k(M^\lambda).$$

Beweis:

Für die erste Behauptung siehe (7.1.16) in [11], für die zweite Behauptung siehe (1.3) in [12].

□

Jetzt kommt der zentrale Satz dieses Abschnitts, der einen Zusammenhang von den p -regulären Partitionen und den einfachen Moduln herstellt.

2.2.15 Satz

Es sei k ein Körper der Charakteristik p , wobei p eine Primzahl oder Null ist. Weiter sei λ eine p -reguläre Partition für ein $n \in \mathbb{N}$. Es sei

$$D^\lambda := S^\lambda / (S^\lambda \cap S^{\lambda^\perp}).$$

Dann gilt:

1. D^λ ist selbstdual und absolut einfach.
2. $\{D^\beta \mid \beta \in \mathbb{P}_n, \beta \text{ ist } p\text{-regulär}\}$ ist die Menge der Isomorphieklassen aller einfachen kS_n -Moduln.

Ist die Charakteristik gleich Null, so ist $S^\lambda \cap S^{\lambda^\perp} = \{0\}$ und damit $D^\lambda = S^\lambda$.

Beweis:

Siehe Satz (7.1.14) in [11]. □

2.2.16 Bemerkung

Ist die Charakteristik des Körpers 2, so sind die Dimensionen der einfachen nicht-trivialen kS_n -Modul gerade.

Beweis:

Man vergleiche Satz (11.8) in [12]. □

Über die Kompositionsfaktoren der Permutationsmoduln und der Spechtmoduln lässt sich eine allgemeine Aussage treffen.

2.2.17 Satz

Es sei $\lambda \in \mathbb{P}_n$ und es sei p die Charakteristik von k . Für einen Kompositionsfaktor D^μ von M^λ oder S^λ gilt $\mu \triangleright \lambda$. Ist λ eine p -reguläre Partition, dann kommt D^λ genau einmal als Kompositionsfaktor von M^λ und S^λ vor.

Beweis:

Siehe Satz (12.1) und Korollar (12.2) in [12]. □

2.2.18 Satz

Sei $\lambda \in \mathbb{P}_n$ und $\text{char}(k) = 0$. Dann ist $S^{(1^n)} \otimes S^\lambda$ isomorph zu $S^{\lambda'}$.

Beweis:

Siehe Satz (6.7) in [12]. □

2.2.19 Bemerkung

Es sei $\lambda \in \mathbb{P}_n$ und $p = 0$. Mit Satz 2.2.17 kommt S^λ genau einmal in M^λ vor und $S^{\lambda'}$ kommt genau einmal in $M^{\lambda'}$ vor. Satz 2.2.18 zeigt nun, dass die im ersten Abschnitt eingeführte Parametrisierung und die in diesem Abschnitt eingeführte in Charakteristik Null zusammenfallen. □

2.3 Nakayamas Vermutung

Der Name Nakayama-Vermutung legt nahe, dass diese Aussage noch nicht bewiesen ist. Doch die Vermutung wurde bereits im Jahr 1947 von Brauer und Robinson bewiesen. Sie gibt eine hinreichende und notwendige Bedingung an, wann zwei gewöhnliche Charaktere von S_n im selben p -Block liegen, wobei p eine Primzahl ist. Dazu betrachtet man die dazugehörigen Youngdiagramme. Durch das Entfernen eines p -Randhakens aus diesen Youngdiagrammen erhält man wieder neue Diagramme von Partitionen. Dieses führt zur folgenden Definition.

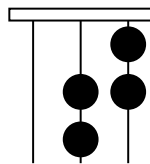
2.3.1 Definition

Ein Youngdiagramm $[\lambda]$ beziehungsweise eine Partition λ nennt man p -Kern, falls $[\lambda]$ keinen p -Haken enthält. □

So stellt sich die Frage, ob das sukzessive Entfernen von p -Haken aus einem Diagramm immer mit demselben p -Kern endet. Das Entfernen eines p -Randhakens kann man sich gemäß Abschnitt 2.7 in [11] durch einen Abakus mit p Spalten visualisieren. Es sei $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$ gegeben. Dann nennt man $\{\lambda_1 - 1 + l, \dots, \lambda_l - l + l\}$ eine β -Menge für λ . Die Stellen des Abakus werden wie folgt nummeriert:

$$\begin{array}{cccccc}
 0 & 1 & \dots & q-2 & q-1 & \\
 q & q+1 & \dots & 2q-2 & 2q-1 & \\
 \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \\
 \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot &
 \end{array}$$

Die Kugelanordnung des Abakus zu λ wird wie folgt definiert: Ist $\{\beta_1, \dots, \beta_l\}$ die β -Menge zu λ , dann kommt auf jede Stelle β_i , $1 \leq i \leq l$, des Abakus eine Kugel. Ist zum Beispiel $\lambda = (4, 3^2, 2)$, so ist $\{7, 5, 4, 2\}$ die β -Menge und ist weiter $p = 3$, dann sieht der dazugehörige Abakus wie folgt aus:



Das Entfernen eines p -Hakens aus dem Diagramm $[\lambda]$ entspricht genau dem Heraufschieben einer Kugel im dazugehörigen Abakus (man vergleiche Lemma (2.7.13) in [11]) um eine Position. Schiebt man also alle Kugeln so weit es geht nach oben, erhält man die β -Menge zum p -Kern. Man nummeriert die Plätze ab der ersten Lücke, wobei diese mit Null nummeriert wird, durch. So erhält man eine Folge von Zahlen $\gamma_1 > \dots > \gamma_l$, die man durch die Plätze der Kugeln ab der ersten Lücke erhält. Daraus erhält man durch $\alpha_i := \gamma_i + i - l$ die Partition α . Dies ist der p -Kern zu λ (vgl. Abschnitt 2.7 in [11]). Man gelangt so zu folgendem Satz.

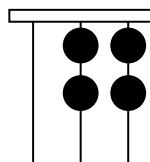
2.3.2 Satz

Jedes Youngdiagramm beziehungsweise jede Partition von $n \in \mathbb{N}$ hat einen eindeutigen p -Kern.

Beweis:

Siehe Satz (2.7.16) in [11]. □

In dem obigen Beispiel erhält man also den folgenden Abakus



Der 3-Kern von $(4, 3^2, 2)$ ist damit $(2^2, 1^2)$.

Es sind nun alle Begriffe zur Formulierung von Nakayamas Vermutung geklärt.

2.3.3 Satz (Nakayamas Vermutung)

Zwei gewöhnliche irreduzible Charaktere ζ^λ und ζ^μ von \mathcal{S}_n liegen genau dann im selben p -Block, wenn ihre p -Kerne gleich sind, das heißt die p -Kerne der Partitionen λ und μ .

Beweis:

Siehe Satz (6.1.21) in [11]. □

Mit Nakayamas Vermutung kann man nun auch klären, ob zwei irreduzible Brauercharaktere von \mathcal{S}_n in einem Block liegen. Indiziert man die Zeilen der Zerlegungsmatrix von \mathcal{S}_n mit den zu den einfachen Moduln gehörenden Partitionen und die Spalten entsprechend durch die p -regulären Partitionen, dann gilt folgender Satz:

2.3.4 Satz

Es sei λ eine p -reguläre Partition für ein $n \in \mathbb{N}$. Der Eintrag in der Zerlegungsmatrix mit Zeilen- und Spaltenindex λ ist 1.

Beweis:

Siehe Satz (6.3.50) in [11]. □

2.3.5 Korollar

Zwei irreduzible Brauercharaktere φ_{D^λ} und φ_{D^μ} von $k\mathcal{S}_n$ liegen genau dann im selben Block, wenn die jeweils dazugehörigen Partitionen, λ und μ , den gleichen p -Kern haben.

Beweis:

Nach Nakayamas Vermutung liegen ζ^λ und ζ^μ genau dann im selben p -Block, wenn λ und μ den selben p -Kern haben. Haben also λ und μ den selben p -Kern, dann sind φ_{D^λ} und φ_{D^μ} wegen Satz 2.3.4 und Bemerkung 1.8.2 im selben p -Block.

Liegen φ_{D^λ} und φ_{D^μ} im selben p -Block, dann liegen auch ζ^λ und ζ^μ wegen Satz 2.3.4 und Bemerkung 1.8.2 im selben p -Block. Also haben λ und μ den gleichen p -Kern. □

Kapitel 3

Zerlegung von speziellen Produkten

Ein Ziel dieser Arbeit ist es, allgemeine Aussagen über die Zerlegung von Tensorprodukten einfacher Moduln der symmetrischen Gruppe aus den Berechnungen von Beispielen zu formulieren. Dazu werden in diesem Kapitel spezielle Produkte betrachtet.

Im ersten Abschnitt werden Ergebnisse von Ford, Kleshchev und Mullineux bezüglich des Tensorproduktes eines einfachen $k\mathcal{S}_n$ -Moduls mit dem Signumsmodul aufgeführt. Es wird die Mullineuxabbildung angegeben, mit der man die Partition des einfachen Moduls, der einem solchem Produkt entspricht, bestimmen kann. Diese Abbildung wurde auch im praktischen Teil dieser Arbeit genutzt.

Im zweiten Abschnitt werden zwei allgemeine Aussagen über Tensorprodukte der Form $V^{\otimes 2}$ gebracht. Es werden der symmetrische und antisymmetrische Anteil eingeführt. Zudem wird noch eine hinreichende Bedingung angegeben, wann der triviale Modul ein direkter Summand in $V^{\otimes 2}$ ist.

Der dritte Teil des Kapitels beinhaltet noch weitere Informationen zu Specht- und Permutationmoduln für bestimmte Partitionen, die für die Untersuchungen im vierten Kapitel benötigt werden. Des Weiteren wird noch eine weitere Art von $k\mathcal{S}_n$ -Moduln, Youngmoduln, eingeführt. Durch sie läßt sich die Struktur von Permutationsmoduln genauer beschreiben.

Im letzten Abschnitt wird eine explizite Zerlegung von $D^{(n-1,1)^{\otimes 2}}$ angegeben. Dabei werden die Fälle, dass $p = 2$ ist und $p \neq 2$ ist, getrennt betrachtet.

Im ganzen Kapitel sei k ein Körper mit Charakteristik $p > 0$; weiter sei G eine endliche Gruppe und $n \in \mathbb{N}$.

3.1 Mullineuxs Vermutung

3.1.1 Definition und Bemerkung

Es sei $\text{sgn}_n \cong S^{(1^n)}$. Dann heißt sgn_n der *Signumsmodul* von \mathcal{S}_n . Der Modul sgn_n ist 1-dimensional und einfach. \square

3.1.2 Definition und Bemerkung

Es sei λ eine p -reguläre Partition von n . Dann ist das Tensorprodukt $\text{sgn}_n \otimes D^\lambda$ wieder einfach. Der Modul $\text{sgn}_n \otimes D^\lambda$ wird der zu D^λ *assoziierte Modul* genannt. \square

Zu welcher Partition gehört $\text{sgn}_n \otimes D^\lambda$? Durch

$$\text{sgn}_n \otimes D^\lambda \cong D^{b_n(\lambda)}$$

wird eine Bijektion b_n auf der Menge der p -regulären Partitionen von n definiert. Wie kann man b_n beschreiben? Ist die Charakteristik von k Null, so ist die Antwort leicht. In diesem Fall ist b_n gegeben durch $\lambda \mapsto \lambda'$; man vergleiche dazu Satz 2.2.18.

Im Allgemeinen ist es nicht so leicht, eine Regelmäßigkeit zu entdecken. Zum Beispiel ist $b_9(\lambda) = (4, 3, 1^2)$ für $p = 3$ und $\lambda = (7, 2)$ oder für $\lambda = (5, 3, 1)$ ist $b_9(\lambda) = (3, 2^2, 1^2)$. Mullineux hat in [17] einen Algorithmus angegeben, der eine Bijektion m_n auf der Menge der p -regulären Partitionen definiert und vermutet, dass $m_n = b_n$ ist. In [6] haben Ford und Kleshchev diese Vermutung von Mullineux bewiesen. In dieser Arbeit wurde m_n

benutzt, um die einfachen Moduln zu parametrisieren. Es werden nun noch einige Begriffe eingeführt, mit denen man die Abbildung m_n beschreiben kann.

3.1.3 Definition

Es sei $\lambda \in \mathbb{P}_n$. Man nummeriert die Ecken des Randes vom Youngdiagramm $[\lambda]$, R_{11}^λ , von der Hand bis zum Fuß durch. Dann besteht das erste p -Segment von λ aus den ersten p Ecken des Randes oder aus dem ganzen Rand, falls dieser nicht mehr als p Ecken besitzt. Die Nummern der Ecken des ersten p -Segmentes sind damit nicht größer als p . Ist die letzte Ecke des ersten p -Segmentes in der letzten Zeile des Diagrammes, dann hat λ nur ein p -Segment.

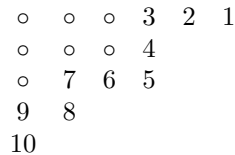
Ist die letzte Ecke des ersten p -Segmentes aus der l ten Zeile des Diagrammes, dann ist die erste Ecke des zweiten p -Segmentes die Ecke des Randes aus der $l + 1$ ten Zeile mit der kleinsten Nummer, δ , des Diagrammes. Das zweite p -Segment besteht dann aus den Ecken des Randes, dessen Nummern zwischen δ und $\delta + p - 1$ liegen. Wiederholt man diesen Vorgang genügend oft, so erhält man alle p -Segmente und man erreicht die letzte Zeile des Diagrammes.

Möglicherweise hat das letzte p -Segment weniger als p -Ecken, ansonsten haben alle p -Segmente genau p Ecken. Die p -Kante von λ besteht aus der Vereinigung aller p -Segmente von λ . □

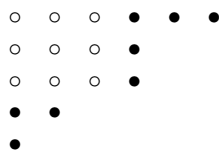
Damit die vorangegangene Definition klarer wird, wird jetzt ein Beispiel angegeben (man vergleiche [6]).

3.1.4 Beispiel

Es sei $n = 17$, $p = 5$ und $\lambda = (6, 4^2, 2, 1)$. Zunächst wird der Rand des Youngdiagrammes $[\lambda]$ durchnummeriert, wobei für die Ecken des Diagrammes hier Punkte statt Kreuze benutzt werden:



Die Ecken der p -Kante von $[\lambda]$, welche aus zwei p -Segmenten besteht, sind schwarz eingefärbt:



□

Mit der folgenden Definition kann man nun die Abbildung m_n beschreiben.

3.1.5 Definition und Bemerkung

Es sei λ eine p -reguläre Partition. Definiere nun Diagramme $\lambda^{(0)} := [\lambda]$ und $\lambda^{(i)} := \lambda^{(i-1)} \setminus \{p\text{-Kante von } \lambda^{(i-1)}\}$ für $1 \leq i$. Man nennt die p -Kante von $\lambda^{(j)}$ die j te p -Kante von λ . Wähle $z \in \mathbb{N}$ maximal mit $\emptyset \neq \lambda^{(z)}$. Dann heißt

$$G_p(\lambda) = \begin{pmatrix} A_0 & A_1 & \dots & A_z \\ R_0 & R_1 & \dots & R_z \end{pmatrix}$$

das Mullineuxsymbol von λ , wobei A_i die Anzahl der Ecken der i ten p -Kante von λ und R_i die Anzahl der Zeilen von $\lambda^{(i)}$ ist.

Man kann λ aus $G_p(\lambda)$ rekonstruieren, indem man, angefangen bei der leeren Partition $\lambda^{(z+1)}$, nacheinander die j -ten p -Kanten für $j = z, z - 1, \dots, 1$ hinzufügt.

Es sei nun $m_n(\lambda)$ definiert durch

$$G_p(m_n(\lambda)) = \begin{pmatrix} A_0 & A_1 & \dots & A_z \\ S_0 & S_1 & \dots & S_z \end{pmatrix},$$

wobei $S_j := A_j + \varepsilon_j - R_j$ mit

$$\varepsilon_j = \begin{cases} 0, & \text{falls } p \mid A_j \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$$

ist. Damit ist $m_n(\lambda)$ eine p -regulären Partition von n .

Beweis:

Siehe Satz (4.1) in [17]. □

Das obige Beispiel wird wieder aufgegriffen, um die Begriffe aus der vorangegangenen Definition klarer zu machen.

3.1.6 Beispiel

Es sei $n = 17$, $p = 5$ und $\lambda = (6, 4^2, 2, 1)$. Für die j te p -Kante von λ , wobei die Ecken der j ten p -Kante durch j gekennzeichnet sind, ergibt sich:

$$\begin{array}{cccccc} 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & & \\ 1 & 1 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & & & & \\ 0 & & & & & \end{array}$$

Also ist

$$\lambda^{(0)} = [\lambda], \lambda^{(1)} = [3^3], \lambda^{(2)} = [2^2], \lambda^{(3)} = [1], \text{ und } z = 3.$$

Damit ist dann

$$G_p(\lambda) = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Das Mullineuxsymbol von $m_n(\lambda)$ ist dann:

$$G_p(m_n(\lambda)) = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit bekommt man $m_n(\lambda)$, durch nacheinander sukzessives Hinzufügen der j ten p -Kanten:

$$\begin{array}{cccccccc} 3 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & & & & \\ 0 & & & & & & \end{array}$$

Dies entspricht der Partition

$$m_n(\lambda) = (7^2, 2, 1).$$

Also gilt:

$$\text{sgn}_n \otimes D^{(6,4^2,2,1)} \cong D^{(7^2,2,1)},$$

falls $\text{char}(k) = 5$ ist. □

Eine Implementierung des in [6] angegebenen Algorithmus, der das Mullineuxsymbole für eine Partition λ berechnet und $m_n(\lambda)$ aus diesem Mullineuxsymbol rekonstruiert, ist im Anhang zu finden.

3.2 Allgemeines zu $V^{\otimes 2}$

Zuerst werden der symmetrische und antisymmetrische Anteil von $V^{\otimes 2}$ eingeführt, sowie einige elementare Eigenschaften dieser Untermoduln vorgestellt. Es sei $p \neq 2$.

3.2.1 Definition und Bemerkung

Es sei V ein kG -Modul und

$$\sigma : V^{\otimes 2} \rightarrow V^{\otimes 2}$$

der kG -Automorphismus, der durch lineare Fortsetzung von

$$v \otimes w \mapsto w \otimes v$$

definiert ist. Dann sei

$$\mathfrak{S}(V) := \{t \in V^{\otimes 2} \mid \sigma(t) = t\}$$

der *symmetrische Teil* von $V^{\otimes 2}$ und

$$\mathfrak{A}(V) := \{t \in V^{\otimes 2} \mid \sigma(t) = -t\}$$

der *antisymmetrische Teil* von $V^{\otimes 2}$. Es gilt

$$V^{\otimes 2} = \mathfrak{S}(V) \oplus \mathfrak{A}(V).$$

Ist $n = \dim_k(V)$, so gilt $\dim_k(\mathfrak{S}(V)) = \frac{n^2+n}{2}$ und $\dim_k(\mathfrak{A}(V)) = \frac{n^2-n}{2}$.

Beweis:

Für $g \in G$ gilt

$$(\sigma(v \otimes w))g = (w \otimes v)g = wg \otimes vg = \sigma(vg \otimes wg) = \sigma((v \otimes w)g)$$

und mit $\sigma^2 = \text{id}_{V^{\otimes 2}}$ ist σ ein kG -Automorphismus. Damit sind offensichtlich $\mathfrak{S}(V)$ und $\mathfrak{A}(V)$ kG -Untermoduln von $V^{\otimes 2}$.

Es gilt $\mathfrak{S}(V) \cap \mathfrak{A}(V) = 0$. Sei weiter $t \in V^{\otimes 2}$. Dann gilt

$$t = \underbrace{\frac{t + \sigma(t)}{2}}_{\in \mathfrak{S}(V)} + \underbrace{\frac{t - \sigma(t)}{2}}_{\in \mathfrak{A}(V)}$$

und somit ist

$$V^{\otimes 2} = \mathfrak{S}(V) \oplus \mathfrak{A}(V).$$

Ist $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine k -Basis von V , dann ist

$$C := \{v_1 \otimes v_1, \dots, v_1 \otimes v_n, \dots, v_n \otimes v_1, \dots, v_n \otimes v_n\}$$

eine Basis von $V^{\otimes 2}$. Es sei

$$B := \{v_i \otimes v_i \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_i \otimes v_j + v_j \otimes v_i \mid 1 \leq i \neq j \leq n\}.$$

Dann ist B linear unabhängig, da C eine Basis von $V^{\otimes 2}$ ist, und es ist $B \subseteq \mathfrak{S}(V)$. Weiter ist

$$|B| = n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2+n}{2}.$$

Es sei

$$\sum_{i,j} \alpha_{i,j} (v_i \otimes v_j) = s \in \mathfrak{S}(V)$$

mit $\alpha_{i,j} \in k$, $1 \leq i, j \leq n$. Dann gilt

$$\sum_{i,j} \alpha_{i,j} (v_i \otimes v_j) = s = \sigma(s) = \sum_{i,j} \alpha_{j,i} (v_i \otimes v_j).$$

Es ist also $\alpha_{i,j} = \alpha_{j,i}$ für alle $1 \leq i, j \leq n$. Damit gilt $\mathfrak{S}(V) \subseteq \langle B \rangle \subseteq \mathfrak{S}(V)$, und somit folgt die Behauptung. Ähnlich kann man zeigen, dass

$$\{(v_i \otimes v_j) - (v_j \otimes v_i) \mid 1 \leq i \neq j \leq n\}$$

eine Basis von $\mathfrak{A}(V)$ ist. □

Aus der obigen Definition ist sofort zu sehen, dass die Produkte der Form $V^{\otimes 2}$ im Fall $p \neq 2$ nicht unzerlegbar sind, falls $\dim_k(V) > 1$ ist. Die berechneten Ergebnisse ergeben, dass es im Fall $p = 2$ unzerlegbare Tensorprodukte der Form $V^{\otimes 2}$ gibt.

Das folgende Lemma gibt allgemein einen Fall an, wann der triviale kG -Modul direkter Summand in einem Tensorprodukt ist.

3.2.2 Lemma

Es sei V ein kG -Modul und $p \nmid \dim_k(V) = n$. Dann ist der triviale Modul ein direkter Summand von $V \otimes V^*$. Ist $\dim_k(\text{End}_{kG}(V)) = 1$, dann gilt $p \nmid \dim_k(V) = n$, falls der triviale Modul ein direkter Summand von $V \otimes V^*$ ist.

Beweis:

Betrachte den k -Vektorraumhomomorphismus

$$\varphi : V \otimes V^* \rightarrow k,$$

der durch lineare Fortsetzung von

$$v \otimes w \mapsto w(v)$$

gegeben ist. Es sei $g \in G$ und $v \in V$ sowie $w \in V^*$. Dann ist

$$\varphi(vg \otimes wg) = (wg)(vg) = (w(vgg^{-1}))g = (w(v))g = \varphi(v \otimes w)g,$$

wobei k als trivialer kG -Modul aufgefasst wird. Damit ist φ ein kG -Modulhomomorphismus. Es sei $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine k -Basis von V und $\{w_1, \dots, w_n\}$ die duale k -Basis von V^* , mit $w_j(v_i) = \delta_{i,j}$, für alle $1 \leq i, j \leq n$. Es sei

$$v_i g = \sum_{j=1}^n a_{ij}(g)v_j.$$

Dann ist

$$w_i g = \sum_{j=1}^n a_{ji}(g^{-1})w_j.$$

Insgesamt folgt dann

$$\begin{aligned} (\sum_{i=1}^n v_i \otimes w_i)g &= \sum_{i=1}^n (v_i g \otimes w_i g) \\ &= \sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^n a_{ij}(g)v_j \otimes \sum_{l=1}^n a_{li}(g^{-1})w_l) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n a_{ij}(g)a_{li}(g^{-1})(v_j \otimes w_l) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n (\sum_{i=1}^n a_{li}(g^{-1})a_{ij}(g))(v_j \otimes w_l) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n \delta_{l,j}(v_j \otimes w_l) \\ &= \sum_{j=1}^n (v_j \otimes w_j). \end{aligned}$$

Damit ist $V_0 := \langle \sum_{i=1}^n v_i \otimes w_i \rangle_{kG}$ ein trivialer kG -Untermodul von $V \otimes V^*$. Weiter gilt

$$\varphi(\sum_{i=1}^n v_i \otimes w_i) = n \neq 0,$$

da $p \nmid n$. Damit ist $V_0 \not\subseteq \text{Kern}(\varphi)$ und da

$$(V \otimes V^*) / \text{Kern}(\varphi) \cong k \cong V_0$$

ist, folgt dann

$$V \otimes V^* = V_0 \oplus \text{Kern}(\varphi).$$

Für die zweite Behauptung siehe Kapitel 2, Lemma (6.18) in [15]. □

3.2.3 Korollar

Es sei D ein einfacher $k\mathcal{S}_n$ -Modul. Genau dann ist der triviale Modul ein direkter Summand von $D^{\otimes 2}$, wenn $p \nmid \dim_k(D)$.

Beweis:

Nach Satz 2.2.15 sind alle einfachen $k\mathcal{S}_n$ -Moduln selbstdual und nach Satz 2.1.8 ist jeder Körper ein Zerfällungskörper für \mathcal{S}_n , somit folgt die Behauptung mit Lemma 3.2.2. □

3.3 Permutations-, Specht- und Youngmoduln

Um die Zerlegung von $D^{(n-1,1)^{\otimes 2}}$ zu erhalten, werden zuerst einige Informationen über die Kompositionsfaktoren der Spechtmoduln für die Partitionen $(n-1, 1)$, $(n-2, 2)$ und $(n-2, 1^2)$ benötigt. Des weiteren werden Informationen über die Struktur der Permutationsmoduln $M^{(n-1,1)}$, $M^{(n-2,2)}$ und $M^{(n-2,1^2)}$ gewonnen, die noch eine zentrale Rolle bei den Untersuchungen spielen werden. Um Permutationsmoduln besser zu beschreiben, werden Youngmoduln eingeführt.

3.3.1 Definition

Es sei λ eine Partition von n . Dann sei Y^λ der minimale Untermodul von M^λ der

- $S^\lambda \leq Y^\lambda \leq M^\lambda$
- $Y^\lambda \oplus Q = M^\lambda$ für einen Untermodul Q

erfüllt. Man nennt Y^λ den *Youngmodul* zu λ . □

Der folgende Satz gibt an, dass sich ein Permutationsmodul M^λ in eine direkte Summe von Youngmoduln zerlegen lässt, wobei nur Youngmoduln zu Partitionen vorkommen, die λ dominieren.

3.3.2 Satz

Es sei λ eine Partition von n . Dann ist Y^λ selbstdual und unzerlegbar. Weiter gilt

$$M^\lambda \cong Y^\lambda \bigoplus_{\mu \triangleright \lambda} c_\mu Y^\mu$$

mit $c_\mu \in \mathbb{N}$.

Beweis:

Siehe Satz (3.1) in [13]. □

3.3.3 Bemerkung

Jeder PIM von kS_n ist ein Youngmodul.

Beweis:

Jeder PIM von kS_n ist ein direkter Summand von $M^{(1^n)} \cong 1_{S(1^n)} \uparrow^{S_n}$. Dieser Modul lässt sich nach Satz 3.3.2 in eine direkte Summe von Youngmoduln zerlegen. Mit dem Satz von Krull-Schmidt folgt dann die Behauptung. □

Zunächst wird noch eine nützliche Schreibweise eingeführt. Es sei M eine kG -Modul und $\{N_i\}$ die Isomorphieklassen der einfachen kG -Moduln. Dann bedeutet

$$M \leftrightarrow \sum_i n_i N_i,$$

dass M die Kompositionsfaktoren N_i mit jeweiliger Vielfachheit n_i hat.

Bei der Betrachtung der Permutations-, Specht- und Youngmoduln werden die Fälle $p \neq 2$ und $p = 2$ getrennt behandelt. Zunächst werden die Dimensionen der Spechtmoduln angegeben, anschließend deren Kompositionsfaktoren.

3.3.4 Lemma

Für die Dimensionen der Spechtmoduln gilt:

$$\dim_k(S^{(n-1,1)}) = n - 1, \quad \dim_k(S^{(n-2,2)}) = \frac{n(n-3)}{2}, \quad \dim_k(S^{(n-2,1^2)}) = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Beweis:

Die Dimensionen ergeben sich aus der Hakenformel Satz 2.2.10. □

3.3.5 Lemma

Für $4 \leq n$ und $p \neq 2$ gilt für die Spechtmoduln:

$$\begin{aligned} S^{(n-1,1)} &\leftrightarrow D^{(n-1,1)} + \delta_1 D^{(n)} \\ S^{(n-2,2)} &\leftrightarrow D^{(n-2,2)} + \delta_2 D^{(n-1,1)} + \delta_3 D^{(n)} \\ S^{(n-2,1^2)} &\leftrightarrow D^{(n-2,1^2)} + \delta_1 D^{(n-1,1)}. \end{aligned}$$

Hierbei ist

$$\delta_1 := \begin{cases} 1, & \text{falls } p \mid n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \delta_2 := \begin{cases} 1, & \text{falls } p \mid n - 2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \delta_3 := \begin{cases} 1, & \text{falls } p \mid n - 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Beweis:

Siehe Korollar (12.2), Satz (24.1) und Satz (24.15) in [12]. □

3.3.6 Korollar

Es sei $p \neq 2$. Gilt $p \nmid n$ und $4 \leq n$, dann sind $S^{(n-1,1)}$ und $S^{(n-2,1^2)}$ einfach. Gilt $p \mid n$, so sind die beiden Moduln uniserial und es ist

$$\{0\} \leq D^{(n)} \leq S^{(n-1,1)}$$

eine Kompositionsreihe mit $S^{(n-1,1)}/D^{(n)} \cong D^{(n-1,1)}$ und

$$\{0\} \leq D^{(n-1,1)} \leq S^{(n-2,1^2)}$$

ist eine Kompositionsreihe mit $S^{(n-2,1^2)}/D^{(n-1,1)} \cong D^{(n-2,1^2)}$.

Beweis:

Siehe Lemma 3.3.5 und Satz 2.2.15. □

Im Fall, dass die Charakteristik des Körpers 2 ist, gibt es mehr Fallunterscheidungen.

3.3.7 Lemma

Ist $4 \leq n$ und $p = 2$, so gilt

$$S^{(n-1,1)} \leftrightarrow \begin{cases} D^{(n)} + D^{(n-1,1)}, & \text{falls } n \text{ gerade} \\ D^{(n-1,1)}, & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Ist $5 \leq n$ so gilt

$$S^{(n-2,2)} \leftrightarrow \begin{cases} D^{(n-1,1)} + D^{(n-2,2)}, & \text{falls } n \equiv 0 \pmod{4} \\ D^{(n)} + D^{(n-2,2)}, & \text{falls } n \equiv 1 \pmod{4} \\ D^{(n)} + D^{(n-1,1)} + D^{(n-2,2)}, & \text{falls } n \equiv 2 \pmod{4} \\ D^{(n-2,2)}, & \text{falls } n \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

Beweis :

Siehe Korollar (12.2) und Satz (24.14) in [12]. □

Dies führt direkt zu folgendem Korollar.

3.3.8 Korollar

Ist $p = 2$ und $4 \leq n$ und n gerade, so ist

$$\{0\} \leq D^{(n)} \leq S^{(n-1,1)}$$

eine Kompositionsreihe mit $S^{(n-1,1)}/D^{(n)} \cong D^{(n-1,1)}$. Ist n ungerade so ist $S^{(n-1,1)}$ einfach. Ist weiter $n \equiv 1 \pmod{4}$, so ist

$$\{0\} \leq D^{(n)} \leq S^{(n-2,2)}$$

eine Kompositionsreihe mit $S^{(n-2,2)}/D^{(n)} \cong D^{(n-2,2)}$. Ist $n \equiv 3 \pmod{4}$ so ist $S^{(n-2,2)}$ einfach.

Beweis :

Die Behauptung folgt aus Lemma 3.3.7 und Satz 2.2.15. □

Für die Partitionen $(n-1,1)$ und $(n-2,2)$ wird die Zerlegung der Permutationsmoduln in Youngmoduln angegeben, sowie die Struktur dieser Youngmoduln.

3.3.9 Lemma

Es sei $4 \leq n$. Dann gilt

$$M^{(n-1,1)} \cong D^{(n)} \oplus D^{(n-1,1)},$$

falls $p \nmid n$. Anderenfalls ist $M^{(n-1,1)}$ uniserial und

$$\{0\} \leq D^{(n)} \leq S^{(n-1,1)} \leq M^{(n-1,1)}$$

ist eine Kompositionsreihe von $M^{(n-1,1)}$ mit $M^{(n-1,1)}/S^{(n-1,1)} \cong D^{(n)}$.

Beweis:

Mit Satz (12.1) in [12] sind $D^{(n)}$ und $D^{(n-1,1)}$ Kompositionsfaktoren von $M^{(n-1,1)}$.

Ist $p \nmid n$, dann folgt mit Lemma 1.4.4, dass $D^{(n)}$ ein direkter Summand ist. Aus Dimensionsgründen folgt dann die Behauptung.

Gilt nun $p \mid n$ so gilt nach Korollar 3.3.6 beziehungsweise Korollar 3.3.8, dass

$$\{0\} \leq D^{(n)} \leq S^{(n-1,1)} \leq M^{(n-1,1)}$$

eine Untermodulreihe von $M^{(n-1,1)}$ ist. Diese ist eine Kompositionsreihe, denn aus Dimensionsgründen und da nur $D^{(n)}$ und $D^{(n-1,1)}$ Kompositionsfaktoren von $M^{(n-1,1)}$ sind folgt:

$$M^{(n-1,1)}/S^{(n-1,1)} \cong D^{(n)}.$$

□

Dieses Lemma wird ständig herangezogen, wenn es um den Permutationsmodul $M^{(n-1,1)}$ geht. Damit hat man auch sofort eine Zerlegung von $M^{(n-1,1)}$ in Youngmoduln.

3.3.10 Korollar

Es sei $4 \leq n$. Gilt $p \nmid n$, dann ist

$$M^{(n-1,1)} \cong Y^{(n-1,1)} \oplus Y^{(n)}$$

und es ist

$$Y^{(n-1,1)} \cong D^{(n-1,1)} \text{ und } Y^{(n)} \cong D^{(n)}.$$

Gilt andererseits $p \mid n$, so ist

$$M^{(n-1,1)} \cong Y^{(n-1,1)}.$$

Beweis:

Die Behauptung folgt sofort mit Lemma 3.3.9. □

Nun wird die genauere Struktur von $M^{(n-2,2)}$ angegeben. Für $p \neq 2$ ergeben sich drei Fälle, die zu unterscheiden sind.

3.3.11 Lemma

Es sei $4 \leq n$ und $p \neq 2$.

1. Ist $n \not\equiv 1, 2 \pmod{p}$, dann ist

$$M^{(n-2,2)} \cong Y^{(n-2,2)} \oplus M^{(n-1,1)}$$

und

$$Y^{(n-2,2)} \cong S^{(n-2,2)} \cong D^{(n-2,2)}.$$

2. Ist $n \equiv 1 \pmod{p}$, dann ist

$$M^{(n-2,2)} \cong Y^{(n-2,2)} \oplus Y^{(n-1,1)}$$

und

$$Y^{(n-2,2)} = D^{(n)} | D^{(n-2,2)} | D^{(n)}.$$

3. Ist $n \equiv 2 \pmod{p}$, dann ist

$$M^{(n-2,2)} \cong Y^{(n-2,2)} \oplus Y^{(n)}$$

und

$$Y^{(n-2,2)} = D^{(n-1,1)} | D^{(n-2,2)} | D^{(n-1,1)}.$$

Dabei bedeutet $M = D_1 | \dots | D_k$, dass M uniseriell ist, und ist

$$\{0\} = M_0 \leq M_1 \leq M_2 \leq \dots \leq M_k = M$$

die Kompositionsreihe, dann ist

$$M_i/M_{i-1} \cong D_i, \text{ für } 1 \leq i \leq k.$$

Beweis:

Nach Beispiel 2.2.13 hat $M^{(n-2,2)}$ eine Spechtreihe mit Faktoren

$$S^{(n)}, S^{(n-1,1)}, S^{(n-2,2)}.$$

Damit hat $M^{(n-2,2)}$ mit Lemma 3.3.5 die Kompositionsfaktoren

$$M^{(n-2,2)} \leftrightarrow \begin{cases} 2D^{(n)} + D^{(n-1,1)} + D^{(n-2,2)}, & \text{falls } n \equiv 0, 1 \pmod{p} \\ D^{(n)} + 2D^{(n-1,1)} + D^{(n-2,2)}, & \text{falls } n \equiv 2 \pmod{p} \\ D^{(n)} + D^{(n-1,1)} + D^{(n-2,2)}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Mit Satz 3.3.2 gilt

$$M^{(n-2,2)} \cong Y^{(n-2,2)} \oplus aY^{(n-1,1)} \oplus bY^{(n)}$$

mit $a, b \in \mathbb{N}$. Man betrachte nun folgende Fälle:

- Fall: $n \not\equiv 1, 2 \pmod{p}$

Nach Lemma 3.3.5 ist $S^{(n-2,2)} \cong D^{(n-2,2)}$. Mit Satz 2.2.15 gilt $S^{(n-2,2)} \cap S^{(n-2,2)\perp} = 0$ und mit Definition und Bemerkung 2.2.14 gilt

$$\dim_k(M^{(n-2,2)}) = \dim_k(S^{(n-2,2)}) + \dim_k(S^{(n-2,2)\perp}).$$

Somit ist

$$M^{(n-2,2)} \cong S^{(n-2,2)} \oplus S^{(n-2,2)\perp}.$$

Daraus folgt $Y^{(n-2,2)} \cong S^{(n-2,2)} \cong D^{(n-2,2)}$. Weiter sind $D^{(n)}$ und $D^{(n-1,1)}$ Kompositionsfaktoren von $M^{(n-2,2)}$. Gilt nun $p \nmid n$, dann ist $Y^{(n-1,1)} \cong D^{(n-1,1)}$ nach Korollar 3.3.10. Damit ist dann $a = b = 1$.

Gilt $p \mid n$, so ist $Y^{(n-1,1)} \cong M^{(n-1,1)}$ nach Korollar 3.3.10. Damit folgt dann $a = 1$ und $b = 0$. Insgesamt folgt dann mit Lemma 3.3.9 die Isomorphie

$$M^{(n-2,2)} \cong D^{(n-2,2)} \oplus M^{(n-1,1)}.$$

- Fall: $n \equiv 1 \pmod{p}$

Nach Definition ist $S^{(n-2,2)} \leq Y^{(n-2,2)}$ und nach Lemma 3.3.5 ist $S^{(n-1,1)} \cong D^{(n-1,1)}$. Die Partition (n) hat den p -Kern (1) und $(n-1, 1)$ hat den p -Kern $(p, 1)$. Damit sind $D^{(n)}$ und $D^{(n-1,1)}$ nach Nakayamas Vermutung (vergleiche 2.3.5) nicht im selben Block. Da $Y^{(n-2,2)}$ unzerlegbar ist und $D^{(n)}$ nach Lemma 3.3.5 ein Kompositionsfaktor von $Y^{(n-2,2)}$ ist, folgt, dass $D^{(n-1,1)}$ kein Kompositionsfaktor von $Y^{(n-2,2)}$ ist. Aus Dimensionsgründen und da $Y^{(n-2,2)}$ selbstdual ist, folgt

$$Y^{(n-2,2)} = D^{(n)} | D^{(n-2,2)} | D^{(n)}.$$

Damit ist dann

$$M^{(n-2,2)} \cong Y^{(n-2,2)} \oplus D^{(n-1,1)}.$$

- Fall: $n \equiv 2 \pmod{p}$

Die Partition (n) hat den p -Kern (2) , und $(n-1, 1)$ hat den p -Kern $(1, 1)$. Da nach Lemma 3.3.5 $D^{(n-1,1)} \leq S^{(n-2,2)} \leq Y^{(n-2,2)}$ ist, folgt analog zum Fall $n \equiv 1 \pmod{p}$ die Behauptung. □

Nun zum Fall $p = 2$. Bevor die Zerlegung von $M^{(n-2,2)}$ in Youngmoduln betrachtet wird, werden die Kompositionsfaktoren von $M^{(n-2,2)}$ bestimmt.

3.3.12 Lemma

Es sei $n \leq 5$ und $p = 2$. Dann gilt

$$M^{(n-2,2)} \leftrightarrow \begin{cases} 2D^{(n)} + 2D^{(n-1,1)} + D^{(n-2,2)}, & \text{falls } n \equiv 0 \pmod{4} \\ 2D^{(n)} + D^{(n-1,1)} + D^{(n-2,2)}, & \text{falls } n \equiv 1 \pmod{4} \\ 3D^{(n)} + 2D^{(n-1,1)} + D^{(n-2,2)}, & \text{falls } n \equiv 2 \pmod{4} \\ D^{(n)} + D^{(n-1,1)} + D^{(n-2,2)}, & \text{falls } n \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

Beweis :

Nach Beispiel 2.2.13 hat $M^{(n-2,2)}$ eine Spechtreihe mit Faktoren

$$S^{(n)}, S^{(n-1,1)}, S^{(n-2,2)}.$$

Mit Lemma 3.3.7 folgt dann die Behauptung. □

Jetzt ist man in der Lage, die Zerlegung von $M^{(n-2,2)}$ in Youngmoduln anzugeben.

3.3.13 Korollar

Es sei $5 \leq n$.

1. Fall: $n \equiv 0 \pmod{4}$. Dann ist

$$M^{(n-2,2)} \cong Y^{(n-2,2)}.$$

2. Fall: $n \equiv 1 \pmod{4}$. Dann ist

$$M^{(n-2,2)} \cong Y^{(n-2,2)} \oplus D^{(n-1,1)}.$$

Wobei

$$Y^{(n-2,2)} = D^{(n)} | D^{(n-2,2)} | D^{(n)}$$

ist.

3. Fall: $n \equiv 2 \pmod{4}$. Dann ist

$$M^{(n-2,2)} \cong Y^{(n-2,2)} \oplus D^{(n)}.$$

4. Fall: $n \equiv 3 \pmod{4}$. Dann ist

$$M^{(n-2,2)} \cong Y^{(n-2,2)} \oplus D^{(n-1,1)} \oplus D^{(n)}.$$

Wobei

$$Y^{(n-2,2)} \cong D^{(n-2,2)}$$

ist.

Beweis :

Ist n ungerade, dann gilt $2 \nmid n$. Damit ist der 2-Kern von $(n-1, 1)$ gleich $(2, 1)$. Der 2-Kern von (n) und $(n-2, 2)$ ist (1) . Damit liegt $D^{(n-1,1)}$ nach Nakaymas Vermutung, nicht im Hauptblock.

Mit Satz 3.3.2 gilt allgemein

$$M^{(n-2,2)} \cong Y^{(n-2,2)} + aY^{(n-1,1)} + bY^{(n)}$$

mit $a, b \in \mathbb{N}$. Weiter gilt $\dim_k(M^{(n-2,2)}) = \frac{n(n-1)}{2}$, da $M^{(n-2,2)} \cong 1_{S_{(n-2,2)}} \uparrow^{\mathcal{S}_n}$ ist.

1. Fall: $n \equiv 0 \pmod{4}$.

Es gilt $2 \mid \frac{n(n-1)}{2} = \dim_k(M^{(n-2,2)})$. Damit ist $D^{(n)}$ nach Lemma 1.4.4 kein direkter Summand von $M^{(n-2,2)}$. Also ist $b = 0$. Nach Lemma 3.3.12 ist

$$M^{(n-2,2)} \leftrightarrow 2D^{(n)} + 2D^{(n-1,1)} + D^{(n-2,2)}.$$

Angenommen es sei $a = 1$. Nach Lemma 3.3.9 gilt:

$$M^{(n-1,1)} \leftrightarrow 2D^{(n)} + D^{(n-1,1)}.$$

Damit ist also

$$Y^{(n-2,2)} \leftrightarrow D^{(n-1,1)} + D^{(n-2,2)}.$$

Da $Y^{(n-2,2)}$ selbstdual ist und gilt dann $Y^{(n-2,2)} \cong D^{(n-1,1)} \oplus D^{(n-2,2)}$. Dies ist ein Widerspruch, da $Y^{(n-2,2)}$ unzerlegbar ist. Damit ist $a = 0$.

2. Fall: $n \equiv 1 \pmod{4}$.

Nach Lemma 3.3.12 ist

$$M^{(n-2,2)} \leftrightarrow 2D^{(n)} + D^{(n-1,1)} + D^{(n-2,2)}.$$

Nach Lemma 3.3.9 ist $Y^{(n-1,1)} \cong D^{(n-1,1)}$. Mit Korollar 3.3.8 ist weiter $D^{(n)} \leq S^{(n-2,2)}$. Da $Y^{(n-2,2)}$ unzerlegbar ist, ist $D^{(n)}$ kein direkter Summand von $Y^{(n-2,2)}$. Da die Youngmoduln selbstdual sind, folgt nun

$$Y^{(n-2,2)} = D^{(n)} | D^{(n-2,2)} | D^{(n)}.$$

Und damit ist $a = 1$ und $b = 0$.

3. Fall: $n \equiv 2 \pmod{4}$.

Es gilt $2 \nmid \frac{n(n-1)}{2} = \dim_k(M^{(n-2,2)})$. Also ist $D^{(n)}$ ein direkter Summand von $M^{(n-2,2)}$. Mit Lemma 3.3.12 gilt

$$M^{(n-2,2)} \leftrightarrow 3D^{(n)} + 2D^{(n-1,1)} + D^{(n-2,2)}.$$

Weiter ist $a = 0$, da sonst $Y^{(n-2,2)} \cong D^{(n-1,1)} \oplus D^{(n-2,2)}$ wäre, da nach Lemma 3.3.9 gilt

$$M^{(n-1,1)} \leftrightarrow 2D^{(n)} + D^{(n-1,1)}.$$

Mit der Frobenius-Reziprozität folgt, dass $b = 1$ ist.

4. Fall: $n \equiv 3 \pmod{4}$.

Nach Lemma 3.3.12 ist

$$M^{(n-2,2)} \leftrightarrow D^{(n)} + D^{(n-1,1)} + D^{(n-2,2)}.$$

Da die Youngmoduln selbstdual sind folgt dann damit die Behauptung. □

Zuletzt wird noch der Modul $M^{(n-2,1^2)}$ betrachtet. Es wird hier zunächst nur eine Aussage über die Kompositionsfaktoren von $M^{(n-2,1^2)}$ gemacht. Die Zerlegung in Youngmoduln wird nach der Zerlegung von $D^{(n-1,1)} \otimes^2$ angegeben.

3.3.14 Lemma

Es sei $4 \leq n$ und $p \neq 2$. Dann gilt

$$M^{(n-2,1^2)} \leftrightarrow \begin{cases} 3D^{(n)} + 3D^{(n-1,1)} + D^{(n-2,2)} + D^{(n-2,1^2)}, & \text{falls } n \equiv 0 \pmod{p} \\ 2D^{(n)} + 2D^{(n-1,1)} + D^{(n-2,2)} + D^{(n-2,1^2)}, & \text{falls } n \equiv 1 \pmod{p} \\ D^{(n)} + 3D^{(n-1,1)} + D^{(n-2,2)} + D^{(n-2,1^2)}, & \text{falls } n \equiv 2 \pmod{p} \\ D^{(n)} + 2D^{(n-1,1)} + D^{(n-2,2)} + D^{(n-2,1^2)}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis:

Nach Beispiel 2.2.13 hat $M^{(n-2,1^2)}$ eine Spechtreihe mit Faktoren

$$S^{(n)}, S^{(n-1,1)}, S^{(n-1,1)}, S^{(n-2,2)}, S^{(n-2,1^2)}.$$

Die Behauptung folgt nun mit Lemma 3.3.5. □

Von jetzt und bis an das Ende dieses Abschnitts sei $p = 2$. Um die Kompositionsfaktoren von $M^{(n-2,1^2)}$ anzugeben, werden erst einmal die Kompositionsfaktoren von $S^{(n-2,1^2)}$ bestimmt. Da $(n-2,1^2)$ nicht 2-regulär ist, muss mehr Arbeit in die Bestimmung der Kompositionsfaktoren gesteckt werden. Zunächst wird die Einschränkung gewisser Moduln auf \mathcal{S}_{n-1} betrachtet.

3.3.15 Lemma

Es sei $6 \leq n$ und n sei gerade. Dann gilt

$$D^{(n-1,1)} \downarrow_{\mathcal{S}_{n-1}} \cong D^{(n-2,1)}$$

und

$$D^{(n-2,2)} \downarrow_{\mathcal{S}_{n-1}} \cong D^{(n-3,2)}.$$

Beweis :

Dies folgt aus Satz (1.6) in [14]. □

3.3.16 Lemma

Es sei $5 \leq n$ dann gilt:

$$S^{(n-2,1^2)} \leftrightarrow \begin{cases} D^{(n)} + D^{(n-1,1)} + D^{(n-2,2)}, & \text{falls } n \equiv 0 \pmod{4} \\ 2D^{(n)} + D^{(n-2,2)}, & \text{falls } n \equiv 1 \pmod{4} \\ 2D^{(n)} + D^{(n-1,1)} + D^{(n-2,2)}, & \text{falls } n \equiv 2 \pmod{4} \\ D^{(n)} + D^{(n-2,2)}, & \text{falls } n \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

Beweis:

Nach Korollar (12.2) in [12] sind nur $D^{(n)}$, $D^{(n-1,1)}$ und $D^{(n-2,2)}$ mögliche Kompositionsfaktoren von $S^{(n-2,1^2)}$. Weiter hat mit Satz (9.3) in [12] der Modul $S^{(n-2,1^2)} \downarrow_{\mathcal{S}_{n-1}}$ eine Spechtreihe mit Faktoren

$$S^{(n-2,1)}, S^{(n-3,1^2)}.$$

Nach Lemma 3.3.7 hat $S^{(n-2,1)}$ den Kompositionsfaktor $D^{(n-2,1)}$. Also hat $S^{(n-2,1^2)} \downarrow_{\mathcal{S}_{n-1}}$ einen nicht-trivialen Kompositionsfaktor. Damit hat auch $S^{(n-2,1^2)}$ einen nicht-trivialen Kompositionsfaktor.

Es sei zuerst n ungerade. Nach Lemma 3.3.4 und Lemma 3.3.7 gilt:

$$\dim_k(S^{(n-2,1^2)}) = \frac{(n-1)(n-2)}{2}, \quad \dim_k(D^{(n-1,1)}) = n-1$$

und

$$\dim_k(D^{(n-2,2)}) = \begin{cases} \frac{n(n-3)}{2} - 1, & \text{falls } n \equiv 1 \pmod{4} \\ \frac{n(n-3)}{2}, & \text{falls } n \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

Damit ist $D^{(n)}$ aus Dimensionsgründen immer ein Kompositionsfaktor von $S^{(n-2,1^2)}$. Mit Nakayamas Vermutung folgt, dass der Modul $D^{(n-1,1)}$ kein Kompositionsfaktor von $S^{(n-2,1^2)}$ ist, da $S^{(n-2,1^2)} \leq Y^{(n-2,1^2)}$ und $Y^{(n-2,1^2)}$ unzerlegbar ist. Nach Vergleich der Dimensionen der Moduln folgt dann:

$$S^{(n-2,1^2)} \leftrightarrow \begin{cases} 2D^{(n)} + D^{(n-2,2)}, & \text{falls } n \equiv 1 \pmod{4} \\ D^{(n)} + D^{(n-2,2)}, & \text{falls } n \equiv 3 \pmod{4} \end{cases}$$

Es sei jetzt n gerade. Mit dem Lemma 3.3.7 und wegen $n-1$ ungerade gilt dann:

$$S^{(n-2,1^2)} \downarrow_{\mathcal{S}_{n-1}} \leftrightarrow \begin{cases} D^{(n-1)} + D^{(n-2,1)} + D^{(n-3,2)}, & \text{falls } n \equiv 0 \pmod{4} \\ 2D^{(n-1)} + D^{(n-2,1)} + D^{(n-3,2)}, & \text{falls } n \equiv 2 \pmod{4}. \end{cases}$$

Da nach Lemma 3.3.15 die Moduln $D^{(n-1,1)}$ und $D^{(n-2,2)}$ einfach einschränken und nur $D^{(n)}$, $D^{(n-1,1)}$ und $D^{(n-2,2)}$ mögliche Kompositionsfaktoren von $S^{(n-2,1^2)}$ sind, folgt damit die Behauptung. \square

Nun ist man in der Lage, die Kompositionsfaktoren von $M^{(n-2,1^2)}$ anzugeben.

3.3.17 Lemma

Für $5 \leq n$ gilt:

$$M^{(n-2,1^2)} \leftrightarrow \begin{cases} 4D^{(n)} + 4D^{(n-1,1)} + 2D^{(n-2,2)}, & \text{falls } n \equiv 0 \pmod{4} \\ 4D^{(n)} + 2D^{(n-1,1)} + 2D^{(n-2,2)}, & \text{falls } n \equiv 1 \pmod{4} \\ 6D^{(n)} + 4D^{(n-1,1)} + 2D^{(n-2,2)}, & \text{falls } n \equiv 2 \pmod{4} \\ 2D^{(n)} + 2D^{(n-1,1)} + 2D^{(n-2,2)}, & \text{falls } n \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

Beweis :

Nach Satz (17.14) in [12] hat $M^{(n-2,1^2)}$ eine Spechtreihe mit Faktoren

$$S^{(n)}, S^{(n-1,1)}, S^{(n-1,1)}, S^{(n-2,2)}, S^{(n-2,1^2)}.$$

Die Behauptung folgt nun mit den Lemmata 3.3.7 und 3.3.16. \square

3.4 Zerlegung von $D^{(n-1,1)} \otimes^2$

Aus den Berechnungen der Beispiele für diese Arbeit kann eine Regelmäßigkeit der Zerlegung des Produktes $D^{(n-1,1)} \otimes^2$ beobachtet werden. Ziel dieses Abschnittes ist es, diese vermutete Zerlegung zu beweisen. Ein wesentlicher Schritt, die Zerlegung von $D^{(n-1,1)} \otimes^2$ zu bestimmen, ist die Zerlegung von $M^{(n-1,1)} \otimes^2$ in Permutationsmoduln.

3.4.1 Lemma

Es sei $4 \leq n$. Dann gilt die Isomorphie

$$M^{(n-1,1)} \otimes^2 \cong M^{(n-1,1)} \oplus M^{(n-2,1^2)}.$$

Beweis:

Mit dem Tensorproduktsatz von Mackey 1.10.8 und den Doppelnebenklassenvertretern $\{1, (n-1, n)\}$ von $\mathcal{S}_{n-1} \backslash \mathcal{S}_n / \mathcal{S}_{n-1}$ ist:

$$\begin{aligned} M^{(n-1,1)} \otimes^2 &\cong (1_{\mathcal{S}_{n-1}} \uparrow^{\mathcal{S}_n}) \otimes^2 \cong (1_{\mathcal{S}_{n-1}} \otimes^2) \uparrow^{\mathcal{S}_n} \oplus (1_{\mathcal{S}_{n-2}} \otimes^2) \uparrow^{\mathcal{S}_n} \\ &\cong 1_{\mathcal{S}_{n-1}} \uparrow^{\mathcal{S}_n} \oplus 1_{\mathcal{S}_{n-2}} \uparrow^{\mathcal{S}_n} \\ &\cong M^{(n-1,1)} \oplus M^{(n-2,1^2)}. \end{aligned}$$

Die erste Isomorphie gilt, da

$$\mathcal{S}_{n-1} \cap \mathcal{S}_{n-1}^{(n-1,n)} = \mathcal{S}_{n-2}$$

ist. Denn es ist $\mathcal{S}_{n-2} \subseteq \mathcal{S}_{n-1}$ und $\mathcal{S}_{n-2} \subseteq \mathcal{S}_{n-1}^{(n-1,n)}$. Also ist $\mathcal{S}_{n-2} \subseteq \mathcal{S}_{n-1} \cap \mathcal{S}_{n-1}^{(n-1,n)}$.

Es sei nun $\pi \in \mathcal{S}_{n-1} \cap \mathcal{S}_{n-1}^{(n-1,n)}$. Dann enthält kein nicht-trivialer Zykel von π die Ziffer n , da $\pi \in \mathcal{S}_{n-1}$ ist, und weiter enthält kein nicht-trivialer Zykel von π die Ziffer $n-1$, da $\pi \in \mathcal{S}_{n-1}^{(n-1,n)}$ ist.

Somit gilt dann $\mathcal{S}_{n-1} \cap \mathcal{S}_{n-1}^{(n-1,n)} \subseteq \mathcal{S}_{n-2}$. □

Das folgende Lemma ist hauptsächlich eine Folgerung aus einem Satz von Mackey.

3.4.2 Lemma

Es sei $3 \leq n$ und N ein $k\mathcal{S}_n$ -Modul. Dann gilt:

$$(N \uparrow^{\mathcal{S}_{n+1}}) \downarrow_{\mathcal{S}_n} \cong N \oplus M^{(n-1,1)} \otimes N.$$

Beweis:

Es gilt:

$$\begin{aligned} (N \uparrow^{\mathcal{S}_{n+1}}) \downarrow_{\mathcal{S}_n} &\cong N \oplus (N^{(n,n+1)} \downarrow_{\mathcal{S}_{n-1}}) \uparrow^{\mathcal{S}_n} \\ &\cong N \oplus (N \downarrow_{\mathcal{S}_{n-1}}) \uparrow^{\mathcal{S}_n} \\ &\cong N \oplus (1_{\mathcal{S}_{n-1}} \otimes N \downarrow_{\mathcal{S}_{n-1}}) \uparrow^{\mathcal{S}_n} \\ &\cong N \oplus M^{(n-1,1)} \otimes N. \end{aligned}$$

Die erste Isomorphie gilt mit Satz (1.10) in Kapitel 3 aus [18] und mit den Doppelnebenklassenvertretern $\{1, (n, n+1)\}$ von $\mathcal{S}_n \backslash \mathcal{S}_{n+1} / \mathcal{S}_n$ (vgl. Beweis von 3.4.1). Weiter gilt:

$$N^{(n,n+1)} \downarrow_{\mathcal{S}_{n-1}} = (N \otimes_{k\mathcal{S}_n} (n, n+1)) \downarrow_{\mathcal{S}_{n-1}} \cong N \downarrow_{\mathcal{S}_{n-1}}$$

als $k\mathcal{S}_{n-1}$ -Moduln. Da für alle $\pi \in \mathcal{S}_{n-1}$ gilt $(n, n+1)\pi = \pi(n, n+1)$. Damit folgt die zweite Isomorphie. Die vierte Isomorphie folgt mit Lemma (1.15) aus Kapitel 3 in [18]. □

Nun ist alles zusammengetragen, um die Zerlegung von $D^{(n-1,1)} \otimes^2$ zu bestimmen. Zunächst wird der Fall $p \neq 2$ betrachtet, zudem wird noch unterschieden, ob $p \nmid n$ oder $p \mid n$ gilt. Zuerst wird die Zerlegung für $p \nmid n$ betrachtet.

3.4.3 Satz

Es sei $p \neq 2$ und $4 \leq n$ mit $p \nmid n$. Dann gilt:

$$D^{(n-1,1)} \otimes^2 \cong \begin{cases} D^{(n)} \oplus D^{(n-1,1)} \oplus D^{(n-2,2)} \oplus D^{(n-2,1^2)}, & \text{falls } n \not\equiv 1, 2 \pmod{p} \\ D^{(n)} \oplus Y^{(n-2,2)} \oplus D^{(n-2,1^2)}, & \text{falls } n \equiv 2 \pmod{p} \\ D^{(n-1,1)} \oplus Y^{(n-2,2)} \oplus D^{(n-2,1^2)}, & \text{falls } n \equiv 1 \pmod{p}. \end{cases}$$

Insbesondere ist im Fall $n \not\equiv 1, 2 \pmod{p}$ das Produkt halbeinfach.

Beweis:

Nach Lemma 3.4.1 gilt

$$M^{(n-1,1)} \otimes^2 \cong M^{(n-1,1)} \oplus M^{(n-2,1^2)}.$$

Weiter ist nach Lemma 3.3.9

$$M^{(n-1,1)} \cong D^{(n)} \oplus D^{(n-1,1)}.$$

Damit ist andererseits

$$M^{(n-1,1)\otimes 2} \cong (D^{(n)} \oplus D^{(n-1,1)})^{\otimes 2} \cong D^{(n)} \oplus D^{(n-1,1)} \oplus D^{(n-1,1)} \oplus D^{(n-1,1)\otimes 2}.$$

Insgesamt folgt nun

$$M^{(n-2,1^2)} \cong D^{(n-1,1)} \oplus D^{(n-1,1)\otimes 2}. \quad (3.1)$$

Weiter gilt mit Satz 3.3.2

$$M^{(n-2,1^2)} \cong Y^{(n-2,1^2)} \oplus aY^{(n-2,2)} \oplus bY^{(n-1,1)} \oplus cY^{(n)},$$

wobei $a, b, c \in \mathbb{N}$ sind. Nach Lemma 3.3.5 ist $S^{(n-2,1^2)} \cong D^{(n-2,1^2)}$ sowie $S^{(n-1,1)} \cong D^{(n-1,1)}$. Da $S^{(n-2,1^2)}$ einfach ist und

$$\dim_k(M^{(n-2,1^2)}) = \dim_k(S^{(n-2,1^2)}) + \dim_k(S^{(n-2,1^2)^\perp}),$$

ist $Y^{(n-2,1^2)} \cong D^{(n-2,1^2)}$. Nach Korollar 3.3.10 ist $Y^{(n-1,1)} \cong D^{(n-1,1)}$. Wegen Gleichung (3.1) ist also $1 \leq b$. Weiter ist damit:

$$D^{(n-1,1)\otimes 2} \cong D^{(n-2,1^2)} \oplus aY^{(n-2,2)} \oplus (b-1)D^{(n-1,1)} \oplus cD^{(n)}. \quad (3.2)$$

Nach Lemma 3.3.14 sind die Kompositionsfaktoren von $M^{(n-2,1^2)}$ bekannt, also insbesondere nach Gleichung (3.1) auch die Kompositionsfaktoren von $D^{(n-1,1)\otimes 2}$. Da die Youngmoduln $Y^{(n)}$, $Y^{(n-1,1)}$ und $Y^{(n-2,1^2)}$ alle einfach sind, braucht nur noch der Youngmodul $Y^{(n-2,2)}$ betrachtet werden. Dazu eine Fallunterscheidung:

- Fall: $n \not\equiv 1 \pmod{p}$
Ist weiter $n \equiv 2 \pmod{p}$, dann ist mit Lemma 3.3.11 dann

$$Y^{(n-2,2)} = D^{(n-1,1)} | D^{(n-2,2)} | D^{(n-1,1)}.$$

Weiter ist mit Lemma 3.3.14

$$D^{(n-1,1)\otimes 2} \leftrightarrow D^{(n)} + 2D^{(n-1,1)} + D^{(n-2,2)} + D^{(n-2,1^2)}.$$

Mit Gleichung (3.2) ist dann

$$D^{(n-1,1)\otimes 2} \cong D^{(n)} \oplus Y^{(n-2,2)} \oplus D^{(n-2,1^2)}.$$

Ist nun $n \not\equiv 2 \pmod{p}$, so ist mit Lemma 3.3.11 dann

$$Y^{(n-2,2)} \cong S^{(n-2,2)} \cong D^{(n-2,2)}$$

und mit Lemma 3.3.14 ist

$$D^{(n-1,1)\otimes 2} \leftrightarrow D^{(n)} + D^{(n-1,1)} + D^{(n-2,2)} + D^{(n-2,1^2)}.$$

Somit erhält man

$$D^{(n-1,1)\otimes 2} \cong D^{(n)} \oplus D^{(n-1,1)} \oplus D^{(n-2,2)} \oplus D^{(n-2,1^2)}.$$

- Fall: $n \equiv 1 \pmod{p}$
In diesem Fall ist mit Lemma 3.3.11 dann

$$Y^{(n-2,2)} = D^{(n)} | D^{(n-2,2)} | D^{(n)}$$

und mit Lemma 3.3.14 ist

$$D^{(n-1,1)\otimes 2} \leftrightarrow 2D^{(n)} + D^{(n-1,1)} + D^{(n-2,2)} + D^{(n-2,1^2)}.$$

Damit folgt

$$D^{(n-1,1)\otimes 2} \cong D^{(n-1,1)} \oplus Y^{(n-2,2)} \oplus D^{(n-2,1^2)}.$$

□

Im Fall $p \mid n$ ist $D^{(n-1,1)\otimes 2}$ nicht unbedingt ein Untermodul von $M^{(n-2,1^2)}$ (man vergleiche dazu Korollar 3.4.6). Aber mit Hilfe von Brauercharakteren kann man die notwendigen Informationen für die Zerlegung von $D^{(n-1,1)\otimes 2}$ bekommen. Einen anderen Beweis für die Ergebnisse des folgenden Satzes und des anschließenden Korollars kann man auch aus Proposition (2.5) aus [16] entnehmen.

3.4.4 Satz

Ist $p \neq 2$ und $5 \leq n$ mit $p \mid n$, so gilt

$$D^{(n-1,1)\otimes 2} \cong D^{(n)} \oplus D^{(n-2,2)} \oplus D^{(n-2,1^2)}.$$

Insbesondere ist das Produkt immer halbeinfach.

Beweis:

Nach Korollar 3.3.10 gilt:

$$M^{(n-1,1)} \leftrightarrow 2D^{(n)} + D^{(n-1,1)}.$$

Für den Brauercharakter von $M^{(n-1,1)\otimes 2}$ gilt dann:

$$\begin{aligned} \varphi_{M^{(n-1,1)\otimes 2}}^2 &= (2\varphi_{D^{(n)}} + \varphi_{D^{(n-1,1)}})^2 \\ &= 4\varphi_{D^{(n)}} + 4\varphi_{D^{(n-1,1)}} + \varphi_{D^{(n-1,1)}}^2. \end{aligned}$$

Weiter gilt nach Lemma 3.4.1 die Zerlegung:

$$M^{(n-1,1)\otimes 2} \cong M^{(n-1,1)} \oplus M^{(n-2,1^2)}.$$

Nach Lemma 3.3.14 ist:

$$M^{(n-2,1^2)} \leftrightarrow 3D^{(n)} + 3D^{(n-1,1)} + D^{(n-2,2)} + D^{(n-2,1^2)}$$

Somit gilt dann andererseits:

$$\varphi_{M^{(n-1,1)\otimes 2}}^2 = 5\varphi_{D^{(n)}} + 4\varphi_{D^{(n-1,1)}} + \varphi_{D^{(n-2,2)}} + \varphi_{D^{(n-2,1^2)}}.$$

Damit ist dann:

$$\varphi_{D^{(n-1,1)}}^2 = \varphi_{D^{(n)}} + \varphi_{D^{(n-2,2)}} + \varphi_{D^{(n-2,1^2)}}.$$

Daraus folgt:

$$D^{(n-1,1)\otimes 2} \leftrightarrow D^{(n)} + D^{(n-2,2)} + D^{(n-2,1^2)}.$$

Da $D^{(n-1,1)\otimes 2}$ selbstdual ist folgt damit die Behauptung. \square

Jetzt ist man in der Lage, eine Aussage über den antisymmetrischen Anteil $\mathfrak{A}(D^{(n-1,1)})$ zu machen.

3.4.5 Korollar

Es sei $4 \leq n$, dann gilt:

$$\mathfrak{A}(D^{(n-1,1)}) \cong D^{(n-2,1^2)}.$$

Beweis:

Dies folgt aus den Sätzen 3.4.3 und 3.4.4 und nach Vergleich der Dimensionen. \square

Nun kann auch für den Permutationsmodul $M^{(n-2,1^2)}$ die Zerlegung in unzerlegbare Moduln angegeben werden.

3.4.6 Korollar

Es sei $p \neq 2$ und $4 \leq n$. Dann gilt:

$$M^{(n-2,1^2)} \cong \begin{cases} D^{(n)} \oplus D^{(n-1,1)} \oplus D^{(n-1,1)} \oplus D^{(n-2,2)} \oplus D^{(n-2,1^2)}, & \text{falls } n \not\equiv 0, 1, 2 \pmod{p} \\ D^{(n)} \oplus D^{(n-1,1)} \oplus Y^{(n-2,2)} \oplus D^{(n-2,1^2)}, & \text{falls } n \equiv 2 \pmod{p} \\ D^{(n-1,1)} \oplus D^{(n-1,1)} \oplus Y^{(n-2,2)} \oplus D^{(n-2,1^2)}, & \text{falls } n \equiv 1 \pmod{p} \\ Y^{(n-1,1)} \oplus D^{(n-2,2)} \oplus Y^{(n-2,1^2)}, & \text{falls } n \equiv 0 \pmod{p}. \end{cases}$$

Im letzten Fall hat der Youngmodul zu $(n-2, 1^2)$ folgende Radikalreihe von oben nach unten gesehen:

$$Y^{(n-2,1^2)} = \begin{array}{c} D^{(n-1,1)} \\ D^{(n)} \oplus D^{(n-2,1^2)} \\ D^{(n-1,1)}. \end{array}$$

Insbesondere ist $M^{(n-2,1^2)}$ im ersten Fall halbeinfach.

Beweis:

Die ersten drei Fälle folgen direkt aus Satz 3.4.3. Für den letzten Fall, $p \mid n$, betrachtet man

$$\begin{aligned} M^{(n-2,1^2)} &\cong 1_{\mathcal{S}_{n-2}} \uparrow^{\mathcal{S}_n} \\ &\cong (1_{\mathcal{S}_{n-2}} \uparrow^{\mathcal{S}_{n-1}}) \uparrow^{\mathcal{S}_n} \\ &\cong (D^{(n-1)} \oplus D^{(n-2,1)}) \uparrow^{\mathcal{S}_n} \\ &\cong M^{(n-1,1)} \oplus (D^{(n-2,1)}) \uparrow^{\mathcal{S}_n}. \end{aligned}$$

Die dritte Isomorphie gilt nach Lemma 3.3.9. Nach Satz 3.3.2 ist

$$M^{(n-2,1^2)} \cong Y^{(n-2,1^2)} \oplus aY^{(n-2,2)} \oplus bY^{(n-1,1)} \oplus cY^{(n)}$$

mit $a, b, c \in \mathbb{N}$. Und nach Korollar 3.3.10 gilt $Y^{(n-1,1)} \cong M^{(n-1,1)}$. Damit ist $1 \leq b$. Weiter ist dann mit der Frobenius-Reziprozität

$$\dim_k(\text{Hom}_{k\mathcal{S}_n}(M^{(n-2,1^2)}, D^{(n)})) = \dim_k(\text{Hom}_{k\mathcal{S}_{n-2}}(D^{(n-2)}, D^{(n-2)})) = 1.$$

Nach Lemma 3.3.9 ist $D^{(n)}$ ein Untermodul von $M^{(n-1,1)}$. Daraus folgt $c = 0$, da $1 \leq b$ ist. Mit Lemma 3.3.14 gilt weiter

$$M^{(n-2,1^2)} \leftrightarrow 3D^{(n)} + 3D^{(n-1,1)} + D^{(n-2,2)} + D^{(n-2,1^2)}.$$

Es ist $a = 1$, da $Y^{(n-2,2)} \cong D^{(n-2,2)}$ ist und $D^{(n-2,2)}$ nur einmal als Kompositionsfaktor vorkommt und alle Konstituenten bis auf $D^{(n-2,2)}$ den p -Kern $(\)$ haben. Damit liegt $D^{(n-2,2)}$ nach Nakayamas Vermutung in einem anderen Block als $Y^{(n-2,1^2)}$.

Weiter ist $S^{(n-2,1^2)} \leq Y^{(n-2,1^2)}$. Damit bleiben von den Kompositionsfaktoren nur noch $D^{(n)}$ und $D^{(n-1,1)}$ zu verteilen. Da $c = 0$ ist und da $Y^{(n-2,1^2)}$ selbstdual, ist folgt die Behauptung. \square

Ab jetzt und bis zum Ende dieses des Abschnittes sei $p = 2$. Zuerst wird der Permutationsmodul zur Partition $(n-2, 1^2)$ im Fall $2 \mid n$ betrachtet.

3.4.7 Lemma

Ist $6 \leq n$ und n gerade so gilt:

$$M^{(n-2,1^2)} \cong Y^{(n-2,1^2)} \oplus M^{(n-1,1)}.$$

Beweis:

Mit Korollar 3.3.10 gilt

$$M^{(n-2,1^2)} \cong (M^{(n-2,1)}) \uparrow^{\mathcal{S}_n} \cong (D^{(n-1)} \oplus D^{(n-2,1)}) \uparrow^{\mathcal{S}_n} \cong M^{(n-1,1)} \oplus (D^{(n-2,1)}) \uparrow^{\mathcal{S}_n}.$$

Mit Satz (3.2) in [14] folgt $\text{soc}(D^{(n-2,1)} \uparrow^{\mathcal{S}_n}) \cong D^{(n-1,1)}$ also ist $D^{(n-2,1)} \uparrow^{\mathcal{S}_n}$ unzerlegbar. Da nach Satz 3.3.2 der Modul $Y^{(n-2,1^2)}$ ein direkter Summand von $M^{(n-2,1^2)}$ ist, muss

$$D^{(n-2,1)} \uparrow^{\mathcal{S}_n} \cong Y^{(n-2,1^2)}$$

sein. Damit folgt die Behauptung. \square

3.4.8 Satz

Es sei $5 \leq n$ und n ungerade. Dann gilt:

$$D^{(n-1,1)} \otimes^2 \cong Y^{(n-2,1^2)} \oplus D^{(n-1,1)}.$$

Insbesondere gilt:

$$D^{(n-1,1)} \otimes^2 \leftrightarrow \begin{cases} 4D^{(n)} + D^{(n-1,1)} + 2D^{(n-2,2)}, & \text{falls } n \equiv 1 \pmod{4} \\ 2D^{(n)} + D^{(n-1,1)} + 2D^{(n-2,2)}, & \text{falls } n \equiv 3 \pmod{4} \end{cases}$$

ist.

Beweis :

Mit Lemma 3.4.1 und mit $M^{(n-1,1)} \cong D^{(n)} \oplus D^{(n-1,1)}$ (siehe Lemma 3.3.9) gilt

$$\begin{aligned} M^{(n-1,1)} \oplus M^{(n-2,1^2)} &\cong M^{(n-1,1)} \otimes^2 \\ &\cong D^{(n)} \oplus D^{(n-1,1)} \oplus D^{(n-1,1)} \oplus D^{(n-1,1)} \otimes^2. \end{aligned}$$

Also gilt:

$$M^{(n-2,1^2)} \cong D^{(n-1,1)} \oplus D^{(n-1,1)} \otimes^2.$$

Mit Lemma 3.3.17 ist weiter

$$M^{(n-2,1^2)} \leftrightarrow \begin{cases} 4D^{(n)} + 2D^{(n-1,1)} + 2D^{(n-2,2)}, & \text{falls } n \equiv 1 \pmod{4} \\ 2D^{(n)} + 2D^{(n-1,1)} + 2D^{(n-2,2)}, & \text{falls } n \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

Nach Satz 3.3.2 gilt

$$M^{(n-2,1^2)} \cong Y^{(n-2,1^2)} \oplus aY^{(n-2,2)} + bY^{(n-1,1)} + cY^{(n)},$$

mit $a, b, c \in \mathbb{N}$. Weiter ist $Y^{(n-1,1)} \cong D^{(n-1,1)}$ nach Lemma 3.3.9. Mit Nakayamas Vermutung kommt $D^{(n-1,1)}$ nur im Youngmodul $Y^{(n-1,1)}$ vor, damit ist $b = 2$. Mit der Frobenius-Reziprozität folgt

$$\dim_k(\text{Hom}_{k\mathcal{S}_n}(M^{(n-2,1^2)}, D^{(n)})) = \dim_k(\text{Hom}_{k\mathcal{S}_{n-2}}(D^{(n-2)}, D^{(n-2)})) = 1. \quad (3.3)$$

Nun eine Fallunterscheidung:

- Fall: $n \equiv 1 \pmod{4}$

Es ist

$$M^{(n-2,1^2)} \leftrightarrow 4D^{(n)} + 2D^{(n-1,1)} + 2D^{(n-2,2)} \quad (3.4)$$

und

$$S^{(n-2,1^2)} \leftrightarrow 2D^{(n)} + D^{(n-2,2)} \quad (3.5)$$

nach Lemma 3.3.7 und Lemma 3.3.16. Mit Korollar 3.3.13 ist

$$Y^{(n-2,2)} = D^{(n)} | D^{(n-2,2)} | D^{(n)}. \quad (3.6)$$

Angenommen, es sei $1 \leq a$. Wegen den Gleichungen (3.4), (3.5) und (3.6) muss dann $Y^{(n-2,1^2)} \cong S^{(n-2,1^2)}$ sein. Somit ist $D^{(n)}$ im Sockel von $Y^{(n-2,1^2)}$, da $Y^{(n-2,1^2)}$ selbstdual ist. Dies ist ein Widerspruch zu (3.3), da $D^{(n)}$ auch im Sockel von $Y^{(n-2,2)}$ ist. Damit muss dann $a = 0$ sein. Also ist

$$Y^{(n-2,1^2)} \leftrightarrow 4D^{(n)} + 2D^{(n-2,2)}.$$

Es folgt also $a = c = 0$ und daraus folgt die Behauptung.

- Fall: $n \equiv 3 \pmod{4}$

Es ist

$$M^{(n-2,1^2)} \leftrightarrow 2D^{(n)} + 2D^{(n-1,1)} + 2D^{(n-2,2)}$$

und

$$S^{(n-2,1^2)} \leftrightarrow D^{(n)} + D^{(n-2,2)}$$

nach Lemma 3.3.7 und Lemma 3.3.16. Mit Korollar 3.3.13 ist

$$Y^{(n-2,2)} \cong D^{(n-2,2)}.$$

Mit Lemma 1.4.4 folgt $c = 0$. Angenommen, es sei $a = 1$. Weil $b = 2$ ist, ist damit

$$M^{(n-2,1^2)} \downarrow_{\mathcal{S}_{n-1}} \cong Y^{(n-2,1^2)} \downarrow_{\mathcal{S}_{n-1}} \oplus D^{(n-2,2)} \downarrow_{\mathcal{S}_{n-1}} \oplus D^{(n-1,1)} \downarrow_{\mathcal{S}_{n-1}} \oplus D^{(n-1,1)} \downarrow_{\mathcal{S}_{n-1}}.$$

Andererseits gilt:

$$\begin{aligned} M^{(n-2,1^2)} \downarrow_{\mathcal{S}_{n-1}} &\cong M^{(n-2,1)} \oplus M^{(n-2,1)} \otimes^2 \\ &\cong M^{(n-2,1)} \oplus M^{(n-2,1)} \oplus M^{(n-3,1^2)} \\ &\cong M^{(n-2,1)} \oplus M^{(n-2,1)} \oplus M^{(n-2,1)} \oplus Y^{(n-3,1^2)}. \end{aligned}$$

Die erste Isomorphie gilt nach Lemma 3.4.2. Die zweite Isomorphie gilt nach 3.4.1. Mit Lemma 3.4.7 folgt dann die dritte Isomorphie. Weiter gilt:

$$\dim_k(D^{(n-1,1)}) = n - 1, \quad \dim_k(D^{(n-2,2)}) = \frac{n(n-3)}{2}, \quad \dim_k(M^{(n-2,1^2)}) = n(n-1)$$

und

$$\dim_k(M^{(n-2,1)}) = n - 1, \quad \dim_k(Y^{(n-3,1^2)}) = n^2 - 4n + 3.$$

Demnach muss

$$\dim_k(Y^{(n-2,1^2)}) = \frac{n^2 - 3n + 4}{2}$$

sein. Dies ergibt einen Widerspruch nach Vergleichen der Dimensionen der unzerlegbaren Moduln und eingeschränkten Moduln. Damit folgt die Behauptung. \square

Damit kann man jetzt auch eine Zerlegung von $M^{(n-2,1^2)}$ in Youngmoduln angeben, falls n ungerade ist. Über die Struktur von $Y^{(n-2,1^2)}$ werden in dieser Arbeit keine genaueren Aussagen getroffen.

3.4.9 Lemma

Ist $5 \leq n$ und n ungerade so gilt:

$$M^{(n-2,1^2)} \cong Y^{(n-2,1^2)} \oplus D^{(n-1,1)} \oplus D^{(n-1,1)}.$$

Beweis:

Dies folgt aus dem Beweis von Satz 3.4.8. \square

Ist n gerade, so werden hier zunächst die Kompositionsfaktoren von $D^{(n-1,1)^{\otimes 2}}$ angegeben. Des weiteren kann in diesem Fall das Produkt in höchstens zwei Summanden zerfallen.

3.4.10 Satz

Es sei $6 \leq n$ und n gerade. Dann gilt

$$D^{(n-1,1)^{\otimes 2}} \leftrightarrow \begin{cases} 2D^{(n)} + D^{(n-1,1)} + 2D^{(n-2,2)}, & \text{falls } n \equiv 0 \pmod{4} \\ 4D^{(n)} + D^{(n-1,1)} + 2D^{(n-2,2)}, & \text{falls } n \equiv 2 \pmod{4}. \end{cases}$$

Beweis :

Nach Lemma 3.4.1 gilt

$$\varphi_{M^{(n-1,1)}}^2 = \varphi_{M^{(n-1,1)}} + \varphi_{M^{(n-2,1^2)}}.$$

Weiter hat der Brauercharakter von $M^{(n-1,1)}$ nach Lemma 3.3.9 folgende Gestalt

$$\varphi_{M^{(n-1,1)}} = 2\varphi_{D^{(n)}} + \varphi_{D^{(n-1,1)}}.$$

Somit ist dann

$$\varphi_{M^{(n-2,1^2)}} = 2\varphi_{D^{(n)}} + 3\varphi_{D^{(n-1,1)}} + \varphi_{D^{(n-1,1)}}^2. \quad (3.7)$$

Mit Lemma 3.3.17 und Lemma 3.3.7 weiter

$$\varphi_{M^{(n-2,1^2)}} = \begin{cases} 4\varphi_{D^{(n)}} + 4\varphi_{D^{(n-1,1)}} + 2\varphi_{D^{(n-2,2)}}, & \text{falls } n \equiv 0 \pmod{4} \\ 6\varphi_{D^{(n)}} + 4\varphi_{D^{(n-1,1)}} + 2\varphi_{D^{(n-2,2)}}, & \text{falls } n \equiv 2 \pmod{4}. \end{cases} \quad (3.8)$$

Aus den Gleichungen (3.7) und (3.8) ergibt sich die Behauptung. \square

Mit dem folgenden Lemma kann man zeigen, dass das Produkt $D^{(n-1,1)^{\otimes 2}}$ im Fall n gerade unzerlegbar ist. Die grundlegenden Ideen für den hier aufgeführten Beweis sind von Dr. Jürgen Müller.

3.4.11 Lemma

Es sei $6 \leq n$ und n gerade. Dann gilt:

$$\dim_k(\text{Hom}_{k\mathcal{S}_n}(D^{(n-1,1)^{\otimes 2}}, D^{(n-1,1)})) = 0.$$

Beweis:

Nach Lemma 3.3.15 ist

$$D^{(n-1,1)} \downarrow_{\mathcal{S}_{n-1}} \cong D^{(n-2,1)}.$$

Mit Satz 3.4.8 kommt $D^{(n-2,1)}$ genau einmal als Kompositionsfaktor und als direkter Summand von $D^{(n-2,1)^{\otimes 2}}$ vor. Damit ist dann

$$\dim_k(\text{Hom}_{k\mathcal{S}_{n-1}}(D^{(n-1,1)^{\otimes 2}} \downarrow_{\mathcal{S}_{n-1}}, D^{(n-1,1)} \downarrow_{\mathcal{S}_{n-1}})) = 1. \quad (3.9)$$

Die Idee ist nun folgende: Es wird ein nichttrivialer Homomorphismus

$$\varphi \in \text{Hom}_{k\mathcal{S}_{n-1}}(D^{(n-1,1)} \otimes^2 \downarrow_{\mathcal{S}_{n-1}}, D^{(n-1,1)} \downarrow_{\mathcal{S}_{n-1}})$$

konstruiert und gezeigt, dass φ kein $k\mathcal{S}_n$ -Homomorphismus ist. Dann folgt wegen

$$\text{Hom}_{k\mathcal{S}_n}(D^{(n-1,1)} \otimes^2, D^{(n-1,1)}) \leq \text{Hom}_{k\mathcal{S}_{n-1}}(D^{(n-1,1)} \otimes^2 \downarrow_{\mathcal{S}_{n-1}}, D^{(n-1,1)} \downarrow_{\mathcal{S}_{n-1}})$$

die Behauptung, da jeder Homomorphismus $\psi \in \text{Hom}_{k\mathcal{S}_{n-1}}(D^{(n-1,1)} \otimes^2 \downarrow_{\mathcal{S}_{n-1}}, D^{(n-1,1)} \downarrow_{\mathcal{S}_{n-1}})$ aus Dimensionsgründen ein skalares Vielfaches von φ ist.

Um φ zu konstruieren, wird eine geeignete Basis von $M^{(n-1,1)}$ angegeben. Es sei $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ eine Basis von $M^{(n-1,1)}$ mit $\omega_i \pi := \omega_{\pi^{-1}(i)}$ für $1 \leq i \leq n$ und $\pi \in \mathcal{S}_n$. Dann ist $\Omega' = \{\omega_1, \dots, \omega_{n-1}\}$ eine Basis von $M^{(n-2,1)}$. Man definiert nun weitere Elemente:

$$\begin{aligned} b_i &:= \omega_i + \omega_{i+1} \text{ für } 1 \leq i \leq n-2, \\ b_{n-1} &:= \sum_{j=1}^{n-1} \omega_j, \\ b_n &:= \sum_{j=1}^n \omega_j. \end{aligned}$$

Damit ist dann auch $B := \{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis von $M^{(n-1,1)}$ und $B' := \{b_1, \dots, b_{n-1}\}$ eine Basis von $M^{(n-2,1)}$. Weiter gilt für $1 \leq i \leq n-2$ damit:

$$b_i(1,2) = \begin{cases} \omega_1 + \omega_3 = b_1 + b_2, & \text{falls } i = 2 \\ b_i, & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$b_i(1, \dots, n-1) = \begin{cases} \omega_{n-1} + \omega_1 = \sum_{j=1}^{n-2} b_j, & \text{falls } i = 1 \\ b_{i-1}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit ist $\{b_1, \dots, b_{n-2}\}$ eine Basis eines $k\mathcal{S}_{n-1}$ -Untermoduls von $M^{(n-2,1)}$. Nach Lemma 3.3.9 ist

$$M^{(n-2,1)} = D^{(n-1)} \oplus D^{(n-2,1)}.$$

Also ist $\{b_1, \dots, b_{n-2}\}$ eine Basis von $D^{(n-2,1)}$.

Man betrachte nun

$$N := \left\{ \sum_{i=1}^n a_i \omega_i \mid a_i \in k, \sum_{i=1}^n a_i = 0 \right\}.$$

Offensichtlich ist N ein $k\mathcal{S}_n$ -Untermodul von $M^{(n-1,1)}$ und $C := \{b_1, \dots, b_{n-2}, b_n\}$ eine Basis von N . Damit hat N die Dimension $n-1$. Weiter ist $M^{(n-1,1)}/N \cong D^{(n)}$. Somit ist N das Radikal von $M^{(n-1,1)}$ (vgl. Lemma 3.3.9). Zudem ist C an $\{0\} \leq D^{(n)} \leq N$ so angepasst, dass $\langle b_n \rangle$ den Untermodul $D^{(n)}$ von N erzeugt und

$$D^{(n-1,1)} \cong N / \langle b_n \rangle$$

ist. Es ist

$$\begin{aligned} \sigma : D^{(n-2,1)} &\rightarrow D^{(n-1,1)} \downarrow_{\mathcal{S}_{n-1}} \\ b_i &\mapsto b_i + \langle b_n \rangle, \text{ für } 1 \leq i \leq n-2 \end{aligned}$$

ein $k\mathcal{S}_{n-1}$ -Isomorphismus. Damit sei dann

$$\begin{aligned} \varphi_1 : D^{(n-1,1)} \otimes^2 \downarrow_{\mathcal{S}_{n-1}} &\rightarrow M^{(n-2,1)} \otimes^2 \\ (b_i + \langle b_n \rangle) \otimes (b_j + \langle b_n \rangle) &\mapsto b_i \otimes b_j \end{aligned}$$

mit $1 \leq i, j \leq n-2$ die Einbettung des Tensorproduktes. Da σ^{-1} und die Einbettung von $D^{(n-2,1)} \otimes^2$ in $M^{(n-2,1)} \otimes^2$ zwei $k\mathcal{S}_{n-1}$ -Homomorphismen sind, ist damit auch φ_1 ein $k\mathcal{S}_{n-1}$ -Homomorphismus. Weiter sei

$$\begin{aligned} \varphi_2 : M^{(n-2,1)} \otimes^2 &\rightarrow M^{(n-2,1)} \\ \omega_i \otimes \omega_j &\mapsto \begin{cases} \omega_i, & \text{falls } i = j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

für $1 \leq i, j \leq n-1$. Es sei $\pi \in \mathcal{S}_{n-1}$. Für $1 \leq i, j \leq n-1$ gilt dann:

$$\varphi_2(\omega_i \otimes \omega_j)\pi = \begin{cases} \omega_{\pi^{-1}(i)}, & \text{falls } i = j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$\varphi_2((\omega_i \otimes \omega_j)\pi) = \varphi_2((\omega_{\pi^{-1}(i)} \otimes \omega_{\pi^{-1}(j)})) = \begin{cases} \omega_{\pi^{-1}(i)}, & \text{falls } i = j \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit ist φ_2 ein $k\mathcal{S}_{n-1}$ -Homomorphismus.

Zudem sei für $1 \leq i \leq n-1$ dann

$$\begin{aligned} \varphi_3 : M^{(n-2,1)} &\rightarrow D^{(n-1,1)} \downarrow_{\mathcal{S}_{n-1}} \\ b_i &\mapsto b_i + \langle b_n \rangle, & \text{falls } i \neq n-1 \\ b_{n-1} &\mapsto 0 + \langle b_n \rangle \end{aligned}$$

der kanonische Epimorphismus. Da σ ein $k\mathcal{S}_{n-1}$ -Homomorphismus ist, ist damit auch φ_3 ein $k\mathcal{S}_{n-1}$ -Homomorphismus. Insgesamt ist dann:

$$\varphi := \varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1 \in \text{Hom}_{k\mathcal{S}_{n-1}}(D^{(n-1,1)} \otimes^2 \downarrow_{\mathcal{S}_{n-1}}, D^{(n-2,1)} \downarrow_{\mathcal{S}_{n-1}}).$$

Mit $i \in \{1, \dots, n-1\}$ und

$$v_i := \begin{cases} (b_1 + b_3 + \dots + b_{i-1}) + (b_{i+2} + \dots + b_{n-2}), & \text{falls } i \text{ gerade} \\ (b_1 + b_3 + \dots + b_{i-2}) + (b_i + b_{i+1}) + (b_{i+3} + \dots + b_{n-2}), & \text{falls } i \text{ ungerade} \end{cases}$$

ist

$$\omega_{i+1} = b_{n-1} + v_i.$$

Für $i, j \in \{1, \dots, n-2\}$ ist

$$\varphi((b_i + \langle b_n \rangle) \otimes (b_j + \langle b_n \rangle)) = \varphi((b_j + \langle b_n \rangle) \otimes (b_i + \langle b_n \rangle)).$$

Im Folgenden sei also $i \leq j$. Damit gilt:

$$\varphi((b_i + \langle b_n \rangle) \otimes (b_j + \langle b_n \rangle)) = \varphi_3(\varphi_2((\omega_i + \omega_{i+1}) \otimes (\omega_j + \omega_{j+1}))) = \begin{cases} 0 + \langle b_n \rangle, & \text{falls } i+2 \leq j \\ b_i + \langle b_n \rangle, & \text{falls } i = j \\ v_i + \langle b_n \rangle, & \text{falls } i+1 = j. \end{cases} \quad (3.10)$$

Es sei weiter $\pi = (n-1, n) \in \mathcal{S}_n \setminus \mathcal{S}_{n-1}$. Dann gilt

$$b_{n-2}\pi = (\omega_{n-2} + \omega_{n-1})\pi = \omega_{n-2} + \omega_n = b_n + v_{n-3}.$$

Damit ist dann

$$(b_i + \langle b_n \rangle)\pi = \begin{cases} b_i + \langle b_n \rangle, & \text{für } 1 \leq i \leq n-3 \\ v_{n-3} + \langle b_n \rangle, & \text{für } i = n-2 \end{cases}$$

in $D^{(n-1,1)}$. Mit (3.10) folgt dann:

$$\varphi((b_{n-3} + \langle b_n \rangle) \otimes (b_{n-2} + \langle b_n \rangle))\pi = (v_{n-3} + \langle b_n \rangle)\pi = b_{n-2} + \langle b_n \rangle$$

Da $v_{n-3} = b_1 + b_3 + \dots + b_{n-3} + b_{n-2}$ ist gilt andererseits:

$$\begin{aligned} \varphi(((b_{n-3} + \langle b_n \rangle) \otimes (b_{n-2} + \langle b_n \rangle))\pi) &= \varphi((b_{n-3} + \langle b_n \rangle) \otimes (v_{n-3} + \langle b_n \rangle)) \\ &= \varphi(((b_{n-3} + \langle b_n \rangle) \otimes ((b_1 + b_3 + \dots + b_{n-3} + b_{n-2}) + \langle b_n \rangle))) \\ &= (b_{n-3} + \langle b_n \rangle) + (v_{n-3} + \langle b_n \rangle) \\ &= (b_{n-3} + v_{n-3}) + \langle b_n \rangle. \end{aligned}$$

Dabei folgt die dritte Gleichung mit (3.10).

Weil $6 \leq n$ ist $b_{n-2} + b_{n-3} + v_{n-3} = b_1 + \dots + b_{n-5} \notin \langle b_n \rangle$. Damit folgt nun

$$\varphi((b_{n-3} + \langle b_n \rangle) \otimes (b_{n-2} + \langle b_n \rangle))\pi \neq \varphi((b_{n-3} + \langle b_n \rangle) \otimes (b_{n-2} + \langle b_n \rangle))\pi.$$

Somit ist φ kein $k\mathcal{S}_n$ -Homomorphismus. □

3.4.12 Korollar

Es sei $6 \leq n$ und n gerade. Dann ist $D^{(n-1,1)} \otimes^2$ unzerlegbar.

Beweis:

Nach Lemma 3.3.15 gilt

$$D^{(n-1,1)} \downarrow_{\mathcal{S}_{n-1}} \cong D^{(n-2,1)}.$$

Weiter gilt dann mit Satz 3.4.8, dass $D^{(n-1,1)}$ ein direkter Summand von $D^{(n-1,1)} \otimes^2$ ist oder dass $D^{(n-1,1)} \otimes^2$ unzerlegbar ist. Mit Lemma 3.4.11 ist

$$\dim_k(\text{Hom}_{k\mathcal{S}_n}(D^{(n-1,1)} \otimes^2, D^{(n-1,1)})) = 0.$$

Damit ist $D^{(n-1,1)} \otimes^2$ kein direkter Summand. Somit ist das Produkt unzerlegbar. \square

Wie die direkten unzerlegbaren Summanden genauer aufgebaut sind, kann im Rahmen dieser Arbeit nicht ermittelt werden. Aber es gibt eine Vermutung über die genauere Struktur dieser Moduln. Diese Vermutung wurde von Dr. Jürgen Müller bewiesen.

3.4.13 Vermutung

Es sei $p = 2$ und $5 \leq n$. Dann gibt es vier verschiedene Fälle für die Zerlegung des Produktes $D^{(n-1,1)} \otimes^2$. Von den unzerlegbaren Summanden des Produktes werden jeweils die Köpfe der Radikalreihe von oben nach unten angegeben.

Fall $n \equiv 0 \pmod{4}$

$$D^{(n-1,1)} \otimes^2 \cong \begin{array}{c} D^{(n)} \oplus D^{(n-2,2)} \\ D^{(n)} \oplus D^{(n-1,1)} \\ D^{(n-2,2)} \end{array}$$

Fall $n \equiv 1 \pmod{4}$

$$D^{(n-1,1)} \otimes^2 \cong D^{(n-1,1)} \oplus Y^{(n-2,1^2)}$$

und $Y^{(n-2,1^2)}$ hat die Radikalreihe

$$\begin{array}{c} D^{(n)} \\ D^{(n-2,2)} \\ D^{(n)} \\ D^{(n)} \\ D^{(n-2,2)} \\ D^{(n)}. \end{array}$$

Fall $n \equiv 2 \pmod{4}$

$$D^{(n-1,1)} \otimes^2 \cong \begin{array}{c} D^{(n)} \\ D^{(n-2,2)} \\ D^{(n)} \\ D^{(n-1,1)} \\ D^{(n)} \\ D^{(n-2,2)} \\ D^{(n)} \end{array}$$

Fall $n \equiv 3 \pmod{4}$

$$D^{(n-1,1)} \otimes^2 \cong D^{(n-1,1)} \oplus Y^{(n-2,1^2)}$$

und $Y^{(n-2,1^2)}$ hat die Radikalreihe

$$\begin{array}{c} D^{(n)} \oplus D^{(n-2,2)} \\ D^{(n)} \oplus D^{(n-2,2)}. \end{array}$$

\square

Diese Vermutung stützt sich auf Berechnung der Fälle bis $n = 70$. Bis dahin einschließlich wurde immer das in der Vermutung formulierte Ergebnis beobachtet. Die Sonderfälle n gleich drei und vier werden einzeln angegeben.

3.4.14 Bemerkung

Im Fall $n = 3$ sieht das Produkt wie folgt aus:

$$D^{(2,1)} \otimes^2 \cong D^{(2,1)} \oplus \begin{array}{c} D^{(3)} \\ D^{(3)} \end{array}$$

Ist $n = 4$ dann hat das Produkt die folgende Gestalt:

$$D^{(3,1)} \otimes^2 \cong D^{(3,1)} \oplus \begin{array}{c} D^{(4)} \\ D^{(4)} \end{array}$$

□

Kapitel 4

Angewandte Methoden und Probleme

Um die praktischen Probleme und Schwierigkeiten, die bei der Berechnung der Zerlegungen aufgetreten sind, erklären zu können, wird hier der theoretische Hintergrund zur Zerlegung eines Moduls mit der `MeatAxe` kurz erläutert. Dies geschieht im ersten Abschnitt. Die Hilfsmittel, mit denen diese Schwierigkeiten umgangen werden konnten, bilden den Schluß des Kapitels.

Im zweiten Abschnitt wird die Methode der Fixpunktcondensation vorgestellt. Dieses Werkzeug ermöglicht es, auch größere Moduln in den Griff zu bekommen, die sonst jenseits der Berechenbarkeit liegen. Leider hat die gewonnene Berechenbarkeit auch ihren Preis, der weitere Arbeit erfordert.

In dem ganzen Kapitel sei A eine k -Algebra und alle A -Moduln seien A -Rechtsmoduln und endlich erzeugt.

4.1 Zerlegung von Moduln

Dieser Abschnitt der Arbeit beschäftigt sich mit der Zerlegung eines Moduls in unzerlegbare Summanden. In Kapitel 4 in [21] gibt Szöke eine Methode an, wie man die Zerlegung eines Moduls berechnen kann. Diese Methode ist von Szöke in dem `MeatAxe`-Programm `decomp`, welches für die Berechnungen der Beispiele dieser Arbeit genutzt wurde, implementiert worden. Die Grundidee dieser Methode wird hier kurz vorgestellt.

Erfüllt ein Modul den Satz von Krull-Schmidt, so besitzt er eine bis auf Isomorphie eindeutige Zerlegung in unzerlegbare Summanden. Möchte man nun einen solchen Modul M konkret zerlegen, so stellt sich die Frage, wie man dies machen kann. Theoretisch braucht man dafür nur die Zerlegung der Identität von $\mathcal{E} := \text{End}_A(M)$ in orthogonale, primitive Idempotente. Es ist aber nicht einfach, eine solche Zerlegung der Identität oder überhaupt ein primitives Idempotent zu finden. Es wird hier nun vorgestellt, wie man mit Hilfe des Endomorphismenrings von M eine Zerlegung bestimmen kann. Zunächst wird noch einmal der Zusammenhang zwischen der Zerlegung eines Moduls und der Zerlegung der Identität von \mathcal{E} aufgeführt.

4.1.1 Satz

Es sei M ein A -Modul und $\mathcal{E} := \text{End}_A(M)$. Dann gilt:

1. Ist $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_r$ eine Zerlegung von M , dann sind die entsprechenden kanonischen Projektionen $\pi_i : M \rightarrow M_i$ orthogonale Idempotente und man erhält eine Zerlegung der Identität von \mathcal{E} :

$$1_{\mathcal{E}} = \pi_1 + \dots + \pi_r.$$

2. Ist andererseits $1_{\mathcal{E}} = \pi_1 + \dots + \pi_r$ eine Zerlegung der Identität von \mathcal{E} in orthogonale Idempotente, so hat M eine Zerlegung

$$M = M_1 \oplus \dots \oplus M_r$$

mit $M_i := M\pi_i$ für $1 \leq i \leq r$. Weiter entspricht π_i genau der kanonischen Projektion von M_i für alle i .

3. Ein Summand M_i von M ist unzerlegbar genau dann, wenn die zugehörige Projektion π_i primitiv ist. Damit hat man eine Eins-zu-Eins-Korrespondenz zwischen den unzerlegbaren Summanden von M mit der Zerlegung von $1_{\mathcal{E}}$ in orthogonale, primitive Idempotente.

Beweis:

Siehe Satz (4.1.2) in [21].

□

Die Grundidee, die nun vorgestellt wird, um die Zerlegung eines Moduls M zu erhalten, ist eine Zerlegung des Kopfes des linksregulären Moduls ${}_{\mathcal{E}}\mathcal{E}$ zu bestimmen. Mit dieser Zerlegung kann man dann Elemente aus \mathcal{E} finden, mit denen man den Modul M zerlegen kann. Das **MeatAxe**-Programm `decomp`, welches Zerlegungen von Moduln berechnet, benutzt diese Methode (man vergleiche Abschnitt (4.3) in [21]). Zunächst ein sehr technisch anmutendes Lemma.

4.1.2 Lemma

Es sei M ein A -Modul und $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_r$ eine Zerlegung von M in unzerlegbare Summanden, weiter seien $\pi_i \in \mathcal{E}$ die kanonischen Projektionen, für $1 \leq i \leq r$. Es sei $J(\mathcal{E})$ das Jacobson-Radikal von \mathcal{E} und $\bar{\mathcal{E}} := \mathcal{E}/J(\mathcal{E})$, mit $\bar{\sigma}$ wird die Restklasse von $\sigma \in \mathcal{E}$ bezeichnet. Es sei $1 \leq i \leq r$ fest gewählt und es seien $e_{i,1}, \dots, e_{i,d_i} \in \mathcal{E}$ mit der Eigenschaft, dass $\bar{e}_{i,1}, \dots, \bar{e}_{i,d_i}$ eine Basis von $\bar{\mathcal{E}}\pi_i$ ist. Dann existiert ein j_i so, dass e_{i,j_i} nicht nilpotent ist.

Weiter sei n_i so gewählt, dass $\{0\} \neq \text{Kern}(e_{i,j_i}^{n_i}) = \text{Kern}(e_{i,j_i}^{n_i+1})$ ist. Setze $\varepsilon_i := e_{i,j_i}^{n_i}$. Dann gilt:

$${}_{\mathcal{E}}\mathcal{E} = \mathcal{E}\varepsilon_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{E}\varepsilon_r.$$

Beweis:

Siehe Lemma (4.2.2) und Lemma (4.2.3) in [21]. □

Mit den im vorangegangenen Lemma gewonnenen Elementen kann man nun eine Zerlegung des Moduls angeben.

4.1.3 Satz

Mit den Voraussetzungen und Notationen aus 4.1.2 gilt:

$$M = M\varepsilon_1 \oplus \dots \oplus M\varepsilon_r$$

ist eine Zerlegung von M in unzerlegbare Moduln.

Beweis:

Siehe Satz (4.2.5) in [21]. □

Um einen Modul mit `decomp` zu zerlegen, muss man vorher den Endomorphismenring mit `mkhom` und den Kopf der linksregulären Darstellung des Endomorphismenrings mit `rad` berechnen. Weiterführende Informationen zu Zerlegungen von Moduln und den Algorithmen beziehungsweise den Implementierungen von `mkhom` und `decomp` entnehme man [21].

4.2 Kondensation

Im folgenden Abschnitt sei k ein Körper und A eine endlich-dimensionale k -Algebra. Ein wichtiges Hilfsmittel für den praktischen Teil der Arbeit ist die Kondensation. Mit ihr ist es im Idealfall möglich, sämtliche Informationen über Moduln einer Algebra A aus den Moduln einer Unter algebra zu bekommen. Die grundlegende Idee besteht darin, mit einem Idempotent e aus A von der Kategorie der A -Moduln in die Kategorie der eAe -Moduln zu wechseln. Bei einer geeigneten Wahl des Idempotents e kann man somit die Zerlegung und die Kompositionsfaktoren von Moduln bestimmen, für die die verfügbaren Rechenkapazitäten sonst nicht ausreichen.

In diesem Abschnitt werden einige Grundideen der Kondensation aufgeführt sowie auf die dabei auftretenden Probleme aufmerksam gemacht. Weiter- und tiefergehende Informationen zur Kondensation von Moduln und insbesondere zur Kondensation von Tensorprodukten entnehme man [19]. Für den ganzen Abschnitt sei $e \in A$ ein Idempotent und \mathcal{M}_A die Kategorie der A -Rechtsmoduln.

4.2.1 Definition und Bemerkung

Die Teilalgebra eAe von A heißt die zu e gehörende *kondensierte Algebra*. Der *Kondensationsfunkt*or cond_{eAe}^A ist definiert durch:

$$\begin{aligned} \text{cond}_{eAe}^A : \mathcal{M}_A &\rightarrow \mathcal{M}_{eAe}, \\ M &\mapsto Me, && \text{für } M \in \mathcal{M}_A \\ \varphi &\mapsto \varphi|_{Me}, && \text{für } \varphi \in \text{Hom}_A(M, N). \end{aligned}$$

Der aus M resultierende eAe -Modul Me heißt der *kondensierte Modul von M* . Der Funktor cond_{eAe}^A ist exakt. Deshalb ist der Quotient zweier kondensierter Moduln isomorph zum kondensierten des Quotienten.

Beweis:

Man vergleiche Kapitel II Lemma (2.7) in [19]. □

Die Elemente eines kondensierten Moduls kann man wie folgt charakterisieren.

4.2.2 Bemerkung

Es sei M ein A -Modul. Dann ist $Me = \{m \in M \mid me = m\}$.

Beweis:

Es sei $m \in Me$, es ist also $m = m'e$ für ein $m' \in M$. Damit gilt

$$me = (m'e)e = m'e = m.$$

Umgekehrt ist klar, dass $\{m \in M \mid m = me\}$ in Me enthalten ist. □

Um später die Dimension eines kondensierten Moduls zu berechnen, wird folgende Bemerkung gebraucht.

4.2.3 Bemerkung

Für einen A -Modul M gilt:

$$Me \cong \text{Hom}_A(eA, M)$$

als Vektorräume.

Beweis:

Man definiert zwei k -lineare Abbildungen

$$f : \begin{array}{l} Me \rightarrow \text{Hom}_A(eA, M), \\ ve \mapsto (ea \mapsto vea) \end{array} \quad \text{und} \quad g : \begin{array}{l} \text{Hom}_A(eA, M) \rightarrow Me, \\ \varphi \mapsto \varphi(e). \end{array}$$

Es ist somit $g \circ f = \text{id}_{Me}$ und $f \circ g = \text{id}_{\text{Hom}_A(eA, M)}$. □

4.2.4 Bemerkung

Ist M ein einfacher A -Modul, dann ist $Me = \{0\}$ oder Me ist einfach.

Beweis:

Ist $Me \neq \{0\}$, so gilt für ein $0 \neq m \in Me$ mit Bemerkung 4.2.2 dann

$$m(eAe) = (me)Ae = mAe = Me.$$

□

4.2.5 Lemma

Der Funktor cond_{eAe}^A bildet Kompositionsreihen von A -Moduln auf Kompositionsreihen von eAe -Moduln ab.

Beweis:

Man vergleiche Kapitel II, Korollar (2.9) in [19]. □

Von Interesse bei dieser Arbeit ist der Umkehrschluss von kondensierten Moduln auf die ursprünglichen Moduln. Dabei sind gewisse Idempotente sehr hilfreich.

4.2.6 Definition

Ein Idempotent $e \in A$ heißt *treu*, falls $Me \neq \{0\}$ ist für alle einfachen A -Moduln M . □

4.2.7 Lemma

Es sei $e \in A$ ein treues Idempotent, dann gilt:

Ist $\{M_1, \dots, M_n\}$ ein vollständiges Repräsentantensystem einfacher A -Moduln, dann ist $\{M_1e, \dots, M_n e\}$ ein vollständiges Repräsentantensystem einfacher eAe -Moduln. Sind weiter M und M' einfache A -Moduln, so ist $Me \cong M'e$ genau dann, wenn $M \cong M'$ ist.

Beweis:

Dieses folgt aus Kapitel II, Korollar (2.14) in [19]. □

Mit diesem Lemma kann man nun von den Kompositionsfaktoren des kondensierten Moduls auf die Kompositionsfaktoren des ursprünglichen Moduls, bei Verwendung eines treuen Idempotens, schließen. Für den Rest des Abschnitts sei $A = kG$, wobei G eine endliche Gruppe und k ein Körper mit $\text{char}(k) = p$ sei. In diesem Fall kann man einer Untergruppe von G ein Idempotent zuordnen, nämlich das zur trivialen Darstellung von H gehörende Idempotent.

4.2.8 Definition

Es sei $H \leq G$ mit $p \nmid |H|$. Man definiert nun das Idempotent

$$e := e_H := \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} h.$$

Man nennt H eine *Kondensationsgruppe* und e das *triviale Idempotent* (zu H) von kG . □

Bis zum Ende dieses Abschnitts, sei $H \leq G$ mit $p \nmid |H|$ und e das triviale Idempotent zu H von kG . Der Hauptgrund, warum Kondensation in dieser Arbeit genutzt wird, ist, dass man Moduln untersuchen möchte, die zu groß sind, um sie mit dem Rechner zu behandeln. Mit Hilfe von Kondensation werden diese verkleinert.

Mittels Charakteren kann man vorab die Dimension eines kondensierten Moduls berechnen und entscheiden, ob die Kondensationsgruppe passend gewählt ist, also ob der kondensierte Modul auch nicht zu groß ist. Zudem ist es besonders nützlich, erfahren, ob einfache Moduln bei der Kondensation verschwinden oder nicht, also zu entscheiden, ob das zur gewählten Untergruppe gehörende Idempotent treu ist.

4.2.9 Lemma

Es sei M ein kG -Modul und k ein Zerfällungskörper für kH . Dann gilt

$$\dim_k(Me) = (1_H, \varphi_M \downarrow_H)_H.$$

Hierbei ist φ_M der von M bewirkte Brauercharakter und $(\cdot, \cdot)_H$ das gewöhnliche Skalarprodukt auf $\text{Irr}(H)$ ist.

Beweis:

Nach Bemerkung 4.2.3 gilt $Me \cong \text{Hom}_{kG}(ekG, M)$. Es ist

$$ekG \cong 1_{kH} \otimes_{kH} kG = 1_{kH} \uparrow^G.$$

Mit der Frobenius-Reziprozität (siehe Satz 10.8 in [4]) folgen dann die Isomorphismen der Vektorräume:

$$Me \cong \text{Hom}_{kG}(ekG, M) \cong \text{Hom}_{kG}(1_{kH} \uparrow^G, M) \cong \text{Hom}_{kH}(1_{kH}, M \downarrow_H)$$

Da $\text{char}(k) \nmid |H|$ ist, liegt der halbeinfache Fall vor. Damit ist $\varphi_M \downarrow_H$ ein gewöhnlicher Charakter. Insgesamt folgt

$$\dim_k(Me) = \dim_k(\text{Hom}_{kH}(1_{kH}, M \downarrow_{kH})) = (1_H, \varphi_M \downarrow_H)_H.$$

□

Die Hauptschwierigkeit bei der Anwendung von Kondensation liegt nun darin, Erzeuger für die kondensierte Algebra eAe zu finden, und zwar so, dass die Erzeugermenge möglichst klein ist, damit die Rechnungen auch möglich sind und nicht alle Speicherkapazitäten sprengen. Während es für die Gruppenalgebra kG einfach ist, ein minimales Erzeugendensystem anzugeben –es reichen Erzeuger der Gruppe G aus– so ist es für die kondensierte Algebra schwieriger. In den meisten Fällen erzeugen die kondensierten Erzeuger der Algebra nicht die ganze kondensierte Algebra, sondern nur eine Unter algebra. Dieses Problem wird allgemein als *Erzeugnisproblem* bezeichnet. Hat man nämlich nur ein Erzeugendensystem für eine echte Unter algebra von eAe , so können bei der Betrachtung eines kondensierten Moduls Me Informationen verloren gehen, so dass man nicht ganz auf den Modul M zurückschließen kann. Im letzten Teil dieses Abschnitts wird ein Kriterium angegeben, mit dem man überprüfen kann, ob eine Menge von Elementen der kondensierten Algebra diese auch erzeugt. Zunächst wird ein Erzeugendensystem von $ekGe$ angegeben.

4.2.10 Definition

Für $X \subseteq kG$ sei $eXe := \{exe \mid x \in X\}$. □

4.2.11 Lemma

Es sei $\Omega \subseteq G$ ein Vertretersystem der $H \backslash G / H$ -Doppelnebenklassen. Dann ist $e\Omega e$ eine k -Basis von $ekGe$.

Beweis:

Die Behauptung folgt mit Satz (2.3) aus Kapitel IV in [19]. □

Das in Lemma 4.2.11 angegebene Erzeugendensystem ist aber im allgemeinen viel zu groß, um von praktischem Nutzen zu sein.

Zum Beispiel wurde in dieser Arbeit für $\mathbb{F}_2\mathcal{S}_8$ als Kondensationsgruppe $H = \langle (1, 2, 3)(4, 5, 6) \rangle$ genutzt. Mit Lemma 4.2.11 erhält man nun ein Erzeugendensystem mit 4496 Elementen. Diese Größe erschwert oder verhindert sogar eine rechnerische Behandlung. Doch mit Hilfe des folgenden Lemmas konnte in diesem Fall ein Erzeugendensystem mit 4 Elementen gefunden werden.

4.2.12 Lemma

Es sei $\mathcal{E} \subseteq ekGe$ und $\langle \mathcal{E} \rangle$ das k -Algebren erzeugnis von \mathcal{E} . Existiert ein $0 \neq v \in 1_{kH} \leq 1_{kH} \uparrow^G e$ mit $v \langle \mathcal{E} \rangle = 1_{kH} \uparrow^G e$, dann ist $\langle \mathcal{E} \rangle = ekGe$.

Beweis:

Man vergleiche Kapitel IV, Korollar (5.11) in [19]. □

Um nun Erzeuger zu finden, wurde in dieser Arbeit die Methode des „Im Trüben Fischen“ angewandt. Das heißt, es wurden zufällig Elemente der Gruppenalgebra generiert. Dann wurde nachgeprüft, ob diese Elemente die Bedingung von Lemma 4.2.12 erfüllen. Somit konnten relativ kleine Erzeugendensysteme bestimmt werden. Im allgemeinen ist diese Methode, um Erzeuger zu finden, nicht handlich, da die Dimension des kondensierten Permutationsmoduls $1_H \uparrow^G e$ nicht zu groß werden darf.

4.3 Probleme und Kniffe

In diesem letzten Teil des Kapitels wird noch auf rechnerische Probleme aufmerksam gemacht, die bei den Berechnungen auftraten. Weiterhin werden die Methoden vorgestellt, mit denen diese Probleme gelöst werden. Welche Methode bei welchem Fall angewandt worden ist, ist in Abschnitt 4.4 festgehalten. In diesem Abschnitt sei k ein endlicher Körper, G eine endliche Gruppe und $A = kG$.

Eine Schwierigkeit bei der Kondensation besteht darin, treue Kondensationsgruppen zu finden. In einigen Fällen ist dies nicht gelungen. Es konnten aber immer „fast“ treue Idempotente gefunden werden.

4.3.1 Definition

Es sei B ein Block von G . Dann heißt ein Idempotent $e \in A$ *treu auf B* , falls $Ve \neq \{0\}$ ist für alle einfache Moduln, die im Block B liegen. Ist weiter M ein Modul und $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_n$ eine Zerlegung von M in unzerlegbare Moduln, dann seinen

$$M_B := \bigoplus_{i, M_i \text{ liegt in } B} M_i \text{ und } M_{B'} := \bigoplus_{i, M_i \text{ liegt nicht in } B} M_i.$$

Damit ist $M = M_B \oplus M_{B'}$. □

Es konnten aber immer Gruppen gefunden werden, die jeweils treu auf einem Block sind. Ist e ein Idempotent, das treu auf B ist, so kann man von einem Modul M den kondensierten Modul $M_B e$ betrachten. Somit kann man auch mit nichttreuer Kondensation Informationen über M erhalten, falls man insgesamt für jeden Block ein treues Idempotent findet.

Ein weiteres Problem war, dass manchmal die Zerlegungen auch von kondensierten Moduln nicht berechnet werden konnten. Um das Programm `decomp` zu benutzen, welches die Zerlegung berechnet, muss der Endomorphismenring des zu zerlegenden Moduls vorliegen (vgl. dazu Abschnitt 4.1). Der Endomorphismenring wird mit dem Programm `mkhom` berechnet. Bei einigen kondensierten Produkten brach `mkhom` ab, da wegen ihrer Größe zuviel Speicher (> 2 GB) benötigt wurde. Ein anderes Problem war, dass in einigen Fällen nicht alle Peakwörter der linksregulären Darstellung des Endomorphismenrings des Moduls berechnet wurden. Die aufgetretene Problematik mit den Peakwörtern wird im Folgenden etwas näher erläutert. Zuerst wird erklärt, was überhaupt ein Peakwort ist.

4.3.2 Definition

Es seien S_1, \dots, S_r eine Menge von paarweise nicht isomorphen einfachen A -Moduln. Weiter sei $D_i := \text{End}_A(S_i)$, für $1 \leq i \leq r$. Ein Element $w_i \in A$ heißt *Peakwort von A zu S_i relativ zu S_1, \dots, S_r* , falls es die folgenden Bedingungen erfüllt:

- $\text{Kern}_{S_j}(w_i) = \{0\}$ für alle $j \neq i$ und $1 \leq j \leq r$,
- $\dim_k(\text{Kern}_{S_j}(w_i)) = \dim_k(D_i)$ und
- $\text{Kern}_{S_j}(w_i) = \text{Kern}_{S_j}(w_i^2)$.

Wobei mit $\text{Kern}_{S_i}(w_i)$ der Kern der linearen Abbildung

$$\begin{aligned} S_i &\rightarrow S_i \\ s &\mapsto sw_i \end{aligned}$$

bezeichnet wird. □

Um die Zerlegung eines Moduls M mit `decomp` zu berechnen, benötigt man den Kopf der linksregulären Darstellung des Endomorphismenrings des Moduls ${}_{\mathcal{E}}\mathcal{E}$ (man vergleiche Abschnitt 4.1). Das Programm `rad`, welches die Radikalreihe eines Moduls berechnet, braucht Peakwörter aller Kompositionsfaktoren des Moduls (vgl. Abschnitt (2.4) in [21]). Peakwörter werden mit dem Programm `pwkond` bestimmt. Dieses Programm geht folgendermaßen vor. Es generiert systematisch für jeden einfachen Konstituenten des Moduls Elemente der Algebra, sogenannte Worte, und untersucht, ob diese Elemente die Bedingungen aus Definition 4.3.2 erfüllen. Demnach schnell die Rechenzeit in die Höhe, falls der Modul viele nichtisomorphe einfache Konstituenten hat. Durch Aufteilen des Moduls M in kleinere direkte Summanden, konnte dieses Problem umgangen werden. Dadurch werden nämlich die auftretenden Endomorphismenringe kleiner. So wird die Berechnung der Peakwörter erleichtert.

Das Aufteilen eines Moduls wird mit Hilfe eines Endomorphismus realisiert, da in diesem Fall der Endomorphismenring vorliegt. Mit diesem Endomorphismus kann man gemäß dem Lemma von Fitting 1.4.3 eine direkte Zerlegung des Moduls in kleinere Moduln berechnen.

Für eine blockweise Zerlegung eines Moduls mit Hilfe seines Kopfes wird folgendes Lemma benutzt.

4.3.3 Lemma

Es sei M ein A -Modul mit $M = M' \oplus M''$ dann gilt:

$$\text{rad}(M) = \text{rad}(M') \oplus \text{rad}(M'').$$

Beweis:

Man vergleiche Seite 118, Aufgabe 11 in [4]. □

Falls nun der Endomorphismenring des Moduls nicht vorliegt aber man den Kopf des Moduls hat, so kann man den Modul auf eine andere Weise in kleinere Moduln zerlegen. Man zerlegt den Kopf blockweise und erhält dann mit Nakayamas Lemma 1.3.7 eine blockweise Zerlegung des Moduls. Dies wird im Folgenden näher erläutert.

Ist nun B ein Block von G , so hat man

$$M/\text{rad}(M) = (M/\text{rad}(M))_B \oplus (M/\text{rad}(M))_{B'}$$

und andererseits ist $M = M_B \oplus M_{B'}$. Mit Lemma 4.3.3 folgt dann

$$M/\text{rad}(M) = M_B/\text{rad}(M_B) \oplus M_{B'}/\text{rad}(M_{B'}).$$

Somit ist

$$(M/\text{rad}(M))_B = M_B/\text{rad}(M_B) \quad \text{und} \quad (M/\text{rad}(M))_{B'} = M_{B'}/\text{rad}(M_{B'}). \quad (4.1)$$

Das Programm `rad` berechnet, mit der Option `-H`, zu jedem einzelnen einfachen Summanden S des Kopfes von M Vektoren $\{v_1, \dots, v_n\}$, so dass $N = \langle v_i \mid 1 \leq i \leq n \rangle_A$ mit $S = N/\text{rad}(N)$ und $N \leq M$ ist. Fasst man nun die Vektoren von allen einfachen Summanden von $(M/\text{rad}(M))_B$, also alle Vektoren von $M/\text{rad}(M)$ die zu einfachen Summanden zum Block B gehören, zusammen, so kann man dann mit diesen Vektoren wegen Lemma 1.3.7 und (4.1) den Modul M_B erzeugen. Mit den übrigen Vektoren kann man dann $M_{B'}$ erzeugen. Das Programm `zsp` erzeugt mit den Vektoren die entsprechenden Moduln.

Die Zerlegung von Tensorprodukten, bei denen ein Faktor projektiv ist, gestaltet sich einfacher. Nach Lemma 1.10.6 ist das Tensorprodukt auch projektiv. In diesem Fall zerlegt sich das Produkt in PIMs. Hat man die gewöhnliche und die modulare Charaktertafel zur Verfügung, so kann man mit Hilfe der Zerlegungszahlen alle Charaktere der PIMs bestimmen. Mit dem GAP-Programm `Decomposition` kann man dann die Zerlegung des Produktes durch Zerlegung des Produktes der Charaktere in die Charaktere der PIMs bestimmen.

4.4 Angewandte Kondensation

In den folgenden Abschnitten, wird angegeben, in welchen Fällen Kondensation genutzt wurde, welche Kondensationsgruppe und welche Algebrenerezeuger für die kondensierte Algebra genutzt wurden. Weiter wird auch angegeben, welche genaueren Verfahren zur Berechnung der Zerlegung angewandt werden. Die genutzten `MeatAxe`-Programme zur Kondensation sind: `pwkond`, `precond` und `tcond`.

Die nun folgenden Bezeichnungen werden in diesem gesamten Abschnitt benutzt. Das kondensierte Tensorprodukt von $M \otimes N$, wird mit $\text{tk } M \otimes N$ bezeichnet. Als Erzeuger von \mathcal{S}_n werden standardmäßig $a := (1, 2)$ und $b := (1, 2, \dots, n)$ genutzt. Damit seien dann:

$$\begin{array}{ll}
 z1 := a & Z1 := a * b \\
 z2 := b & Z2 := b \\
 z3 := z1 * z2 & Z3 := Z1 * Z2 \\
 z0 := z3 * z2 & Z0 := Z3 * Z2 \\
 z4 := z3 * z0 & Z4 := Z3 * Z0 \\
 z5 := z3 * z4 & Z5 := Z3 * Z4 \\
 z6 := z3 * z5 & Z6 := Z3 * Z5 \\
 z7 := z4 * z5 & Z7 := Z4 * Z5 \\
 z8 := z3 * z6 & Z3 := Z3 * Z6 \\
 z9 := z7 * z0 & Z9 := Z7 * Z0 \\
 z11 := z4 * z0 & Z11 := Z4 * Z0 \\
 z10 := z11 * z5 & Z10 := Z11 * Z5
 \end{array}$$

4.4.1 $\mathbb{F}_2\mathcal{S}_8$

Es wird die Zerlegung des Produkt $64a \otimes 64a$ berechnet. Als treue Kondensationsgruppe wird die Gruppe $K := \langle (1, 2, 3)(6, 7, 8) \rangle$ der Ordnung 3 genommen. Das kondensierte Produkt hat Dimension 1368. Die genutzte Erzeugermenge von $e\mathbb{F}_2\mathcal{S}_8e$ ist $\{a, b, b^2aba, b^2abab^{-4}\}$. Die Dimensionen der kondensierten einfachen Moduln sind:

Einf. Moduln	1^+	$6a$	$8a$	$14a$	$40a$	$64a$
Dim. Kond.	1	2	4	4	12	20

4.4.2 $\mathbb{F}_3\mathcal{S}_8$

Es wird die Zerlegung von $90a \otimes 90a$ berechnet. Da $90a$ projektiv ist, kann man die Zerlegung mittels der Zerlegungsmatrix berechnen. Interessant war nur, wie die PIMs $135a$ und $135b$ aufgebaut sind, da diese bis dahin nicht aufgetreten waren. Als treue Kondensationsgruppe wird $K := \langle (1, 3, 4, 5, 6, 7, 8) \rangle$ genommen, die Dimension des kondensierten Moduls ist 1158. Erzeuger der kondensierten Algebra sind $\{z2, z10, z11\}$. Dies ergibt dann für die Dimensionen der kondensierten Einfachen:

Einf. Moduln	1^+	1^-	$7a$	$7b$	$13a$	$13b$	$21a$
Dim. Kond	1	1	1	1	1	1	3
Einf. Moduln	$21b$	$28a$	$28b$	$35a$	$35b$	$90a$	
Dim. Kond	3	4	4	5	5	12	

4.4.3 $\mathbb{F}_2\mathcal{S}_9$

Durch Kondensation wird die Zerlegung der fehlenden Produkte $40a \otimes 160a$, $48a \otimes 160a$, $78a \otimes 78a$, $78 \otimes 160a$ und $160a \otimes 160a$ bestimmt. Es werden zwei Wege eingeschlagen. Für die Produkte $40a \otimes 160a$, $48a \otimes 160a$ und $78a \otimes 78a$ wird die treue Kondensationsgruppe $K := \langle (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) \rangle$ und als Erzeuger der kondensierten Algebra die Menge $\{ab, ab^2, ab^2a^2b, ab^2a^2b, bab^2ab, b^2ab^2a^2b\}$ genommen. Die Dimensionen der kondensierten Moduln lauten dann:

Einf. Moduln	1^+	$8a$	$16a$	$26a$	$40a$	$48a$	$78a$	$160a$
Dim. Kond.	1	2	2	4	4	6	12	22

Die kondensierten Produkte haben die Dimensionen

	$\text{tk } 40a \otimes 160a$	$\text{tk } 48a \otimes 160a$	$\text{tk } 78a \otimes 78a$
Dim.	912	1098	870

Für $78a \otimes 160a$ und $160a \otimes 160a$ sind die mit K kondensierten Moduln noch zu groß. In beiden Fällen konnte der Endomorphismenring nicht berechnet werden. Da $\mathbb{F}_2\mathcal{S}_9$ nur zwei Blöcke hat, werden nun zwei Kondensationsgruppen genutzt. Beide sind nicht treu für $\mathbb{F}_2\mathcal{S}_9$, aber jeweils für einen Block. Das heißt, dass ein Block existiert, dessen zugehörigen einfachen Moduln bei der Kondensation nicht verschwinden. Die Gruppe $K_1 := \langle (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) \rangle$ kondensiert treu im Hauptblock. Als Erzeuger für die kondensierten Algebra werden $\{Z1, Z3, Z4, Z5, Z6, Z7, Z8, Z9\}$ genutzt. Damit erhält man die Dimensionen:

Einf. Moduln	1^+	$8a$	$16a$	$26a$	$40a$	$48a$	$78a$	$160a$
Dim. Kond. K_1	1	0	2	2	4	6	18	18
Block	1	2	1	1	1	2	1	2

Die Dimensionen von $\text{tk } 78a \otimes 160a$ ist 1388 und die Dimension von $\text{tk } 160a \otimes 160a$ ist 2846. Von $\text{tk } 160a \otimes 160a$ konnte der Endomorphismenring nicht berechnet werden, da zuviel Speicherplatz benötigt wird. Somit kann dann auch die Zerlegung auf diese Weise nicht berechnet werden.

Die Gruppe $K_2 := \langle (1, 2, 3), (4, 5, 6, 7, 8) \rangle$ kondensiert nicht treu im Hauptblock, aber dafür im anderen Block. Als Erzeuger der kondensierten Algebra dienen $\{Z3, Z6, Z7, Z10\}$. Man erhält die Dimensionen:

Einf. Moduln	1^+	$8a$	$16a$	$26a$	$40a$	$48a$	$78a$	$160a$
Dim. Kond. K_2	1	2	0	0	2	4	6	8
Block	1	2	1	1	1	2	1	2

Damit hat $\text{tk } 78a \otimes 160a$ die Dimension 816 und $\text{tk } 160a \otimes 160a$ die Dimension 1760. Von diesen kann die Zerlegung nun bestimmt werden.

Um die Zerlegung von $160a \otimes 160a$ zu bekommen, wird die zum Nicht-Hauptblock gehörende Komponente des kondensierten Moduls unkondensiert, mit dem Programm `zuk`. Dann wird damit eine Darstellung der zum Hauptblock gehörenden Komponente durch `zsp -q`, womit die Darstellung auf dem Quotienten bestimmt wird, berechnet. Diese Darstellung der zum Hauptblock gehörende Komponente wird dann mit K_1 kondensiert. Damit erhält man Modul der Dimension 1748. Die Zerlegung des Moduls konnte dann berechnet werden. Insgesamt bekommt man so die komplette Zerlegung von $160a \otimes 160a$.

4.4.4 $\mathbb{F}_3\mathcal{S}_9$

Hier fehlen die Zerlegungen der Produkte $35a \otimes 189a$, $41a \otimes 189a$ und $189a \otimes 189a$. Als treue Kondensationsgruppe wird hier $K := \langle (3, 4)(7, 8), (2, 5)(6, 9), (1, 2, 6, 9, 5) \rangle$, mit $|K| = 20$ und als Erzeuger der kondensierten Algebra $\{z1, z2, z4, Z8, (ab)^2bab^2(ab)^3b, (ab^2)^3b\}$ genutzt. Die Dimensionen der kondensierten Einfachen sind dann:

Einf. Moduln	1^+	1^-	$7a$	$7b$	$21a$	$21b$	$27a$	$27b$
Dim. Kond.	1	1	1	1	1	1	5	5
Block	1	1	1	1	1	1	2	3
Einf. Moduln	$35a$	$35b$	$41a$	$41b$	$162a$	$162b$	$189a$	$189b$
Dim. Kond.	1	1	3	3	8	8	5	5
Block	1	1	1	1	4	5	3	2

Die Dimensionen der kondensierten Produkte sind

	$\text{tk } 35a \otimes 189a$	$\text{tk } 41 \otimes 189a$	$\text{tk } 189a \otimes 189a$
Dim.	345	371	1825

Um die Zerlegung von $\text{tk } 189a \otimes 189a$ zu bestimmen, wird eine Zerlegung des Kopfes nach den Blöcken berechnet, da der Endomorphismenring nicht berechnet werden konnte.

Zuerst wird der Kopf mit dem Programm `rad -h` bestimmt. Durch Zusammenfassen aller Konstituenten des Kopfes, die nicht zum Hauptblock gehören, kann dann der Teil des Moduls berechnet werden, der nicht zum Hauptblock gehört. Dies geschieht mit `zct`. Mit `zsp` wird der entsprechende Modul erzeugt. Dieser Modul hat Dimension 889. Fasst man alle Konstituenten des Kopfes zum Hauptblock zusammen, so erhält man ein Modul der Dimension 936. Mit der Zerlegung dieser beiden Moduln gelangt man dann zur Gesamtzerlegung.

4.4.5 $\mathbb{F}_5\mathcal{S}_9$

Die Kondensationsgruppe ist $K := \langle (1, 8, 2)(3, 7, 6), (1, 8, 5, 2)(3, 7) \rangle$ der Ordnung 24. Allerdings ist K nicht treu. Bei der Kondensation mit K verschwindet nur $70a$.

Da $70a$ ein projektiver, einfacher Modul ist, kann seine Vielfachheit in den betrachteten Produkten mit Hilfe von GAP berechnet werden. Mit der Kondensation und den Informationen über $70a$ kann man dann die Zerlegungen angeben. Als Erzeuger der kondensierten Algebra dienen $z1, z11$. Man erhält die folgenden Dimensionen:

Einf. Moduln	1^+	1^-	$8a$	$8b$	$21a$	$21b$	$27a$	$27b$	$28a$
Dim. Kond.	1	1	3	3	1	1	4	4	3
Block	1	2	3	4	5	5	5	5	4
Einf. Moduln	$28b$	$34a$	$34b$	$56a$	$56b$	$70a$	$83a$	$83b$	$105a$
Dim. Kond.	3	2	2	1	1	0	5	5	5
Block	3	3	4	1	2	6	2	1	7
Einf. Modul	$105b$	$120a$	$120b$	$133a$	$133b$	$134a$	$134b$		
Dim. Kond.	5	4	4	3	3	6	6		
Block	8	9	10	1	2	3	4		

Die Dimensionen der kondensierten Produkte sind:

\otimes	$83a$	$133a$	$134a$
$56a$	-	318	309
$83a$	292	450	465
$133a$	-	759	738
$134a$	-	-	750

4.4.6 $\mathbb{F}_7\mathcal{S}_9$

In diesem Fall wird die treue Kondensationsgruppe $K := \langle (1, 2)(3, 7)(4, 8)(6, 9), (1, 4)(6, 9) \rangle$ der Ordnung 8 zur Kondensation genutzt. Erzeuger der kondensierten Algebra sind

$$\{z7, z8, z10, z11\}.$$

Die Dimensionen der Kondensierten lauten:

Einf. Moduln	1^+	1^-	$8a$	$8b$	$19a$	$19b$	$28a$	$28b$	$42a$	$42b$
Dim. Kond.	1	1	3	3	4	4	4	4	4	8
Einf. Moduln	$42c$	$47a$	$47b$	$56a$	$56b$	$70a$	$84a$	$84b$	$101a$	$101b$
Dim. Kond.	8	8	8	5	5	6	13	13	13	13
Einf. Modul	$105a$	$105b$	$115a$	$115b$	$168a$	$168b$	$189a$	$189b$		
Dim. Kond.	15	15	13	13	22	22	19	19		

Die Grade der Produkte sind:

\otimes	$101a$	$115a$
$47a$	-	674
$101a$	1285	1447
$115a$	-	1660

4.4.7 $\mathbb{F}_2\mathcal{S}_{10}$

Zur Kondensation wird hier die treue Kondensationsgruppe

$$K := \langle (2, 6, 3)(4, 7, 9), (1, 5, 8)(2, 6, 3)(4, 9, 7) \rangle$$

der Ordnung 9 benutzt. Als Erzeuger der kondensierten Algebra dienen $\{z11, Z4, Z11\}$. Die kondensierten einfachen Moduln haben folgende Dimensionen:

Einf. Moduln	1^+	$8a$	$16a$	$26a$	$48a$	$128a$	$160a$	$198a$	$200a$	$768a$
Dim. Kond.	1	2	4	2	6	20	16	18	20	84

Die Dimensionen der kondensierten Produkte sind:

\otimes	$128a$	$160a$	$198a$	$200a$
$16a$	-	-	336	344
$26a$	364	464	576	580
$48a$	684	852	1056	1068
$128a$	1864	2264	2784	2824
$160a$	-	2848	3528	3560
$198a$	-	-	4380	4416
$200a$	-	-	-	4456

Die Zerlegung von $\text{tk } 198a \otimes 198a$, $\text{tk } 198a \otimes 200a$ und $\text{tk } 200a \otimes 200a$ wird hier durch die Zerlegung des Kopfes nach den Blöcken gefunden, da auch in diesem Fall die Moduln zu groß sind um ihre Endomorphismenringen zu bestimmen. In diesen drei Fällen werden die Modul in dem zum Hauptblock gehörden Teil und den restlichen Teil zerlegt. Dazu wurde diegleiche Methode wie im Fall $160a \otimes 160a$ in $\mathbb{F}_2\mathcal{S}_9$ benutzt. Diese Moduln konnten dann ohne weiter Probleme zerlegt werden. Die Dimensionen davon sind in der folgenden Tabelle:

	$\text{tk } 198a \otimes 198a$	$\text{tk } 198a \otimes 200a$	$\text{tk } 200a \otimes 200a$
Hauptblock	3148	3100	3328
Rest	1232	1316	1128

4.4.8 $\mathbb{F}_3\mathcal{S}_{10}$

Es werden zwei Kondensationsgruppen verwendet. Hier tritt das Problem auf, dass das Programm `pwkond` nicht alle Peakwörter für die linksreguläre Darstellung des Endomorphismenring findet. Die Peakwörter werden zur Berechnung des Radikals der linksregulären Darstellung benötigt. Dies Problem konnte zu einem Teil durch die zweite Kondensationsgruppe gelöst werden und zum anderen Teil durch eine Zerlegung des Moduls nach dem Lemma von Fitting. Mit der zweiten Kondensationsgruppe werden die kondensierten Moduln kleiner; dies reicht für einen Teil der Produkte aus, um die Zerlegung, und insbesondere die Peakwörter zu berechnen. Durch die Zerlegung nach Fitting, bei geeigneter Wahl des Endomorphismus, kann die Berechnung der Peakwörter erleichtert werden, falls die beiden Teilmoduln aus der Fittingzerlegung jeweils weniger verschiedene Kompositionsfaktoren haben.

Die erste treue Kondensationsgruppe ist $K_1 := \langle (3, 7, 5, 6, 8), (1, 4)(3, 8, 5, 6) \rangle$ der Ordnung 20. Erzeuger der kondensierten Algebra sind z_2 und z_{10} .

Die zweite genutzte Gruppe ist $K_2 := \langle (1, 3, 4, 9)(2, 10, 7, 5), (1, 3, 4, 9)(2, 8, 10, 7) \rangle$ der Ordnung 40. Erzeuger sind $\{Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_{10}\}$. Die Grade der kondensierten Einfachen lauten dann:

Einf. Moduln	1^+	1^-	$9a$	$9b$	$34a$	$34b$	$36a$	$36b$	$41a$	$41b$	$84a$
Dim. Kond. K_1	1	1	4	4	6	6	6	6	2	2	4
Dim. Kond. K_2	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
Einf. Moduln	$84b$	$90a$	$90b$	$126a$	$126b$	$224a$	$224b$	$279a$	$279b$	$567a$	$567b$
Dim. Kond. K_1	4	7	7	1	1	7	7	13	13	27	27
Dim. Kond. K_2	2	5	5	1	1	3	3	7	7	11	11

K_1 wird für die folgenden Produkte genutzt:

\otimes	$90a$	$126a$	$224a$	$279a$
$34a$	-	-	340	490
$36a$	-	-	370	508
$41a$	-	-	440	596
$84a$	374	-	-	-
$90a$	459	517	953	1305
$126a$	-	-	1467	1723

Für die folgenden Produkte wird K_2 genutzt:

\otimes	$84a$	$126a$	$224a$	$279a$
$84a$	180	262	470	582
$126a$	-	433	-	-
$224a$	-	-	1293	1537
$279a$	-	-	-	1977

Bei $\text{tk } 84a \otimes 224a$, $\text{tk } 126a \otimes 126a$, $\text{tk } 224a \otimes 224a$ und $\text{tk } 279a \otimes 279a$ ergeben sich bei der Kondensation mit K_2 weiterhin Probleme bei der Zerlegung. Die Peakwörter der linksregulären Darstellung des Endomorphismenrings konnten nicht vollständig berechnet werden. Gemäß dem Lemma von Fitting wurden die kondensierten Produkte in zwei Untermoduln zerlegt.

Der Modul $\text{tk } 84a \otimes 224a$ wurde in zwei Untermoduln der Dimension 225 und 245 zerlegt. Die zwei Moduln der Zerlegung von $\text{tk } 126a \otimes 126a$ haben Dimension 73 bzw. 360. Der Modul $\text{tk } 224a \otimes 224a$ konnte in zwei Moduln der Dimensionen 424 und 869 zerlegt werden. Und $\text{tk } 279a \otimes 279a$ ist die direkte Summe zweier Moduln mit Dimension 263 und 1714. Diese Moduln konnten dann wie gewohnt in Unzerlegbare zerlegt werden.

4.4.9 $\mathbb{F}_5 \mathcal{S}_{10}$

Die genutzte Kondensationsgruppe ist $K := \langle (3, 9)(4, 6), (2, 10)(3, 4, 9, 6, 8, 7) \rangle$ der Ordnung 36. Erzeuger der kondensierten Algebra sind $\{z_3, z_4, z_7, z_8, z_9\}$. Die Dimensionen der kondensierten Einfachen sind:

Einf. Moduln	1^+	1^-	$8a$	$8b$	$28a$	$28b$	$34a$	$34b$	$35a$
Dim. Kond.	1	1	2	2	2	2	1	1	6
Block	1	1	1	1	1	1	1	1	2
Einf. Moduln	$35b$	$55a$	$55b$	$56a$	$56b$	$70a$	$75a$	$75b$	$155a$
Dim. Kond.	6	1	1	2	2	2	8	8	3
Block	3	2	3	1	1	1	4	5	3
Einf. Moduln	$155b$	$160a$	$160b$	$217a$	$217b$	$225a$	$225b$	$266a$	$300a$
Dim. Kond.	3	12	12	6	6	10	10	2	8
Block	2	3	2	1	1	6	7	1	8
Einf. Modul	$300b$	$350a$	$350b$	$450a$	$450b$	$525a$	$525b$		
Dim. Kond.	8	11	11	13	13	11	11		
Block	9	10	11	12	13	14	15		

Damit ergibt sich dann für die Dimensionen der kondensierten Produkte:

\otimes	$155a$	$160a$	$217a$	$266a$
$28a$	112	178	154	192
$34a$	153	140	217	224
$35a$	136	252	199	219
$55a$	251	226	350	400
$56a$	222	274	312	422
$70a$	274	308	392	540
$155a$	693	652	962	1146
$160a$	-	904	920	1112
$217a$	-	-	1347	1592
$266a$	-	-	-	2024

Bei den Produkten $\text{tk } 155a \otimes 155a$, $\text{tk } 155a \otimes 266a$ und $\text{tk } 266a \otimes 266a$ musste mit einer Zerlegung nach Fitting nachgeholfen werden, da in diesen drei Fällen nicht alle Peakwörter der linksregulären Darstellung des Endomorphismenrings gefunden wurden. Der Modul $\text{tk } 155a \otimes 155a$ wurde in Moduln mit Dimension 285 bzw. 408 zerlegt. Weiter kommt $\text{tk } 155a \otimes 266a$ in zwei Moduln der Dimensionen 634 und 512 zerlegt werden. Der Modul $\text{tk } 266 \otimes 266$ wurde in Moduln der Dimension 1417 und 607 zerlegt. Von diesen kleineren Moduln konnte dann jeweils die Zerlegung berechnet werden.

Anhang A

Ergebnisse

A.1 $h_p(\mathcal{S}_n)$

In diesem Abschnitt wird $h_p(\mathcal{S}_n)$ eingeführt, sowie die Ergebnisse für $h_p(\mathcal{S}_n)$ aus den Berechnungen angegeben. Es sei k ein Körper mit $\text{char}(k) = p > 0$ und weiter sei G eine endliche Gruppe mit $p \mid |G|$, insbesondere ist damit kG nicht halbeinfach.

A.1.1 Definition und Bemerkung

Mit $O_p(G)$ wird die maximale, normale p -Untergruppe von G bezeichnet. Weiter sei $\overline{G} := G/O_p(G)$. Damit definiere

$$h_p(G) := \min\{n > 0 \mid (k\overline{G}/J(\overline{G}))^{\otimes n} \text{ enthält } P(\varepsilon) \text{ als direkten Summanden}\},$$

wobei $J(\overline{G})$ das Jacobson-Radikal von $k\overline{G}$ ist und $P(\varepsilon)$ der PIM zum trivialen Modul von $k\overline{G}$ ist. Weiter ist $h_p(G)$ wohldefiniert und hängt nur von der Charakteristik von k ab.

Beweis:

Nach Lemma 1.10.5 hat $k\overline{G}$ den treuen Modul $M = S_1 \oplus \dots \oplus S_l$, wobei S_1, \dots, S_l die einfachen $k\overline{G}$ -Moduln sind. Dann folgt mit Satz 1.10.4, dass ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $P(\varepsilon)$ ein direkter Summand von $M^{\otimes n}$ ist. Also ist $h_p(G) \leq n$. Dass $h_p(G)$ nur von der Charakteristik von k abhängt, folgt aus der Bemerkung nach Korollar (4.2) in [3]. \square

A.1.2 Bemerkung

Ist $O_p(G) = \{1\}$, dann ist der PIM zum trivialen kG -Modul ein direkter Summand eines Tensorprodukts von $h_p(G)$ einfachen kG -Moduln. Für $5 \leq n$ ist dann insbesondere $O_p(\mathcal{S}_n) = \{1\}$, da A_n , die alternierende Gruppe auf n Punkten, einfach ist für $5 \leq n$.

Ist $O_p(G) \neq \{1\}$, dann muss ein PIM nicht ein direkter Summand von Tensorprodukten einfacher kG -Moduln sein. Dazu ein Beispiel.

Die Gruppenalgebra $\mathbb{F}_2\mathcal{S}_4$ hat zwei einfache Moduln $D^{(4)}$ und $D^{(3,1)}$ und zwei PIMs beide mit Dimension 8. Nach Berechnungen mit der **MeatAxe** gilt

$$D^{(3,1)\otimes 2} \cong D^{(3,1)} \oplus M$$

mit

$$M = \begin{matrix} D^{(4)} \\ D^{(4)} \end{matrix}$$

und

$$D^{(3,1)} \otimes M \cong D^{(3,1)} \oplus D^{(3,1)}.$$

Somit kommt kein PIM von $\mathbb{F}_2\mathcal{S}_4$ als Tensorprodukt einfacher Moduln vor. \square

Ab jetzt sei G eine Gruppe mit $O_p(G) = \{1\}$. Die folgenden Lemmata erleichtern die Bestimmung von $h_p(G)$.

A.1.3 Lemma

Ist $0 < m \in \mathbb{N}$ die kleinste Zahl, so dass ein Tensorprodukt von m einfachen kG -Moduln einen projektiven Summanden hat, dann ist $h_p(G) = m + 1$.

Beweis:

Siehe Korollar 3.11 in [3]. \square

A.1.4 Lemma

kG hat genau dann einen einfachen, projektiven Modul, wenn $h_p(G) = 2$.

Beweis:

Siehe Korollar 3.10 und Korollar 4.2 in [3]. □

Mit dem folgenden Satz kann man $h_p(\mathcal{S}_n)$ mit Hilfe alternierender Gruppe \mathcal{A}_n für $2 < p$ und $5 \leq n$ bestimmen.

A.1.5 Satz

Es sei N ein Normalteiler von G . Dann gilt:

- $h_p(N) \leq h_p(G)$
- Falls $p \nmid [G : N]$ ist $h_p(N) = h_p(G)$.

Beweis:

Siehe Satz 4.6 in [3]. □

A.1.6 Korollar

Es sei $5 \leq n$. Dann gilt:

$$1 < h_p(\mathcal{S}_n).$$

Ist weiter $5 \leq p$ so gilt:

$$h_p(\mathcal{S}_n) = 2.$$

Beweis:

Die erste Behauptung folgt aus Satz 4.4 in [3]. Nach Korollar 4.5 in [3] gilt $h_p(\mathcal{A}_n) \leq 2$. Mit Satz A.1.5 gilt $h_p(\mathcal{A}_n) = h_p(\mathcal{S}_n)$. Nun folgt die zweite Behauptung mit der ersten Behauptung. □

A.1.7 Bemerkung

Ist $5 \leq n$ und hat $k\mathcal{S}_n$ keinen projektiven, einfachen Modul, dann ist $3 \leq h_p(\mathcal{S}_n)$.

Beweis:

Dies folgt aus Lemma A.1.4 und Korollar A.1.6. □

Für $p = 2, 3$ und $2 \leq n \leq 13$ sind die Werte von $h_p(\mathcal{S}_n)$ in der folgenden Tabelle aufgelistet.

n	$h_2(\mathcal{S}_n)$	$h_3(\mathcal{S}_n)$
2	1	-
3	2	1
4	2	2
5	3	2
6	2	2
7	3	3
8	3	2
9	3	2
10	2	2
11	> 2	3
12	> 2	2
13	> 2	> 2

Für $11 \leq n \leq 13$ kann man der gewöhnlichen Charaktertafel entnehmen, ob $k\mathcal{S}_n$ einen projektiven, einfachen Modul hat oder nicht. Weiter ist im Fall $p = 3$ und $n = 11$ der PIM zum Modul $D^{(6,4,1)}$ ein direkter Summand des Produktes $D^{(9,2)} \otimes D^{(7,4)}$. Dies folgt aus Berechnungen mit der MeatAxe.

A.2 Legende und Bemerkungen

In folgendem Teil werden die berechneten Zerlegungen der Tensorprodukte einfacher Moduln von $\mathbb{F}_p\mathcal{S}_n$, wobei \mathbb{F}_p der Körper mit p Elementen ist, aufgeführt. Die Zerlegungen wurden komplett für $5 \leq n \leq 9$ mit $p \mid |\mathcal{S}_n|$ und für $n = 10$ mit $p = 2, 3, 5$ berechnet.

Die Ergebnisse sind in drei Tabellenarten aufgelistet. In der ersten stehen die einfachen Modul, deren Bezeichnungen sich aus der MeatAxe-Konvention, Dimension des Moduls plus einem Buchstaben, ergeben. Der triviale Modul, wird mit 1^+ und der Signumsmodul mit 1^- bezeichnet. Dabei steht noch die entsprechende Partition, darunter der Block und der p -Potenzanteil der Dimension. Ist der Modul zu einem anderen assoziiert, so wird das auch festgehalten. Der Block 1 bezeichnet immer den Hauptblock.

Zum Beispiel ist bei $\mathbb{F}_2\mathcal{S}_5$ der Modul $4a$ ein vierdimensionaler einfacher Modul. Die zugehörige Partition ist $(4,1)$, das heißt $4a \cong D^{(4,1)}$, weiter liegt der Modul in Block 2 und 2 ist der Potenzanteil der Dimension.

In der zweiten Tabellenart werden die unzerlegbaren, nichteinfachen Moduln, die in den Zerlegungen der Produkte vorkommen, festgehalten. Die Bezeichnung richtet sich auch hier nach der Dimension. Ist der Modulname unterstrichen, so heißt das, dass der Modul uniserial ist. Desweiteren wird noch der Sockel, das Radikal und die Loewylänge des Moduls und der p -Potenzanteil seiner Dimension angegeben. Weiter wird auch noch angegeben ob der Modul projektiv ist.

Zum Beispiel ist der Modul $16b$ im Fall $\mathbb{F}_2\mathcal{S}_6$ ein 16-dimensionaler Modul, der uniserial ist, als Sockel und Radikal den trivialen Modul, die Loewylänge 7 und 4 als 2-Potenz hat. Zudem ist er nicht projektiv.

Die Zerlegungen der Tensorprodukte stehen dann in der dritten Tabellenart. Die Spalten werden durch die unzerlegbaren Summanden indiziert. In den Zeilen stehen die Vielfachheiten der unzerlegbaren direkten Summanden eines Tensorprodukts. Zusätzlich ist die Blockzugehörigkeit der Summanden angegeben. Mit Lemma 1.10.7 kann man aus diesen Zerlegungen auch jeweils die Zerlegungen der assoziierten Produkte bestimmen. Aus diesem Grund wurden diese auch nicht berechnet.

Zum Beispiel ist im Fall $\mathbb{F}_3\mathcal{S}_6$ das Produkt $4a \otimes 4a \cong 1^+ \oplus 6a \oplus 9a$.

Falls eines der Tensorprodukte einfach, halbeinfach oder unzerlegbar ist, so wird dies in einer Bemerkung angegeben.

Das folgende Ergebnis folgt direkt aus der Betrachtung der errechneten Zerlegungen.

A.2.1 Bemerkung

Der Kopf und der Sockel eines unzerlegbaren Summanden eines Tensorprodukts zweier einfacher $k\mathcal{S}_n$ -Moduln müssen nicht isomorph sein.

Beweis:

Man betrachte das Tensorprodukt $16a \otimes 40a$ in $\mathbb{F}_2\mathcal{S}_9$ oder $128a \otimes 198a$ in $\mathbb{F}_2\mathcal{S}_{10}$. □

A.3 \mathcal{S}_5

A.3.1 $\mathbb{F}_2\mathcal{S}_5$

Einf. Moduln	1^+	$4a$	$4b$
Partition	(5)	(4,1)	(3,2)
Block	1	2	1
p -Ant.	0	2	2

Tabelle A.1: Einfache Moduln

M	p -Ant.	$M/\text{rad}(M)$	$\text{soc}(M)$	Loewyl.	projektiv
$\underline{8a}$	3	$4a$	$4a$	2	p
$\underline{8b}$	3	1^+	1^+	5	·
$\underline{12a}$	2	1^+	1^+	6	·
$\underline{16a}$	4	$4b$	$4b$	7	p

Tabelle A.2: Unzerlegbare Moduln

Bem.:

Unzerlegbares Produkt: $4a \otimes 4b$

\otimes	$4a$	$8a$	$8b$	$12a$	$16a$
Block	2	2	1	1	1
$4a \otimes 4a$	1	·	·	1	·
$4a \otimes 4b$	·	·	·	·	1
$4b \otimes 4b$	·	1	1	·	·

Tabelle A.3: Zerlegung der Tensorprodukte

A.3.2 $\mathbb{F}_3\mathcal{S}_5$

Einf. Moduln	1^+	1^-	$4a$	$4b \cong 1^- \otimes 4a$	$6a$
Partition	(5)	(3,2)	(4,1)	$(2^2,1)$	$(3,1^2)$
Block	1	2	2	1	3
p -Ant.	0	0	0	0	1

Tabelle A.4: Einfache Moduln

M	p -Ant.	$M/\text{rad}(M)$	$\text{soc}(M)$	Loewyl.	projektiv
$\underline{6b}$	1	1^+	1^+	3	p
$\underline{6c}$	1	1^-	1^-	3	p
$\underline{9a}$	2	$4a$	$4a$	3	p
$\underline{9b}$	2	$4b$	$4b$	3	p

Tabelle A.5: Unzerlegbaren Moduln

\otimes	1^+	$6a$	$6b$	$6c$	$9a$	$9b$
Block	1	3	1	2	2	1
$4a \otimes 4a$	1	1	·	·	1	·
$4a \otimes 6a$	·	1	·	·	1	1
$6a \otimes 6a$	·	1	1	1	1	1

Tabelle A.6: Zerlegung der Tensorprodukte

A.3.3 $\mathbb{F}_5\mathcal{S}_5$

Einf. Moduln	1^+	1^-	$3a$	$3b \cong 1^- \otimes 3a$	$5a$	$5b \cong 1^- \otimes 5a$
Partition	(5)	(2,1 ³)	(4,1)	(3,1 ²)	(3,2)	(2 ² ,1)
Block	1	1	1	1	2	3
p -Ant.	0	0	0	0	1	1

Tabelle A.7: Einfache Moduln

M	p -Ant.	$M/\text{rad}(M)$	$\text{soc}(M)$	Loewyl.	projektiv
$\underline{5c}$	1	1^+	1^+	3	p
$10a$	1	$3a$	$3a$	3	p
$10b$	1	$3b$	$3b$	3	p

Tabelle A.8: Unzerlegbare Moduln

Bem.:

Halbeinfaches Produkt: $3a \otimes 3a$

\otimes	1^+	$3b$	$5a$	$5b$	$5c$	$10a$	$10b$
Block	1	1	2	3	1	1	1
$3a \otimes 3a$	1	1	1	·	·	·	·
$3a \otimes 5a$	·	·	·	1	·	1	·
$5a \otimes 5a$	·	·	1	1	1	·	1

Tabelle A.9: Zerlegung der Tensorprodukte

A.4 \mathcal{S}_6

A.4.1 $\mathbb{F}_2\mathcal{S}_6$

Einf. Moduln	1^+	$4a$	$4b$	$16a$
Partition	(6)	(5,1)	(4,2)	(3,2,1)
Block	1	1	1	2
p -Ant.	0	2	2	4

Tabelle A.10: Einfache Moduln

M	p -Ant.	$M/\text{rad}(M)$	$\text{soc}(M)$	Loewyl.	projektiv
$16b$	4	1^+	1^+	7	·
$16c$	4	1^+	1^+	7	·
$48a$	4	$4b$	$4b$	10	p
$48b$	4	$4a$	$4a$	10	p
$80a$	4	1^+	1^+	10	p

Tabelle A.11: Unzerlegbare Moduln

Bem.:

Einfaches Produkt: $4a \otimes 4b$

Unzerlegbare Produkte: $4a \otimes 4a, 4b \otimes 4b$

\otimes	$16a$	$16b$	$16c$	$48a$	$48b$	$80a$
Block	2	1	1	1	1	1
$4a \otimes 4a$	·	1	·	·	·	·
$4a \otimes 4b$	1	·	·	·	·	·
$4a \otimes 16a$	1	·	·	1	·	·
$4b \otimes 4b$	·	·	1	·	·	·
$4b \otimes 16a$	1	·	·	·	1	·
$16a \otimes 16a$	5	·	·	1	1	1

Tabelle A.12: Zerlegung der Tensorprodukte

A.4.2 $\mathbb{F}_3\mathcal{S}_6$

Einf. Moduln	1^+	1^-	$4a$	$4b \cong 1^- \otimes 4a$	$6a$	$9a$	$9b \cong 1^- \otimes 9a$
Partition	(6)	(3^2)	(5,1)	(3,2,1)	($4,1^2$)	(4,2)	($2^2,1^2$)
Block	1	1	1	1	1	2	3
p -Ant.	0	0	0	0	1	2	2

Tabelle A.13: Einfache Moduln

M	p -Ant.	$M/\text{rad}(M)$	$\text{soc}(M)$	Loewyl.	projektiv
$12a$	1	$1^+ \oplus 1^-$	$1^+ \oplus 1^-$	3	·
$24a$	1	$4a \oplus 4b$	$4a \oplus 4b$	3	·
$27a$	3	1^+	1^+	5	p
$36a$	2	$4a$	$4a$	5	p
$36b$	2	$6a$	$6a$	5	p

Tabelle A.14: Unzerlegbare Moduln

Bem.:

Unzerlegbare Produkte: $4a \otimes 6a, 4a \otimes 9a$

Halbeinfache Produkte: $4a \otimes 4a$

\otimes	1^+	$6a$	$9a$	$9b$	$12a$	$24a$	$27a$	$36a$	$36b$
Block	1	1	2	3	1	1	1	1	1
$4a \otimes 4a$	1	1	1
$4a \otimes 6a$	1	.	.	.
$4a \otimes 9a$	1	.
$6a \otimes 6a$.	1	1	1	1
$6a \otimes 9a$.	.	1	1	1
$9a \otimes 9a$.	.	2	.	.	.	1	.	1

Tabelle A.15: Zerlegung der Tensorprodukte

A.4.3 $\mathbb{F}_5\mathcal{S}_6$

Einf. Moduln	1^+	1^-	$5a$	$5b$	$5c \cong 1^- \otimes 5b$	$5d \cong 1^- \otimes 5a$
Partition	(6)	$(2^2, 1^2)$	(5,1)	(3^2)	(2^3)	$(2, 1^4)$
Block	1	1	2	3	4	5
p -Ant.	0	0	1	1	1	1

Tabelle A.16: Einfache Moduln 1/2

Einf. Moduln	$8a$	$8b \cong 1^- \otimes 8a$	$10a$	$10b \cong 1^- \otimes 10a$
Partition	(4,2)	(3,2,1)	$(4, 1^2)$	$(3, 1^3)$
Block	1	1	6	7
p -Ant.	0	0	1	1

Tabelle A.17: Einfache Moduln 2/2

M	p -Ant.	$M/\text{rad}(M)$	$\text{soc}(M)$	Loewyl.	projektiv
$10c$	1	1^+	1^+	3	p
$25a$	2	$8a$	$8a$	3	p
$25b$	2	$8b$	$8b$	3	p

Tabelle A.18: Unzerlegbare Moduln

Bem.:

Unzerlegbares Produkt: $5a \otimes 5b$

\otimes	1^+	$5a$	$5b$	$5c$	$5d$	$8b$	$10a$	$10b$	$10c$	$25a$	$25b$
Block	1	2	3	4	5	1	6	7	1	1	1
$5a \otimes 5a$.	1	1	.	1	.	.
$5a \otimes 5b$	1	.
$5a \otimes 8a$.	.	1	.	.	.	1	.	.	1	.
$5a \otimes 10a$.	1	1	1	.	1	.
$5b \otimes 5b$.	.	.	1	.	.	.	1	1	.	.
$5b \otimes 8a$.	1	1	.	.	.	1
$5b \otimes 10a$.	.	.	1	.	.	1	1	.	1	.
$8a \otimes 8a$	1	1	.	1	.	1	1	1	.	1	.
$8a \otimes 10a$.	1	1	.	.	.	1	1	.	1	1
$10a \otimes 10a$.	1	1	1	1	.	1	1	1	1	1

Tabelle A.19: Zerlegung der Produkte

A.5 \mathcal{S}_7

A.5.1 $\mathbb{F}_2\mathcal{S}_7$

Einf. Moduln	1^+	$6a$	$8a$	$14a$	$20a$
Partition	(7)	(6,1)	(4,3)	(5,2)	(4,2,1)
Block	1	2	2	1	1
p -Ant.	0	1	3	1	2

Tabelle A.20: Einfache Moduln

M	p -Ant.	$M/\text{rad}(M)$	$\text{soc}(M)$	Loewyl.	projektiv
$20b$	2	$6a$	$6a$	3	.
$30a$	1	$1^+ \oplus 14a$	$1^+ \oplus 14a$	2	.
$32a$	5	1^+	1^+	4	.
$32b$	5	$6a$	$6a$	5	.
$40a$	3	$20a$	$20a$	2	.
$40b$	3	$6a$	$6a$	6	.
$48a$	4	$8a$	$8a$	7	p
$64a$	6	$14a$	$14a$	5	.
$78a$	1	$1^+ \oplus 20a$	$1^+ \oplus 20a$	5	.
$80a$	4	$6a$	$6a$	7	p
$80b$	4	$1^+ \oplus 14a$	$1^+ \oplus 14a$	5	.
$112a$	4	$20a$	$20a$	6	p
$120a$	4	$14a \oplus 20a$	$14a \oplus 20a$	5	.
$128a$	7	$14a$	$14a$	6	p

Tabelle A.21: Unzerlegbare Moduln

Bem.:

Unzerlegbares Produkt: $8a \otimes 14a$

\otimes	$6a$	$8a$	$14a$	$20b$	$30a$	$32a$	$32b$	$40a$	$40b$	$48a$	$64a$	$78a$	$80a$	$80b$	$112a$	$120a$	$128a$
Block	2	2	1	2	1	1	2	1	2	2	1	1	2	1	1	1	1
$6a \otimes 6a$	1	.	.	.	1
$6a \otimes 8a$.	1	1
$6a \otimes 14a$.	.	.	1	1
$6a \otimes 20a$.	1	1	.	.
$8a \otimes 8a$	1	1
$8a \otimes 14a$	1	.	.
$8a \otimes 20a$	1	1
$14a \otimes 14a$.	.	1	1	.	1	1
$14a \otimes 20a$	1	1	1	.
$20a \otimes 20a$	1	1	1	.	1

Tabelle A.22: Zerlegung der Tensorprodukte

A.5.2 $\mathbb{F}_3\mathcal{S}_7$

Einf. Mod.	1^+	1^-	$6a$	$6b \cong 1^- \otimes 6a$	$13a$	$13b \cong 1^- \otimes 13a$
Partition	(7)	(4,3)	(6,1)	$(3^2,1)$	(5,2)	$(3,2,1^2)$
Block	1	1	2	3	1	1
p -Ant.	0	0	1	1	0	0

Tabelle A.23: Einfache Moduln 1/2

Einf. Moduln	$15a$	$15b \cong 1^- \otimes 15a$	$20a$
Partition	$(5,1^2)$	$(3,2^2)$	$(4,2,1)$
Block	3	2	1
p -Ant.	1	1	0

Tabelle A.24: Einfache Moduln 2/2

M	p -Ant.	$M/\text{rad}(M)$	$\text{soc}(M)$	Loewyl.	projektiv
$\underline{15c}$	1	1^+	1^+	3	·
$\underline{27a}$	3	$6b$	$6b$	3	p
$\underline{27b}$	3	$6a$	$6a$	3	p
$\underline{28a}$	0	$13b$	$13b$	3	·
$\underline{28b}$	0	$13a$	$13a$	3	·
$\underline{36a}$	2	$15a$	$15a$	3	p
$\underline{36b}$	2	$15b$	$15b$	3	p
$\underline{42a}$	1	$20a$	$20a$	3	·
$\underline{63a}$	2	$13a$	$13a$	5	p
$\underline{63b}$	2	$13b$	$13b$	5	p
$\underline{69a}$	1	$13a \oplus 20a$	$13a \oplus 20a$	3	·
$\underline{90a}$	2	$20a$	$20a$	5	p
$\underline{98a}$	0	$13a \oplus 13b \oplus 20a$	$13a \oplus 13b \oplus 20a$	3	·

Tabelle A.25: Unzerlegbare Moduln

\otimes	1^+	1^-	$6a$	$6b$	$15a$	$15b$	$15c$	$27a$	$27b$	$28a$	$28b$	$36a$	$36b$	$42a$	$63a$	$63b$	$69a$	$90a$	$98a$
Block	1	1	2	3	3	2	1	3	2	1	1	3	2	1	1	1	1	1	1
$6a \otimes 6a$	·	·	1	·	1	·	1	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
$6a \otimes 13a$	·	·	·	·	1	·	·	·	·	·	·	·	·	·	1	·	·	·	·
$6a \otimes 15a$	·	·	1	·	1	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	1	·	·
$6a \otimes 20a$	·	·	·	·	1	1	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	1	·
$13a \otimes 13a$	1	·	·	·	·	·	·	·	1	·	·	1	·	1	1	·	·	·	·
$13a \otimes 15a$	·	·	1	·	·	·	·	·	·	·	·	1	·	·	1	·	·	1	·
$13a \otimes 20a$	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	1	1	·	·	·	·	1	1
$15a \otimes 15a$	·	·	1	·	1	·	1	·	·	·	·	·	1	·	1	·	·	1	·
$15a \otimes 20a$	·	·	1	1	·	·	·	·	·	·	·	1	1	·	1	1	·	1	·
$20a \otimes 20a$	1	1	·	·	·	·	·	1	1	1	1	1	1	·	1	1	·	1	·

Tabelle A.26: Zerlegung der Tensorprodukte

A.5.3 $\mathbb{F}_5\mathcal{S}_7$

Einf. Moduln.	1^+	1^-	$6a$	$6b \cong 1^- \otimes 6a$	$8a$	$8b \cong 1^- \otimes 8a$	$13a$	$13b \cong 1^- \otimes 13a$
Partition	(7)	$(2^3, 1)$	(6,1)	$(2^2, 1^3)$	(5,2)	$(3^2, 1)$	(4,3)	$(3, 2^2)$
Block	1	2	2	1	2	1	1	2
p -Ant.	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabelle A.27: Einfache Moduln 1/2

Einf. Moduln	$15a$	$15b \cong 1^- \otimes 15a$	$20a$	$35a$	$35b \cong 1^- \otimes 35a$
Partition	$(5, 1^2)$	$(3, 1^4)$	$(4, 1^3)$	$(4, 2, 1)$	$(3, 2, 1^2)$
Block	3	4	5	6	7
p -Ant.	1	1	1	1	1

Tabelle A.28: Einfache Moduln 2/2

M	p -Ant.	$M/\text{rad}(M)$	$\text{soc}(M)$	Loewyl.	projektiv
$15c$	1	1^+	1^+	3	p
$15d$	1	1^-	1^-	3	p
$20b$	1	$6a$	$6a$	3	p
$20c$	1	$6b$	$6b$	3	p
$35c$	1	$13a$	$13a$	3	p
$35d$	1	$13b$	$13b$	3	p
$35e$	1	$8a$	$8a$	3	p
$35f$	1	$8b$	$8b$	3	p

Tabelle A.29: Unzerlegbare Moduln

Bem.:

Halbeinfache Produkte: $6a \otimes 8a$, $6a \otimes 20a$, $8a \otimes 13a$

\otimes	1^+	$6a$	$8a$	$8b$	$13a$	$13b$	$15a$	$15b$	$15c$	$15d$	$20a$	$20b$	$20c$	$35a$	$35b$	$35c$	$35d$	$35e$	$35f$
Block	1	2	2	1	1	2	3	4	1	2	5	2	1	6	7	1	2	2	1
$6a \otimes 6a$	1	1	1
$6a \otimes 8a$	1	1
$6a \otimes 13a$.	.	1	1	.	1	.	.	.
$6a \otimes 15a$	1	.	.	.	1	1	.	1
$6a \otimes 20a$	1	1	.	.	1	.	.	1	1
$6a \otimes 35a$	1	.	.	.	1	.	.	2	1	1	.	1	.
$8a \otimes 8a$	1	.	.	1	1	1	.
$8a \otimes 13a$.	1	.	.	.	1	1	1	1
$8a \otimes 15a$	1	1	1	1	.	.	.
$8a \otimes 20a$	1	.	.	1	1	.	.	1	1
$8a \otimes 35a$	1	1	.	.	1	1	.	2	2	1	1	.	.
$13a \otimes 13a$	1	.	.	1	.	.	1	.	.	.	1	1	.	1	1	.	1	.	.
$13a \otimes 15a$	1	.	.	2	1	1	.	1	.
$13a \otimes 20a$	1	1	.	.	1	.	.	2	2	1	1	.	.
$13a \otimes 35a$	2	1	.	.	2	1	.	3	3	1	1	1	1
$15a \otimes 15a$	1	1	1	.	1	1	.	2	1	.	.	1	.
$15a \otimes 20a$	1	1	.	.	1	1	1	2	2	1	1	.	.
$15a \otimes 35a$	2	1	.	.	2	1	.	4	3	2	1	1	1
$20a \otimes 20a$	1	1	1	1	1	1	1	2	2	1	1	1	1
$20a \otimes 35a$	2	2	.	.	2	1	1	5	5	2	2	1	1
$35a \otimes 35a$	4	3	1	.	5	2	1	9	8	3	3	2	2

Tabelle A.30: Zerlegung der Tensorprodukte

A.5.4 $\mathbb{F}_7\mathcal{S}_7$

Einf. Moduln.	1^+	1^-	$5a$	$5b \cong 1^- \otimes 5a$	$10a$	$10b \cong 1^- \otimes 10a$	$14a$	$14b$
Partition	(7)	(2,1 ⁵)	(3,1 ⁴)	(6,1)	(4,1 ³)	(5,1 ²)	(5,2)	(2 ³ ,1)
Block	1	1	1	1	1	1	2	3
p -Ant.	0	0	0	0	0	0	1	1

Tabelle A.31: Einfache Moduln 1/2

Einf. Moduln	$14c \cong 1^- \otimes 14a$	$14d \cong 1^- \otimes 14b$	$21a$	$21b \cong 1^- \otimes 21a$	$35a$	$35b \cong 1^- \otimes 35a$
Partition	(2 ² ,1 ³)	(4,3)	(3 ² ,1)	(3,2 ²)	(4,2,1)	(3,2,1 ²)
Block	4	5	6	7	8	9
p -Ant.	1	1	1	1	1	1

Tabelle A.32: Einfache Moduln 2/2

M	p -Ant.	$M/\text{rad}(M)$	$\text{soc}(M)$	Loewyl.	projektiv
$7a$	1	1^+	1^+	3	p
$21c$	1	$5a$	$5a$	3	p
$21d$	1	$5b$	$5b$	3	p
$35c$	1	$10a$	$10a$	3	p
$35d$	1	$10b$	$10b$	3	p

Tabelle A.33: Unzerlegbare Moduln

Bem.:
Halbeinfache Produkte: $5a \otimes 5a, 5a \otimes 10a, 5a \otimes 14b, 5a \otimes 21a, 10a \otimes 10a$

\otimes	1 ⁺	5a	5b	7a	10a	10b	14a	14b	14c	14d	21a	21b	21c	21d	35a	35b	35c	35d
Block	1	1	1	1	1	1	2	3	4	5	6	7	1	1	8	9	1	1
5a \otimes 5a	1	1	1
5a \otimes 10a	.	.	1	.	1	1	.	.	.
5a \otimes 14a	1	1	.	.	1	.	.
5a \otimes 14b	1	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.
5a \otimes 21a	1	.	.	1	.	.	.	1	1	.	.
5a \otimes 35a	1	1	.	.	1	1	.	.	1	1	1	.
10a \otimes 10a	1	1	.	.	.	1	1	1	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.
10a \otimes 14a	1	.	.	.	1	.	.	1	1	1	.
10a \otimes 14b	1	.	.	1	.	.	1	1	.	1
10a \otimes 21a	1	1	1	1	.	.	1	2	.	1
10a \otimes 35a	1	1	1	1	1	2	1	.	2	3	.	1
14a \otimes 14a	.	.	.	1	.	.	2	.	.	1	1	1	.	.	2	.	.	1
14a \otimes 14b	1	1	.	1	1	1	.	1	2	.	.
14a \otimes 21a	1	1	1	1	2	1	.	.	2	2	.	1
14a \otimes 35a	2	1	.	2	2	2	.	1	4	3	1	1
14b \otimes 14b	.	.	.	1	.	.	1	1	.	1	1	1	.	.	1	1	.	1
14b \otimes 21a	1	1	1	1	1	1	1	.	2	2	.	1
14b \otimes 35a	1	1	2	1	2	2	1	.	3	4	1	1
21a \otimes 21a	.	.	.	1	.	.	2	1	1	1	1	2	1	.	3	3	1	1
21a \otimes 35a	2	2	2	2	3	3	1	1	5	5	1	2
35a \otimes 35a	.	.	.	1	.	.	4	3	3	4	5	5	1	1	9	8	2	3

Tabelle A.34: Zerlegung der Tensorprodukte

A.6 \mathcal{S}_8 A.6.1 $\mathbb{F}_2\mathcal{S}_8$

Einf. Moduln	1^+	$6a$	$8a$	$14a$	$40a$	$64a$
Partition	(8)	(7,1)	(5,3)	(6,2)	(4,3,1)	(5,2,1)
Block	1	1	1	1	1	2
p -Ant.	0	1	3	1	3	6

Tabelle A.35: Einfache Moduln

M	p -Ant.	$M/\text{rad}(M)$	$\text{soc}(M)$	Loewyl.	projektiv
$20a$	2	$6a$	$6a$	3	·
$32a$	5	1^+	1^+	4	·
$32b$	5	$6a$	$6a$	5	·
$36a$	2	$1^+ \oplus 14a$	$1^+ \oplus 14a$	3	·
$48a$	4	$8a$	$8a$	7	·
$112a$	4	$40a$	$40a$	6	·
$128a$	7	$64a$	$64a$	2	p
$160a$	5	$14a$	$14a$	7	·
$196a$	2	$1^+ \oplus 14a$	$1^+ \oplus 14a$	9	·
$232a$	3	$40a$	$40a$	10	·
$320a$	6	$14a$	$14a$	13	·
$320b$	6	$6a$	$6a$	10	·
$384a$	7	$40a$	$40a$	14	p
$384b$	7	$8a$	$8a$	11	p
$544a$	5	$6a \oplus 40a$	$6a \oplus 40a$	10	·
$640a$	7	$14a$	$14a$	14	p
$1088a$	6	$1^+ \oplus 14a \oplus 14a$	$1^+ \oplus 14a \oplus 14a$	13	·

Tabelle A.36: Unzerlegbare Moduln

Bem.:

Unzerlegbare Produkte: $6a \otimes 6a$, $8a \otimes 14a$, $14a \otimes 14a$ Halbeinfaches Produkt: $6a \otimes 8a$

Tabelle A.37: Zerlegung des Tensorproduktes

\otimes	$8a$	$20a$	$32a$	$32b$	$36a$	$40a$	$48a$	$64a$	$112a$	$128a$	$160a$	$196a$	$232a$	$320a$	$320b$	$384a$	$384b$	$544a$	$640a$	$1088a$
Block	1	1	1	1	1	1	1	2	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$6a \otimes 6a$	1
$6a \otimes 8a$	1	1
$6a \otimes 14a$.	1	1
$6a \otimes 40a$	1	1
$6a \otimes 64a$	1	1
$8a \otimes 8a$.	.	1	1
$8a \otimes 14a$	1
$8a \otimes 40a$.	.	.	1	1	1
$8a \otimes 64a$	1	1
$14a \otimes 14a$	1
$14a \otimes 40a$	1	.	.	1	1
$14a \otimes 64a$	3	1	1
$40a \otimes 40a$.	.	1	3	1	1	.
$40a \otimes 64a$	3	3	1	.	1	.
$64a \otimes 64a$	5	.	4	.	.	.	1	1	3	1	.	.	1

A.6.2 $\mathbb{F}_3\mathcal{S}_8$

Einf. Moduln	1^+	1^-	$7a$	$7b \cong 1^- \otimes 7a$	$13a$	$13b \cong 1^- \otimes 13a$	$21a$	$21b \cong 1^- \otimes 21a$
Partition	(8)	(4 ²)	(7,1)	(4,3,1)	(6,2)	(3 ² ,1 ²)	(3 ² ,2)	(6,1 ²)
Block	1	2	2	1	2	1	3	3
p -Ant.	0	0	0	0	0	0	1	1

Tabelle A.38: Einfache Moduln 1/2

Einf. Moduln	$28a$	$28b \cong 1^- \otimes 28a$	$35a$	$35b \cong 1^- \otimes 35a$	$90a$
Partition	(3,2 ² ,1)	(5,3)	(4,2 ²)	(5,2,1)	(4,2,1 ²)
Block	2	1	2	1	4
p -Ant.	0	0	0	0	2

Tabelle A.39: Einfache Moduln 2/2

M	p -Ant.	$M/\text{rad}(M)$	$\text{soc}(M)$	Loewyl.	projektiv
<u>27a</u>	3	$7a$	$7a$	3	·
<u>27b</u>	3	$7b$	$7b$	3	·
<u>34a</u>	0	$13b$	$13b$	3	·
<u>49a</u>	0	$7b$	$7b$	3	·
<u>63a</u>	2	$21a$	$21a$	3	p
<u>63b</u>	2	$21b$	$21b$	3	p
<u>78a</u>	1	$35b$	$35b$	3	·
<u>90b</u>	2	$13a$	$13a$	5	p
<u>90c</u>	2	$13b$	$13b$	5	p
<u>91a</u>	0	$28b$	$28b$	3	·
<u>93a</u>	1	$1^+ \oplus 28b$	$1^+ \oplus 28b$	3	·
<u>99a</u>	2	$35a$	$35a$	3	·
<u>99b</u>	2	$35b$	$35b$	3	·
<u>111a</u>	1	$13a \oplus 35a$	$13a \oplus 35a$	3	·
<u>135a</u>	3	1^+	1^+	5	p
<u>135b</u>	3	1^-	1^-	5	p
<u>140a</u>	0	$13b \oplus 35b$	$13b \oplus 35b$	3	·
<u>153a</u>	2	$7a$	$7a$	5	p
<u>153b</u>	2	$7b$	$7b$	5	p
<u>162a</u>	4	$28a$	$28a$	5	p
<u>162b</u>	4	$28b$	$28b$	5	p
<u>225a</u>	2	$35b$	$35b$	5	p
<u>225b</u>	2	$35a$	$35a$	5	p

Tabelle A.40: Unzerlegbare Moduln

Bem.:

Unzerlegbares Produkt: $7a \otimes 13a$

\otimes	1 ⁺	21a	21b	27a	27b	34a	35b	49a	63a	63b	78a	90a	90b	91a	99a	140a	162a	162b	225a	225b
Block	1	3	3	2	1	1	1	1	3	3	1	4	2	1	2	1	2	1	1	2
7a \otimes 7a	1	.	1	1
7a \otimes 13a	1
7a \otimes 21a	.	1	.	.	1	1
7a \otimes 28a	1	1
7a \otimes 35a	.	1	1	1
7a \otimes 90a	2	1	1
13a \otimes 13a	1	1	.	1
13a \otimes 21a	.	1	1	1	.	.	.
13a \otimes 28a	1	1	.	.	1	1	.	.	.
13a \otimes 35a	1	.	.	.	1	.	.	.	1
13a \otimes 90a	1	1	.	3	1	1	1	1

Tabelle A.41: Zerlegung der
Tensorprodukte 1/2

\otimes	1 ⁺	7b	21a	21b	27a	28b	34a	35b	63a	63b	90a	90b	90c	93a	99b	111a	135a	135b	153a	153b	162a	162b	225a	225b
Block	1	1	3	3	2	1	1	1	3	3	4	2	1	1	1	2	1	2	2	1	2	1	1	2
21a \otimes 21a	.	.	.	1	1	1	.	.	1	1	1
21a \otimes 28a	.	.	.	1	1	1	1	1	.
21a \otimes 35a	.	.	1	1	1	2	.	.	.	1	1	.	1
21a \otimes 90a	1	1	4	1	1	1	1	2	2
28a \otimes 28a	1	1	1	1	1	.	.	1	1	.
28a \otimes 35a	1	.	1	3	1	1	1
28a \otimes 90a	1	1	6	1	1	1	1	3	3
35a \otimes 35a	1	1	.	1	1	1	1	.	1	.	2	1	1	1	1	1
35a \otimes 90a	2	2	6	1	1	1	1	3	3	2	2
90a \otimes 90a	4	4	17	3	3	.	.	.	1	1	2	2	6	6	6	6

Tabelle A.42: Zerlegung der
Tensorprodukte 2/2

A.6.3 $\mathbb{F}_5\mathcal{S}_8$

Einf. Moduln	1^+	1^-	$7a$	$7b \cong 1^- \otimes 7a$	$13a$	$13b \cong 1^- \otimes 13a$	$20a$	$20b \cong 1^- \otimes 20a$
Partition	(8)	(2^4)	($2^3, 1^2$)	(7,1)	($4, 2^2$)	(4^2)	(6,2)	($2^2, 1^4$)
Block	1	2	3	3	2	1	4	5
p -Ant.	0	0	0	0	0	0	1	1

Tabelle A.43: Einfache Moduln 1/3

Einf. Moduln	$21a$	$21b \cong 1^- \otimes 21a$	$21c$	$21d \cong 1^- \otimes 21c$	$35a$	$35b \cong 1^- \otimes 35a$
Partition	($3^2, 2$)	(5,3)	($6, 1^2$)	($3, 2, 1^3$)	($5, 1^3$)	($4, 1^4$)
Block	3	3	2	1	6	7
p -Ant.	0	0	0	0	1	1

Tabelle A.44: Einfache Moduln 2/3

Einf. Moduln	$43a$	$43b \cong 1^- \otimes 43a$	$70a$	$70b \cong 1^- \otimes 70b$	$90a$
Partition	(5,2,1)	($3^2, 1^2$)	(4,3,1)	($3, 2^2, 1$)	($4, 2, 1^2$)
Block	2	1	8	9	10
p -Ant.	0	0	1	1	1

Tabelle A.45: Einfache Moduln 3/3

M	p -Ant.	$M/\text{rad}(M)$	$\text{soc}(M)$	Loewyl.	projektiv
$\underline{15a}$	1	1^+	1^+	3	p
$\underline{15b}$	1	1^-	1^-	3	p
$\underline{35c}$	1	$7a$	$7a$	3	p
$\underline{35d}$	1	$7b$	$7b$	3	p
$\underline{70c}$	1	$21a$	$21a$	3	p
$\underline{70d}$	1	$21b$	$21b$	3	p
$\underline{70e}$	1	$13a$	$13a$	3	p
$\underline{70f}$	1	$13b$	$13b$	3	p
$\underline{85a}$	1	$21d$	$21d$	3	p
$\underline{85b}$	1	$21c$	$21c$	3	p
$\underline{120a}$	1	$43b$	$43b$	3	p
$\underline{120b}$	1	$43a$	$43a$	3	p

Tabelle A.46: Unzerlegbare Moduln

Bem.:

Halbeinfache Produkte: $7a \otimes 7a$, $7a \otimes 13a$, $7a \otimes 21a$

\otimes	1^+	$7a$	$7b$	$13a$	$13b$	$20a$	$20b$	$21a$	$21b$	$21c$	$21d$	$35a$	$35b$	$35d$	$43a$	$43b$	$70a$	$70b$	$70c$	$70d$	$70e$	$70f$	$85a$	$85b$	$90a$	$120a$	$120b$	
Block	1	3	3	2	1	4	5	3	3	2	1	6	7	3	2	1	8	9	3	3	2	1	1	2	10	1	2	
$7a \otimes 7a$	1	.	1	.	.	1	.	.	.	1
$7a \otimes 13a$	1	1
$7a \otimes 21a$	1	.	.	.	1	1
$7a \otimes 21c$.	1	1	1	1
$7a \otimes 43a$	1	1	1	1	.	.
$13a \otimes 13a$	1	1	1	1
$13a \otimes 21a$.	.	1	1	1	1	1	1	.	.
$13a \otimes 21c$	1	.	1	1	1	.	.	.
$13a \otimes 43a$	1	.	1	.	.	.	1	.	1	.	.	.	1	1	1	1	1	1
$21a \otimes 21a$	1	.	1	1	.	1	.	1	.	1	.	1	.	.	.	1	.	1	1	.	1	1
$21a \otimes 21c$	1	2	.	.	1	1	1	.
$21a \otimes 43a$.	1	1	.	1	.	.	1	1	.	.	.	2	1	1	.	.	.	1	.	2	1	1	1
$21c \otimes 21c$	1	2	1	1	1	1	1	1	.	1
$21c \otimes 43a$	1	1	3	1	.	1	.	.	.	1	2	1	1	1
$43a \otimes 43a$	1	2	2	2	1	.	1	3	3	1	1	1	1	1	1	4	1	2	2

Tabelle A.47: Zerlegung der Tensorprodukte $1/2$

Tabelle A.48: Zerlegung der Tensorprodukte 2/2

\otimes	15a	15b	35d	35c	70f	70e	20a	20b	85b	85a	70d	70c	35a	35b	120b	120a	90a	70a	70b	
Block	1	2	3	3	1	2	4	5	2	1	3	3	6	7	1	2	10	8	9	
7a \otimes 20a	.	.	.	1	.	.	.	1	.	1
13a \otimes 20a	1	1	.	.	.	1
20a \otimes 20a	1	.	1	.	.	.	2	.	1	.	.	.	1	.	1	.	.	1	.	.
21a \otimes 20a	1	.	.	.	1	1	.	2	.
21c \otimes 20a	.	.	1	.	.	.	1	.	2	.	.	.	1	.	.	.	1	1	.	.
35a \otimes 20a	1	.	1	.	.	.	2	1	1	1	2	1	.	.
43a \otimes 20a	1	.	1	.	.	.	1	.	1	1	2	.	2	2	1	1
70a \otimes 20a	1	.	1	.	1	.	2	.	1	.	2	1	3	4	2	2
90a \otimes 20a	1	1	1	1	2	2	2	2	5	3	3	3
7a \otimes 35a	1	.	.	1	1	.	.	1	.	.	.
13a \otimes 35a	1	1	.	.	1	1	1	1	1
21a \otimes 35a	1	.	1	1	1	2	1	2	2
21c \otimes 35a	.	.	1	.	.	.	1	.	1	1	.	.	1	1	1	.	2	1	1	1
35a \otimes 35a	1	.	1	1	.	1	2	1	1	1	1	.	1	1	1	1	2	2	2	2
43a \otimes 35a	1	.	1	1	1	.	1	1	1	1	2	2	3	3	2	2
70a \otimes 35a	1	1	1	.	1	1	2	1	2	2	3	2	6	5	4	4
90a \otimes 35a	.	.	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	6	6	6	6
7a \otimes 70a	1	1	.	.	.	1	1	.	2	2
13a \otimes 70a	.	.	.	1	.	.	.	1	.	1	1	.	1	1	1	1	2	2	1	1
21a \otimes 70a	.	.	.	1	1	.	.	2	.	2	1	.	1	2	2	1	3	3	2	2
21c \otimes 70a	1	.	1	.	.	.	2	.	1	1	3	1	3	4	2	2
43a \otimes 70a	.	.	1	.	1	1	2	1	3	1	1	2	3	2	3	3	7	5	5	5
70a \otimes 70a	1	.	2	.	1	2	4	2	4	2	2	3	5	4	5	5	11	8	8	8
90a \otimes 70a	.	.	1	1	2	2	3	3	3	3	3	3	6	6	7	7	14	11	11	11
7a \otimes 90a	1	1	1	1	2	1	1	1
13a \otimes 90a	1	1	1	1	1	1	1	1	3	2	2	2
21a \otimes 90a	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	4	3	3	3
21c \otimes 90a	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	4	3	3	3
43a \otimes 90a	.	.	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	4	4	9	7	7	7
90a \otimes 90a	1	1	2	2	3	3	5	5	4	4	4	4	6	6	9	9	17	14	14	14

A.6.4 $\mathbb{F}_7\mathcal{S}_8$

Einf. Moduln	1^+	1^-	$7a$	$7b \cong 1^- \otimes 7a$	$14a$	$14b \cong 1^- \otimes 14a$	$19a$
Partition	(8)	$(2^2, 1^4)$	(7,1)	$(2, 1^6)$	(2^4)	(4^2)	$(3, 2, 1^3)$
Block	1	1	2	3	4	5	1
p -Ant.	0	0	1	1	1	1	0

Tabelle A.49: Einfache Moduln 1/4

Einf. Moduln	$19b \cong 1^- \otimes 19a$	$21a$	$21b \cong 1^- \otimes 21a$	$28a$	$28b \cong 1^- \otimes 28a$
Partition	(6,2)	$(6, 1^2)$	$(3, 1^5)$	$(2^3, 1^2)$	(5,3)
Block	1	6	7	8	9
p -Ant.	0	1	1	1	1

Tabelle A.50: Einfache Moduln 2/4

Einf. Moduln	$35a$	$35b \cong 1^- \otimes 35a$	42	$45a$	$45b \cong 1^- \otimes 45a$
Partition	$(4, 1^4)$	$(5, 1^3)$	$(3^2, 2)$	$(4, 2, 1^2)$	$(5, 2, 1)$
Block	10	11	12	1	1
p -Ant.	1	1	1	0	0

Tabelle A.51: Einfache Moduln 3/4

Einf. Moduln	$56a$	$56b \cong 1^- \otimes 56a$	$70a$	$70b \cong 1^- \otimes 70a$
Partition	$(3^2, 1^2)$	$(4, 2^2)$	$(3, 2^2, 1)$	$(4, 3, 1)$
Block	13	14	15	16
p -Ant.	1	1	1	1

Tabelle A.52: Einfache Moduln 4/4

M	p -Ant.	$M/\text{rad}(M)$	$\text{soc}(M)$	Loewyl.	projektiv
$21c$	1	1^+	1^+	3	p
$21d$	1	1^-	1^-	3	p
$84a$	1	$19a$	$19a$	3	p
$84b$	1	$19b$	$19b$	3	p
$154a$	1	$45a$	$45a$	3	p
$154b$	1	$45b$	$45b$	3	p

Tabelle A.53: Unzerlegbare Moduln

Bemerkung:

Halbeinfache Produkte: $7a \otimes 14a, 7a \otimes 42a$

\otimes	1^+	$7a$	$14a$	$14b$	$19a$	$19b$	$21a$	$21b$	$28a$	$28b$	$35a$	$35b$	$42a$
Block	1	2	4	5	1	1	6	7	8	9	10	11	12
$19a \otimes 19a$	1	1	.	1	.	.	1	.	.	1	.	1	.
$19a \otimes 45a$	1	1	.	.	1	1	1	1
$45a \otimes 45a$	1	1	1	1	1	.	1	1	1	2	1	2	2

Tabelle A.54: Zerlegung der Tensorprodukte 1/3 a

\otimes	$45a$	$45b$	$56a$	$56b$	$70a$	$70b$	$84b$	$154a$	$154b$
Block	1	1	13	14	15	16	1	1	1
$19a \otimes 19a$.	1	.	1	.	1	1	.	.
$19a \otimes 45a$	1	.	1	1	1	2	.	.	2
$45a \otimes 45a$.	1	3	3	3	4	2	3	1

Tabelle A.55: Zerlegung der Tensorprodukte 1/3 b

Tabelle A.56: Zerlegung der Tensorprodukte 2/3

\otimes	21c	21d	7a	7b	14b	14a	84b	84a	21a	21b	42a	28b	28a	35b	35a	154b	154a	56b	56a	70b	70a	
Block	1	1	2	3	5	4	1	1	6	7	12	9	8	11	10	1	1	14	13	16	15	
7a \otimes 7a	1	.	1	1
14a \otimes 7a	1	1
19a \otimes 7a	1	.	1	.	.	1
21a \otimes 7a	.	.	1	.	.	.	1	.	1	1
28a \otimes 7a	1	.	1	1	1
35a \otimes 7a	1	.	.	.	1	1	.	1
42a \otimes 7a	1	1	1	1	1	1
45a \otimes 7a	1	.	1	.	1	.	1	1
56a \otimes 7a	1	1	.	1	1	1	1
70a \otimes 7a	1	1	.	1	.	.	.	1	1	1	1	.	2
14a \otimes 14a	1	.	.	.	1	1	1	.	.	.	1	1	.	.	.
19a \otimes 14a	1	1	1	1	1	.
21a \otimes 14a	1	.	1	.	.	.	1	1
28a \otimes 14a	.	.	1	1	.	1	1	.	.	.	1	.	.	.	1	1	1
35a \otimes 14a	1	1	1	1	.	1	1	1	1	1
42a \otimes 14a	1	1	1	1	1	.	.	1	1	.	.	1	1	1
45a \otimes 14a	1	.	1	1	.	1	.	1	1	1	.	1	1	1
56a \otimes 14a	1	1	1	1	1	1	1	.	2	2	1	1	1
70a \otimes 14a	.	.	1	.	.	.	1	.	1	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2
19a \otimes 21a	.	.	.	1	.	.	.	1	.	1	.	.	1	.	1	.	1	1
21a \otimes 21a	1	.	1	.	.	.	1	.	1	.	.	1	.	1	1	1	.	1
28a \otimes 21a	1	.	1	.	1	.	.	1	.	1	.	1	1	1	1	.	2
35a \otimes 21a	.	.	.	1	.	.	.	1	1	1	.	.	1	1	1	1	1	.	1	1	1	1
42a \otimes 21a	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2
45a \otimes 21a	1	.	1	.	1	1	.	1	1	1	1	1	1	2	1	2	2
56a \otimes 21a	1	2	1	1	.	1	1	2	2	1	2	3	3
70a \otimes 21a	1	.	1	.	.	2	.	2	1	1	1	2	2	3	2	4	4
19a \otimes 28a	.	.	1	.	.	.	1	.	1	.	1	1	.	.	.	1	.	1	.	2	.	.
28a \otimes 28a	1	.	1	.	1	.	1	.	1	.	1	1	.	1	.	1	.	2	1	2	1	1
35a \otimes 28a	1	.	1	1	.	2	1	2	1	1	1	2	1	1
42a \otimes 28a	1	1	1	1	.	.	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2
45a \otimes 28a	1	.	1	.	1	.	1	1	.	2	1	2	1	2	2	2	2	2
56a \otimes 28a	1	.	1	1	2	2	1	1	1	2	2	2	1	3	3	3
70a \otimes 28a	.	.	1	.	1	1	2	.	2	.	2	2	1	2	1	2	2	3	3	4	3	3

Tabelle A.57: Zerlegung der Tensorprodukte $3/3$

\otimes	21c	21d	7a	7b	14b	14a	84b	84a	21a	21b	42a	28b	28a	35b	35a	154b	154a	56b	56a	70b	70a
Block	1	1	2	3	5	4	1	1	6	7	12	9	8	11	10	1	1	14	13	16	15
$19a \otimes 35a$	·	·	·	·	·	·	1	·	1	·	·	·	·	1	1	1	1	1	1	1	·
$35a \otimes 35a$	1	·	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	2	1	2	2
$42a \otimes 35a$	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	2	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3
$45a \otimes 35a$	·	·	1	·	1	·	1	1	1	1	2	2	1	1	1	2	1	2	2	3	3
$56a \otimes 35a$	·	·	·	·	1	1	1	1	1	·	2	1	1	2	1	2	2	3	4	4	3
$70a \otimes 35a$	·	·	·	·	1	1	1	·	1	1	3	2	1	2	2	3	3	4	3	5	4
$19a \otimes 42a$	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	1	1	1	·	·	1	1	1	1	2	2
$42a \otimes 42a$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	2	2
$45a \otimes 42a$	·	·	·	·	1	1	1	1	1	1	2	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3
$56a \otimes 42a$	·	·	1	1	·	·	1	1	2	2	3	2	2	2	2	3	3	2	2	4	4
$70a \otimes 42a$	·	·	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4	5	5
$19a \otimes 56a$	·	·	·	·	1	1	1	·	·	·	1	1	·	1	1	1	1	2	2	2	2
$45a \otimes 56a$	·	·	1	·	1	·	1	1	2	1	3	2	2	2	2	3	3	3	3	5	4
$56a \otimes 56a$	1	·	1	·	2	2	2	2	1	2	2	2	1	3	4	3	3	6	5	5	5
$70a \otimes 56a$	·	·	1	1	1	1	2	2	3	2	4	3	3	4	3	5	4	5	5	7	6
$19a \otimes 70a$	·	·	·	·	1	·	1	·	1	·	2	2	·	1	·	2	1	2	2	3	2
$45a \otimes 70a$	·	·	1	·	1	1	2	1	2	1	3	2	2	3	3	4	3	5	4	6	5
$70a \otimes 70a$	1	·	2	·	2	2	3	2	4	2	5	4	3	5	4	6	5	7	6	8	8

A.7 \mathcal{S}_9 A.7.1 $\mathbb{F}_2\mathcal{S}_9$

Einf. Moduln	1^+	$8a$	$16a$	$26a$	$40a$	$48a$	$78a$	$160a$
Partition	(9)	(8,1)	(5,4)	(7,2)	(5,3,1)	(6,3)	(6,2,1)	(4,3,2)
Block	1	2	1	1	1	2	1	2
p -Ant.	0	3	4	1	3	4	1	5

Tabelle A.58: Einfache Moduln

M	p -Ant.	$M/\text{rad}(M)$	$\text{soc}(M)$	Loewyl.	projektiv
$56a$	3	1^+	1^+	6	.
$96a$	5	$40a$	$40a$	3	.
$112a$	4	$8a \oplus 48a$	$8a \oplus 48a$	2	.
$128a$	7	$16a$	$16a$	5	.
$128b$	7	1^+	1^+	9	.
$128c$	7	$8a$	$8a$	4	.
$160b$	5	$26a$	$26a$	7	.
$160c$	5	1^+	1^+	4	.
$176a$	4	$8a$	$8a$	3	.
$272a$	4	$16a \oplus 40a$	$16a \oplus 40a$	6	.
$320a$	6	$160a$	$160a$	2	.
$320b$	6	$26a$	$78a$	8	.
$320c$	6	$78a$	$26a$	8	.
$336a$	4	$26a \oplus 78a$	$26a \oplus 78a$	7	.
$352a$	5	$40a$	$40a$	9	.
$384a$	7	$8a \oplus 48a$	$8a \oplus 48a$	5	.
$432a$	4	$16a$	$16a$	11	.
$448a$	6	$26a$	$26a$	10	.
$464a$	4	1^+	1^+	11	.
$480a$	5	$40a$	$40a$	10	.
$564a$	2	$1^+ \oplus 26a \oplus 78a$	$1^+ \oplus 26a \oplus 78a$	9	.
$576a$	6	$78a$	$78a$	13	.
$640a$	7	$48a$	$48a$	6	p
$704a$	6	$48a \oplus 160a$	$48a \oplus 160a$	5	.
$748a$	2	$26a \oplus 78a$	$26a \oplus 78a$	10	.
$768a$	8	$160a$	$160a$	6	p
$768b$	8	$26a$	$26a$	12	.
$800a$	5	$26a \oplus 40a$	$26a \oplus 40a$	10	.
$836a$	2	$1^+ \oplus 26a$	$1^+ \oplus 26a$	10	.
$896a$	7	$26a$	$26a$	14	.
$896b$	7	$8a$	$8a$	6	p
$1024a$	10	$16a$	$16a$	14	p
$1024b$	10	$1^+ \oplus 78a$	$1^+ \oplus 78a$	13	.
$1088a$	6	$8a \oplus 48a \oplus 48a$	$8a \oplus 48a \oplus 48a$	5	.
$1152a$	7	$78a$	$78a$	14	p
$1152b$	7	$40a$	$40a$	15	p
$1792a$	8	$26a$	$26a$	15	p

Tabelle A.59: Unzerlegbare Moduln

Bem.:

Unzerlegbare Produkte: $8a \otimes 16a, 8a \otimes 40a, 16a \otimes 48a \cong 768a$

\otimes	8a	48a	56a	96a	128a	128b	128c	160a	160b	320a	320b	320c	336a	352a	480a	576a	640a	768a	768b	1152a
Block	2	2	1	1	1	1	2	2	1	2	1	1	1	1	1	1	2	2	1	1
$8a \otimes 8a$	1	.	1
$8a \otimes 16a$	1
$8a \otimes 26a$.	1	1
$8a \otimes 40a$	1
$8a \otimes 48a$.	1	1
$8a \otimes 78a$.	1	1
$8a \otimes 160a$	1	1	.	.	.	1	.	.
$16a \otimes 16a$	1	1
$16a \otimes 26a$.	.	.	1	1
$16a \otimes 40a$	1	1
$16a \otimes 48a$	1	.
$16a \otimes 78a$	1	.	.	1	.	.
$16a \otimes 160a$	1	.	1	1

Tabelle A.60: Zerlegung der Tensorprodukte 1/3

\otimes	48a	112a	128a	128c	160c	176a	272a	432a	448a	564a	576a	640a	704a	748a	768a	800a	1152a	1152b	1792a
Block	2	2	1	2	1	2	1	1	1	1	1	2	2	1	2	1	1	1	1
$26a \otimes 26a$.	1	1
$26a \otimes 40a$	1	1
$26a \otimes 48a$	1	1	.	.	1	.	1
$26a \otimes 78a$	1	.	1	1
$26a \otimes 160a$.	.	1	1	.	.	.	3	.	.	1	.
$40a \otimes 40a$	1	1	.	.	.	1	.	.	.
$40a \otimes 48a$	1	.	.	1	.
$40a \otimes 78a$	1	2	.	1	.	.
$40a \otimes 160a$.	.	.	1	1	.	.	2	.	2	.	1

Tabelle A.61: Zerlegung der Tensorprodukte 2/3

\otimes	48a	176a	336a	384a	464a	576a	640a	704a	768a	836a	896a	896b	1024a	1024b	1088a	1152a	1152b	1792a
Block	2	1	1	2	1	1	2	2	2	1	1	2	1	1	2	1	1	1
$48a \otimes 48a$	1	1	1	.	1	1	.	1
$48a \otimes 78a$	1	1	.	.	.	2	.	1	1	.	1
$48a \otimes 160a$	1	.	1	4	.	.	.	1	.	.	1	1	.
$78a \otimes 78a$	1	.	.	2	1	1	.	.	.	1	.	1	.
$78a \otimes 160a$	1	1	6	.	1	.	1	.	.	2	2	.
$160a \otimes 160a$.	.	.	1	.	.	4	.	8	.	.	1	.	1	.	6	2	3

Tabelle A.62: Zerlegung der Tensorprodukte 3/3

A.7.2 $\mathbb{F}_3\mathcal{S}_9$

Einf. Moduln	1^+	1^-	$7a$	$7b \cong 1^- \otimes 7a$	$21a$	$21b \cong 1^- \otimes 21a$
Partiton	(9)	(5,4)	(8,1)	(4 ² ,1)	(7,1 ²)	(4,3,2)
Block	1	1	1	1	1	1
p -Ant.	0	0	0	0	1	1

Tabelle A.63: Einfache Moduln 1/3

Einf. Moduln	$27a$	$27b \cong 1^- \otimes 27a$	$35a$	$35b \cong 1^- \otimes 35a$	$41a$	$41b \cong 1^- \otimes 41a$
Partition	(7,2)	(4,3,1 ²)	(6,2,1)	(5,2 ²)	(6,3)	(3 ² ,2,1)
Block	2	3	1	1	1	1
p -Ant.	3	3	0	0	0	0

Tabelle A.64: Einfache Moduln 2/3

Einf. Moduln	$162a$	$162b \cong 1^- \otimes 162a$	$189a$	$189b \cong 1^- \otimes 189a$
Partition	(5,3,1)	(3,2 ² ,1 ²)	(5,2,1 ²)	(4,2 ² ,1)
Block	4	5	3	2
p -Ant.	4	4	3	3

Tabelle A.65: Einfache Moduln 3/3

M	p -Ant.	$M/\text{rad}(M)$	$\text{soc}(M)$	Loewyl.	projektiv
50a	0	$7a$	$7a$	3	.
125a	0	$41a$	$41a$	3	.
147a	1	$7a \oplus 35a$	$7a \oplus 35a$	3	.
189c	3	$21a$	$21a$	5	.
189d	3	$7a$	$7a$	5	.
204a	1	$1^+ \oplus 35b \oplus 41a$	$1^+ \oplus 35b \oplus 41a$	3	.
243a	5	$27a$	$27a$	3	p
243b	5	$27b$	$27b$	3	p
253a	0	$21a$	$21a$	5	.
294a	1	$21a \oplus 41a$	$21a \oplus 41a$	5	.
324a	4	$1^+ \oplus 35a \oplus 41a$	$1^+ \oplus 35a \oplus 41a$	5	.
351a	3	$35a$	$35a$	5	.
405a	4	$189a$	$189a$	3	p
405b	4	$189b$	$189b$	3	p
463a	0	$35a$	$35a$	5	.
567a	4	$41a$	$41a$	7	p
567b	4	$21a$	$21a$	7	p
567c	4	$41b$	$41b$	7	p
567d	4	$21b$	$21b$	7	p
567e	4	$35a \oplus 41a$	$35a \oplus 41a$	5	.
567f	4	$35b \oplus 41b$	$35b \oplus 41b$	7	.
567g	4	$35a \oplus 41a$	$35a \oplus 41a$	7	.
602a	0	$35b \oplus 41a$	$35b \oplus 41a$	5	.
648a	4	1^+	1^+	7	p
729a	6	$7a$	$7a$	7	p
729b	6	$7b \oplus 35b$	$7b \oplus 35b$	7	.
729c	6	$7a \oplus 35a$	$7a \oplus 35a$	7	.
891a	4	$35b$	$35b$	7	p
891b	4	$35a$	$35a$	7	p
891c	4	$1^- \oplus 35a \oplus 35a \oplus 35b \oplus 35b \oplus 41b$	$1^- \oplus 35a \oplus 35a \oplus 35b \oplus 35b \oplus 41b$	7	.
891d	4	$1^+ \oplus 35a \oplus 35a \oplus 35b \oplus 35b \oplus 41a$	$1^+ \oplus 35a \oplus 35a \oplus 35b \oplus 35b \oplus 41a$	7	.

Tabelle A.66: Unzerlegbare Moduln

Bem.:

Unzerlegbare Produkte: $7a \otimes 21a, 7a \otimes 27a$

Halbeinfache Produkte: $7a \otimes 7a, 7a \otimes 35a$

Tabelle A.67: Zerlegung der Tensorprodukte 1/3

\otimes	1 ⁺	21a	21b	27a	35b	125a	147a	162a	162b	189a	189c	189d	204a	243a	294a	351a	405a	405b	567a	891a	891b	
Block	1	1	1	2	1	1	1	4	5	3	1	1	1	2	1	1	3	4	1	1	1	
7a ⊗ 7a	1	1	·	1	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
7a ⊗ 21a	·	·	·	·	·	·	1	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
7a ⊗ 27a	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	1	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
7a ⊗ 35a	·	1	·	·	1	·	·	·	·	1	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
7a ⊗ 41a	·	·	·	·	·	1	·	1	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
7a ⊗ 162a	·	·	·	·	·	·	·	1	·	·	·	·	·	·	·	·	1	·	1	·	·	·
7a ⊗ 189a	·	·	·	·	·	·	·	1	·	·	·	·	·	·	·	1	1	1	·	·	·	·
21a ⊗ 21a	·	1	·	1	·	·	·	·	·	1	·	·	1	·	·	·	·	·	·	·	·	·
21a ⊗ 27a	·	·	·	1	·	·	·	1	·	1	1	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
21a ⊗ 35a	·	·	1	·	·	·	1	1	·	·	·	·	·	·	·	·	·	1	·	·	·	·
21a ⊗ 41a	·	·	·	·	·	·	·	1	·	·	·	·	·	·	1	·	1	·	·	·	·	·
21a ⊗ 162a	·	·	·	·	·	·	·	3	·	·	·	·	·	1	·	·	2	1	1	·	·	1
21a ⊗ 189a	·	·	·	1	·	·	·	2	1	1	1	·	·	·	·	·	2	2	1	1	·	·

Tabelle A.68: Zerlegung der Tensorprodukte 2/3

\otimes	1 ⁺	7b	21a	27a	50a	162a	162b	189a	189b	189c	243a	253a	324a	351a	405a	405b	463a	567a	567b	567e	602a	891b	
Block	1	1	1	2	1	4	5	3	2	1	2	1	1	1	3	2	1	1	1	1	1	1	
27a ⊗ 27a	·	·	·	2	·	1	·	·	·	1	·	·	1	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
27a ⊗ 35a	·	·	·	·	·	·	·	·	1	·	·	·	·	1	1	·	·	·	·	·	·	·	·
27a ⊗ 41a	·	·	·	1	·	2	·	1	·	·	·	·	·	·	·	·	·	1	·	·	·	·	·
27a ⊗ 162a	·	·	·	·	·	5	·	·	·	·	1	·	·	·	3	1	·	2	1	·	·	·	·
27a ⊗ 189a	·	·	·	·	·	3	1	2	·	1	·	·	·	·	3	3	·	·	·	1	·	·	1
35a ⊗ 35a	1	1	1	1	·	·	1	·	·	·	·	·	·	·	1	·	·	·	·	·	·	1	·
35a ⊗ 41a	·	·	·	·	·	1	·	·	·	·	·	·	·	·	1	1	1	·	·	·	·	·	·
41a ⊗ 41a	1	·	·	·	1	1	·	·	·	·	1	1	·	·	1	·	·	1	·	·	·	·	·

Tabelle A.69: Zerlegung der Tensorprodukte 3/3

\otimes	27a	27b	162a	162b	189a	189c	189d	243a	243b	324a	405a	405b	567a	567b	567c	567d	567f	567g	648a	729a	729b	729c	891a	891b	891c	891d	
Block	2	3	4	5	3	1	1	2	3	1	3	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
35a ⊗ 162a	·	·	3	2	·	·	·	·	·	·	4	3	1	1	·	·	·	·	·	·	·	·	1	·	·	·	·
35a ⊗ 189a	·	1	4	3	·	·	1	·	·	·	3	3	1	·	1	1	·	·	·	·	·	·	1	·	·	·	·
41a ⊗ 162a	·	·	5	1	·	·	·	2	·	·	4	2	1	1	·	·	·	·	·	·	1	·	·	1	·	·	·
41a ⊗ 189a	1	·	4	2	1	·	·	·	·	·	4	5	1	1	·	·	·	·	·	·	·	·	1	1	·	·	·
162a ⊗ 162a	·	·	15	7	·	·	·	5	·	·	16	10	5	3	1	·	·	·	1	1	·	·	2	3	·	·	·
162a ⊗ 189a	·	·	16	10	·	·	·	3	1	·	18	15	4	2	2	1	·	·	·	1	·	·	3	4	·	·	·
189a ⊗ 189a	2	·	18	15	·	1	·	3	3	1	18	17	·	2	·	2	5	4	·	·	1	1	·	·	3	3	·

A.7.3 $\mathbb{F}_5\mathcal{S}_9$

Einf. Moduln	1^+	1^-	$8a$	$8b \cong 1^- \otimes 8a$	$21a$	$21b \cong 1^- \otimes 21a$
Partition	(9)	(3,2 ³)	(8,1)	(2 ⁴ ,1)	(3 ³)	(6,3)
Block	1	2	3	4	5	5
p -Ant.	0	0	0	0	0	0

Tabelle A.70: Einfache Moduln 1/5

Einf. Moduln	$27a$	$27b \cong 1^- \otimes 27a$	$28a$	$28b \cong 1^- \otimes 28a$	$34a$	$34b \cong 1^- \otimes 34a$
Partition	(7,2)	(2 ³ ,1 ³)	(7,1 ²)	(3,2 ² ,1 ²)	(4,3,2)	(5,4)
Block	5	5	4	3	4	3
p -Ant.	0	0	0	0	0	0

Tabelle A.71: Einfache Moduln 2/5

Einf. Moduln	$56a$	$56b \cong 1^- \otimes 56a$	$70a$	$83a$	$83b \cong 1^- \otimes 83a$
Partition	(4,2,1 ³)	(6,1 ³)	(5,1 ⁴)	(4,2 ² ,1)	(4 ² ,1)
Block	1	2	6	2	1
p -Ant.	0	0	1	0	0

Tabelle A.72: Einfache Moduln 3/5

Einf. Moduln	$105a$	$105b \cong 1^- \otimes 105a$	$120a$	$120b \cong 1^- \otimes 120a$
Partition	(6,2,1)	(3,2,1 ⁴)	(5,2 ²)	(3 ² ,1 ³)
Block	7	8	9	10
p -Ant.	1	1	1	1

Tabelle A.73: Einfache Moduln 3/5

Einf. Moduln	$133a$	$133b \cong 1^- \otimes 133a$	$134a$	$134b \cong 1^- \otimes 134a$
Partition	(4,3,1 ²)	(5,2,1 ²)	(3 ² ,2,1)	(5,3,1)
Block	1	2	3	4
p -Ant.	0	0	0	0

Tabelle A.74: Einfache Moduln 5/5

M	p -Ant.	$M/\text{rad}(M)$	$\text{soc}(M)$	Loewyl.	projektiv
<u>50a</u>	2	$8a$	$8a$	3	p
<u>50b</u>	2	$8b$	$8b$	3	p
<u>75a</u>	2	$27a$	$27a$	3	p
<u>75b</u>	2	$27b$	$27b$	3	p
<u>85a</u>	1	1^+	1^+	3	p
<u>85b</u>	1	1^-	1^-	3	p
<u>90a</u>	1	$21a$	$21a$	3	p
<u>90b</u>	1	$21b$	$21b$	3	p
<u>190a</u>	1	$28a$	$28a$	3	p
<u>190b</u>	1	$28b$	$28b$	3	p
<u>210a</u>	1	$34a$	$34a$	3	p
<u>210b</u>	1	$34b$	$34b$	3	p
<u>245a</u>	1	$56a$	$56a$	3	p
<u>245b</u>	1	$56b$	$56b$	3	p
<u>300a</u>	2	$83a$	$83a$	3	p
<u>300b</u>	2	$83b$	$83b$	3	p
<u>330a</u>	1	$134a$	$134a$	3	p
<u>330b</u>	1	$134b$	$134b$	3	p
<u>405a</u>	1	$133a$	$133a$	3	p
<u>405b</u>	1	$133b$	$133b$	3	p

Tabelle A.75: Unzerlegbare Moduln

Bem.:
Halbeinfache Produkte: $8a \otimes 8a$, $8a \otimes 21a$, $8a \otimes 28a$, $8a \otimes 34a$, $21a \otimes 21a$

\otimes	1^+	$8a$	$8b$	$21a$	$21b$	$27a$	$27b$	$28a$	$28b$	$34a$	$34b$	$50a$	$50b$	$56a$	$56b$	$70a$	$75a$	$75b$	$83a$	$83b$	$90a$	$90b$
Block	1	3	4	5	5	5	5	4	3	4	3	3	4	1	2	6	5	5	2	1	5	5
$8a \otimes 8a$	1	1	.	.	.	1	.	1
$8a \otimes 21a$	1
$8a \otimes 27a$.	1	1	1
$8a \otimes 28a$.	1	.	.	.	1	.	1	1
$8a \otimes 34a$.	.	.	1	1	1	.	.	.
$8a \otimes 56a$	1	1
$8a \otimes 83a$	1
$8a \otimes 133a$
$8a \otimes 134a$.	.	.	1	1
$21a \otimes 21a$	1	.	.	1	.	1	1	1	.	.
$21a \otimes 27a$.	.	.	1	1	.	.
$21a \otimes 28a$	1
$21a \otimes 34a$.	1	1	.	1
$21a \otimes 56a$	1
$21a \otimes 83a$.	.	.	1	.	1
$21a \otimes 133a$.	.	.	1	.	1	1
$21a \otimes 134a$.	1	1	.	1	1	1
$27a \otimes 27a$	1	1	1	.	.	1	.	1
$27a \otimes 28a$.	1	1	1
$27a \otimes 34a$	1
$27a \otimes 56a$	1	1
$27a \otimes 83a$.	.	.	1
$27a \otimes 133a$.	.	.	1	1
$27a \otimes 134a$	1	1	.
$28a \otimes 28a$	1	1	.	.	.	1	.	1	1	1
$28a \otimes 34a$.	.	.	1	1
$28a \otimes 56a$.	.	1	1	.	1
$28a \otimes 83a$	1	.
$28a \otimes 133a$	1	1
$28a \otimes 134a$.	.	.	1	1	1	.	.	.
$34a \otimes 34a$	1	1	.	1	.	1	.	1	.	1
$34a \otimes 56a$
$34a \otimes 83a$.	1	1	1
$34a \otimes 133a$	1	.	1	1	1	1
$34a \otimes 134a$.	1	.	1	.	1	.	1	.	1	1	1	1	.	1	.	.	.
$56a \otimes 56a$	1	1
$56a \otimes 83a$	1	1	.
$56a \otimes 133a$	1	.	1	.	1	.	1
$56a \otimes 134a$	1	1	2	1
$83a \otimes 83a$	1	1	.	.	.	2	2	.	.	.	1	.
$83a \otimes 133a$	1	2	1	.	1	.	1	.
$83a \otimes 134a$	1	.	1	.	1	.	.	.	2	2	.	.	.	1	.
$133a \otimes 133a$	1	1	1	.	.	3	3	1	.	.	2	.
$133a \otimes 134a$.	1	4	2	1	.	.	2	.
$134a \otimes 134a$	1	1	.	1	.	1	.	1	.	1	.	1	.	.	.	4	3	.	.	.	1	1

Tabelle A.76: Zerlegung der Tensorprodukte 1/3

Tabelle A.77: Zerlegung der Tensorprodukte 2/3

\otimes Block	105a 7	105b 8	120a 9	120b 10	133a 1	133b 2	134a 3	134b 4	190a 4	190b 3	210a 4	210b 3	245a 1	245b 2	300a 2	300b 1	330a 3	330b 4	405a 1	405b 2	
8a ⊗ 8a
8a ⊗ 21a	1
8a ⊗ 27a	1
8a ⊗ 28a	1
8a ⊗ 34a	1
8a ⊗ 56a	.	1	1
8a ⊗ 83a	1	.	1
8a ⊗ 133a	.	.	.	1	.	.	1	1	1	1
8a ⊗ 134a	.	.	.	1	1	.	1a	1	.	1
21a ⊗ 21a	.	.	1	.	1
21a ⊗ 27a	1	1	.	.	.
21a ⊗ 28a	.	.	.	1	.	.	1	1
21a ⊗ 34a	1	1	1
21a ⊗ 56a	.	.	.	1	1	.	1	.	.	1
21a ⊗ 83a	1	.	1	1	1	1	.	1	.	1	.	.
21a ⊗ 133a	1	1	2	1	.	.	1	1	.	1	1	2	.	.
21a ⊗ 134a	2	.	1	1	.	.	1	1	1	.	1	1	1	1	1
27a ⊗ 27a	2	.	1	1
27a ⊗ 28a	2	1	1
27a ⊗ 34a	.	.	.	1	.	.	1	1	.	1
27a ⊗ 56a	.	2	.	1	1	.	.	2	1
27a ⊗ 83a	.	1	1	1	1	.	.	.	2	.	2	.	1	.	.
27a ⊗ 133a	.	1	1	1	1	1	.	2	1	3	1	3	1
27a ⊗ 134a	.	1	.	2	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	2	.	3	.	2	1	1
28a ⊗ 28a	2	.	1	1
28a ⊗ 34a	1	.	1	1	.	1
28a ⊗ 56a	.	2	.	1	1	.	.	1	1	1	.
28a ⊗ 83a	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	1	.	2	.	1	1	1
28a ⊗ 133a	1	1	1	2	1	.	1	1	2	1	1	2	2
28a ⊗ 134a	.	1	1	2	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	2	.	3	.	2	1	1
34a ⊗ 34a	1	.	1	.	1	.	1a	1	1
34a ⊗ 56a	.	.	1	1	.	.	.	1	.	.	.	1	.	1	1	1	1
34a ⊗ 83a	2	.	1	1	.	.	1	.	1	.	1	.	.	1	1	.	1	.	1	1	1
34a ⊗ 133a	2	1	1	2	1	1	1	1	2	2	1	2	2
34a ⊗ 134a	3	.	2	1	.	.	1	.	1	1	1	.	2	1	2	2	2
56a ⊗ 56a	2	1	2	1	1	.	.	.	1	1	1	.	.	1	1	1	1
56a ⊗ 83a	1	.	2	1	.	.	1	.	.	.	1	.	1	.	1	2	3	1	1	2	2
56a ⊗ 133a	3	2	2	3	.	.	.	1	.	.	1	1	1	1	1	2	3	3	2	3	3
56a ⊗ 134a	2	1	3	2	1	.	1	.	1	3	1	2	5	3	3	3
83a ⊗ 83a	3	1	3	2	1	.	.	.	1	.	1	.	1	2	2	1	3	2	2	2	2
83a ⊗ 133a	4	3	4	3	.	.	.	1	1	1	1	1	1	2	2	2	4	4	5	4	4
83a ⊗ 134a	6	2	3	4	.	.	.	2	.	.	1	.	1	3	3	2	5	3	4	4	4
133a ⊗ 133a	5	5	5	7	1	.	.	.	1	2	1	2	2	3	5	4	6	7	7	5	5
133a ⊗ 134a	6	4	6	6	.	.	1	.	1	2	2	2	3	3	4	4	6	6	6	7	7
134a ⊗ 134a	3	9	7	5	1	.	1	.	3	.	2	1	2	5	5	3	7	5	6	6	6

\otimes	85a	85b	50a	50b	90b	90a	75a	75b	190a	190b	210b	210a	70a	245b	245a	300b	300a	105a	105b	120a	120b	405b	405a	330b	330a	
Block	1	2	3	4	5	5	5	5	4	3	3	4	6	2	1	1	2	7	8	9	10	1	2	4	3	
8a \otimes 70a	1	1	1
21a \otimes 70a	1	1	1	1
27a \otimes 70a	2	1	1	.	.	1	1	1	1	1	1	1	.	.
28a \otimes 70a	1	1	.	.	1	1	1	.	.	1	1	.	.	1	1	1	.	.
34a \otimes 70a	1	.	.	1	1	.	.	1	1	1	1	1	1	1
70a \otimes 70a	1	1	1	1	.	.	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	1	1	1	1	1
56a \otimes 70a	.	.	1	1	.	.	1	1	1	1	.	.	1	1	1	1	1	2	2	1	1	2	2	2	2	2
83a \otimes 70a	1	1	1	1	1	2	2	1	1	2	2	2	2	2	2	2
105a \otimes 70a	1	1	1	1	.	.	2	2	2	1	1	3	3	3	3	3	3	3	2	2
120a \otimes 70a	1	1	.	.	1	1	2	1	1	2	2	3	3	4	4	3	3	3	3	3
133a \otimes 70a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	3	3	3	3	3	3	3	4	4
134a \otimes 70a	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	4	4	4	4	4
8a \otimes 105a	1	.	1	1	.	.	.	2	.	1
21a \otimes 105a	1	1	.	1	.	1	1	1	1	.	2
27a \otimes 105a	.	.	1	.	.	.	2	.	2	.	.	.	1	2	.	1	.	4	.	2	.	1	.	1	.	.
28a \otimes 105a	.	.	1	.	.	.	2	.	2	.	.	.	1	2	.	.	.	4	.	2	.	1	1	1	.	.
34a \otimes 105a	1	1	2	.	1	1	2	1	2	.	3	
56a \otimes 105a	.	.	.	1	.	.	.	2	.	2	.	.	2	1	2	.	1	1	5	1	3	2	3	1	2	
83a \otimes 105a	1	.	1	.	.	.	2	1	.	1	1	3	1	3	2	4	3	4	2	6	
105a \otimes 105a	1	.	2	.	1	.	4	.	4	.	1	.	3	5	1	3	1	9	.	6	1	4	3	5	1	
120a \otimes 105a	.	.	1	.	1	.	2	.	2	.	2	1	3	3	1	4	2	6	1	5	3	5	4	6	3	
133a \otimes 105a	1	1	.	1	1	1	1	2	3	2	3	3	4	3	4	4	5	5	5	4	6	
134a \otimes 105a	2	.	1	.	1	.	3	2	1	2	2	6	1	5	3	6	4	6	3	9	
8a \otimes 120a	1	.	1	.	1	.	1	.	.
21a \otimes 120a	1	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	1	.	1	1	.	.	.	2	1	1
27a \otimes 120a	1	.	.	.	1	.	1	1	.	1	1	2	.	3	.	1	1	2	.	
28a \otimes 120a	1	.	.	.	1	1	.	1	.	2	.	1	.	2	1	2	1	1
34a \otimes 120a	1	.	.	1	.	1	.	1	1	1	1	2	1	2	2	1	1	2	
56a \otimes 120a	1	.	.	1	.	1	.	1	1	.	2	1	2	1	3	2	3	3	2	2	3	
83a \otimes 120a	1	1	1	.	1	1	1	2	1	2	2	3	2	4	4	4	3	4	3	4	4
120a \otimes 120a	1	.	1	.	.	1	3	.	1	.	2	1	4	3	2	4	4	5	3	7	5	4	5	6	4	
133a \otimes 120a	.	.	.	1	.	2	1	1	1	2	2	1	3	3	2	3	4	4	5	5	4	5	7	6	6	
134a \otimes 120a	.	.	.	1	1	1	.	2	1	2	1	2	3	2	3	3	4	3	6	4	6	6	6	5	7	

Tabelle A.78: Zerlegung der Tensorprodukte 3/3

A.7.4 $\mathbb{F}_7\mathcal{S}_9$

Einf. Moduln	1^+	1^-	$8a$	$8b \cong 1^- \otimes 8a$	$19a$	$19b \cong 1^- \otimes 19a$	$28a$	$28b \cong 1^- \otimes 28a$
Partition	(9)	$(2^3, 1^3)$	(8,1)	$(2^2, 1^5)$	(7,2)	$(3^2, 1^3)$	$(7, 1^2)$	$(3, 1^6)$
Block	1	2	2	1	2	1	3	4
p -Ant.	0	0	0	0	0	0	1	1

Tabelle A.79: Einfache Moduln 1/4

Einf. Moduln	$42a$	$42b$	$42c \cong 1^- \otimes 42b$	$47a$	$47b \cong 1^- \otimes 47a$	$56a$	$56b \cong 1^- \otimes 56a$	$70a$
Partition	(3^3)	(5,4)	$(2^4, 1)$	(6,3)	$(3, 2^2, 1^2)$	$(6, 1^3)$	$(4, 1^5)$	$(5, 1^4)$
Block	5	6	7	1	2	8	9	10
p -Ant.	1	1	1	0	0	1	1	1

Tabelle A.80: Einfache Moduln 2/4

Einf. Moduln	$84a$	$84b \cong 1^- \otimes 84a$	$101a$	$101b \cong 1^- \otimes 101a$	$105a$	$105b \cong 1^- \otimes 105a$
Partition	$(4^2, 1)$	$(3, 2^3)$	$(5, 2^2)$	$(4, 3, 1^2)$	$(6, 2, 1)$	$(3, 2, 1^4)$
Block	11	12	2	1	13	14
p -Ant.	1	1	0	0	1	1

Tabelle A.81: Einfache Moduln 3/4

Einf. Moduln	$115a$	$115b \cong 1^- \otimes 115a$	$168a$	$168b \cong 1^- \otimes 168a$	$189a$	$189b \cong 1^- \otimes 189a$
Partition	$(5, 3, 1)$	$(4, 2^2, 1)$	$(4, 3, 2)$	$(3^2, 2, 1)$	$(5, 2, 1^2)$	$(4, 2, 1^3)$
Block	1	2	15	16	17	18
p -Ant.	0	0	1	1	1	1

Tabelle A.82: Einfache Moduln 4/4

M	p -Ant.	$M/\text{rad}(M)$	$\text{soc}(M)$	Loewyl.	projektiv
$35a$	1	$8a$	$8a$	3	p
$35b$	1	$8b$	$8b$	3	p
$49a$	2	1^+	1^+	3	p
$49b$	2	1^-	1^-	3	p
$147a$	2	$19a$	$19a$	3	p
$147b$	2	$19b$	$19b$	3	p
$210a$	1	$47a$	$47a$	3	p
$210b$	1	$47b$	$47b$	3	p
$336a$	1	$101a$	$101a$	3	p
$336b$	1	$101b$	$101b$	3	p
$378a$	1	$115a$	$115a$	3	p
$378b$	1	$115b$	$115b$	3	p

Tabelle A.83: Unzerlegbare Moduln

Bem.:

Halbeinfache Produkte: $8a \otimes 19a, 8a \otimes 42a, 8a \otimes 56a, 8a \otimes 70a$

\otimes	1^+	$8a$	$19a$	$19b$	$28a$	$28b$	$35a$	$42a$	$42b$	$42c$	$47a$	$47b$	$56a$	$56b$	$70a$	$84a$	$84b$	$101a$	$101b$	
Block	1	2	2	1	3	4	2	5	6	7	1	2	8	9	10	11	12	2	1	
$8a \otimes 8a$	1	.	.	.	1	.	1
$8a \otimes 19a$	1
$8a \otimes 47a$.	.	1	1
$8a \otimes 101a$
$8a \otimes 115a$	1	.	1	.	.
$19a \otimes 19a$	1	1	.	.	.	1
$19a \otimes 47a$.	1	.	.	1	1	.	1	.	.
$19a \otimes 101a$	1	.	.	.	1	1	1	.	1	.
$19a \otimes 115a$.	.	1	1	1	.	.	.	1
$47a \otimes 47a$	1	.	.	.	1	.	1	1	1	.	.	.	1	.	.	1
$47a \otimes 101a$.	.	1	1	1	.	.	.	1	1	1	1	1	1	.	.
$47a \otimes 115a$	1	.	.	.	1	.	1	.	1	.	1	2	1	.	1	.
$101a \otimes 101a$	1	.	.	1	1	.	1	1	2	1	.	.	2	2	2	3	2	.	.	.
$101a \otimes 115a$.	1	.	.	2	1	.	1	1	1	.	1	2	1	2	3	2	1	.	.
$115a \otimes 115a$	1	.	.	1	1	.	1	2	2	2	.	.	3	2	3	3	3	.	.	.

\otimes	$105a$	$105b$	$115a$	$115b$	$147a$	$147b$	$168a$	$168b$	$189a$	$189b$	$210a$	$210b$	$336a$	$336b$	$378a$	$378b$
Block	13	14	1	2	2	1	15	16	17	18	1	2	2	1	1	2
$8a \otimes 8a$
$8a \otimes 19a$	1
$8a \otimes 47a$	1	1
$8a \otimes 101a$.	.	1	.	.	.	1	.	1	.	.	.	1	.	.	.
$8a \otimes 115a$	1	.	1	1	.
$19a \otimes 19a$.	.	1	.	1
$19a \otimes 47a$	1	1	.	1	.	1
$19a \otimes 101a$	1	1	1	1	1	.	.	1	.	1	.
$19a \otimes 115a$	1	.	.	1	.	.	1	1	1	1	.	.	1	.	2	.
$47a \otimes 47a$	2	.	1	.	1	.	2	.	1	.	1	.	1	.	1	.
$47a \otimes 101a$	2	.	.	1	.	.	2	2	3	2	1	.	2	1	2	1
$47a \otimes 115a$	3	3	3	4	2	1	.	2	1	2	1
$101a \otimes 101a$	3	3	1	.	1	.	5	4	5	5	2	1	3	4	2	3
$101a \otimes 115a$	4	3	.	.	.	1	6	5	7	6	2	1	2	3	4	4
$115a \otimes 115a$	5	3	1	.	.	2	6	5	7	6	2	1	4	4	4	4

Tabelle A.84: Zerlegung der Tensorprodukte $1/4$ Tabelle A.85: Zerlegung der Tensorprodukte $2/4$

⊗ Block	49a	49b	35a	35b	147a	147b	42a	28a	28b	70a	42b	42c	210a	210b	56a	56b	84a	84b	336a	336b	105a	105b	378a	378b	168a	168b	189a	189b		
	1	2	2	1	2	1	5	3	4	10	6	7	1	2	8	9	11	12	2	1	13	14	1	2	15	16	17	18		
8a ⊗ 28a	-	-	1	-	-	-	-	1	-	-	-	-	-	-	1	-	-	-	-	-	1	-	-	-	-	-	-	-		
19a ⊗ 28a	-	-	-	-	-	-	-	1	-	-	-	-	1	-	-	-	-	-	-	-	1	-	-	-	-	-	-	1	-	
28a ⊗ 28a	1	-	1	-	1	-	-	1	-	1	-	-	-	-	1	-	-	-	-	-	2	-	-	-	-	-	-	1	-	
42a ⊗ 28a	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1	1	1	1	-	-	-	-	-	1	1	-	-	
42b ⊗ 28a	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1	-	1	-	-	-	1	-	-	-	1	-	1	-	1	-	-	1	-	
47a ⊗ 28a	-	-	-	-	1	-	-	-	-	-	1	-	1	-	1	-	1	-	-	-	2	-	1	-	-	-	-	1	-	
56a ⊗ 28a	-	-	1	-	-	-	-	1	-	1	-	-	1	-	1	1	-	-	1	-	2	-	-	-	-	-	-	2	1	
70a ⊗ 28a	-	-	-	-	-	-	-	1	1	1	-	-	-	-	1	1	-	-	-	-	1	1	1	1	-	-	-	2	2	
84a ⊗ 28a	-	-	-	-	-	-	1	-	-	-	1	-	1	-	-	-	1	-	1	-	-	-	2	-	2	1	1	1	1	
101a ⊗ 28a	-	-	-	-	-	-	1	-	-	-	-	-	-	-	1	-	1	-	1	-	1	-	2	1	2	1	2	1	2	1
105a ⊗ 28a	-	-	1	-	1	-	-	2	-	1	1	-	2	-	2	-	-	-	1	-	4	-	1	-	1	-	3	1	1	
115a ⊗ 28a	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1	1	-	1	-	-	-	2	-	2	1	1	-	1	-	3	1	2	2	1	
168a ⊗ 28a	-	-	-	-	-	-	1	-	-	-	1	-	-	-	-	-	2	1	2	1	2	1	1	-	3	1	4	3	2	1
189a ⊗ 28a	-	-	-	-	1	-	-	1	-	2	1	-	1	-	2	1	1	1	2	1	3	1	2	1	2	1	2	1	4	3
8a ⊗ 42a	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1	1	-	-	
19a ⊗ 42a	-	-	-	-	-	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1	1	-	-	-	-	-	
42a ⊗ 42a	1	1	-	-	1	1	1	-	-	-	-	-	-	-	1	1	1	1	1	1	1	-	-	-	-	-	-	1	1	
42b ⊗ 42a	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
47a ⊗ 42a	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1	1	-	-	1	1	1	1	1	-	-	-	-	1	1	1	1	
56a ⊗ 42a	-	-	-	-	-	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1	1	1	1	1	-	-	1	1	1	1	1	1	
70a ⊗ 42a	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	2	2	2	2	2	2	2	2
84a ⊗ 42a	-	-	-	-	-	-	1	1	1	-	-	-	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	
101a ⊗ 42a	-	-	-	-	-	-	1	1	1	-	-	-	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	3	3
105a ⊗ 42a	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1	1	-	-	-	-	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2
115a ⊗ 42a	-	-	-	-	1	1	-	-	-	2	1	1	-	-	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
168a ⊗ 42a	-	-	1	1	-	-	-	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	3	3	2	2	3	3	4	4	
189a ⊗ 42a	-	-	-	-	-	-	1	-	-	2	1	1	1	1	1	1	1	2	2	3	3	2	2	2	2	4	4	4	4	
8a ⊗ 42b	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1	-	1	-	-	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
19a ⊗ 42b	-	-	-	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1	-	1	-	-	-	-	-	
42b ⊗ 42b	1	-	1	-	-	-	1	1	-	-	1	-	-	-	1	-	1	1	1	1	-	1	-	1	-	1	1	1	-	
47a ⊗ 42b	-	-	1	-	-	-	-	1	-	-	-	-	1	-	-	-	1	-	1	-	2	-	1	-	2	1	1	-	-	
56a ⊗ 42b	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1	1	-	-	-	1	-	1	-	1	-	1	-	2	-	2	1	1	2	1	
70a ⊗ 42b	-	-	-	-	-	-	-	-	-	2	-	-	-	-	-	1	1	1	1	1	1	-	-	1	1	1	2	2	1	
84a ⊗ 42b	-	-	1	-	-	-	-	1	-	1	1	1	1	-	1	-	1	1	1	1	2	-	1	1	2	2	2	2	1	
101a ⊗ 42b	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1	1	-	1	-	1	-	1	1	2	1	2	1	1	1	2	2	3	2	2	
105a ⊗ 42b	-	-	-	-	1	-	-	1	1	-	-	1	-	2	-	1	-	2	-	2	1	3	-	2	-	3	1	3	1	
115a ⊗ 42b	-	-	-	-	1	-	1	1	-	1	1	-	1	-	2	-	1	1	1	1	1	2	-	2	2	2	2	3	2	
168a ⊗ 42b	-	-	-	-	1	-	1	1	-	1	1	1	2	1	1	1	2	2	2	2	3	1	2	2	3	3	4	4	3	
189a ⊗ 42b	-	-	-	-	-	-	1	1	-	2	1	-	1	-	2	1	2	1	3	2	3	1	3	2	4	3	6	4	4	

Tabelle A.86: Zerlegung der Tensorprodukte 3/4

⊗ Block	49a 1	49b 2	35a 2	35b 1	147a 2	147b 1	42a 5	28a 3	28b 4	70a 10	42b 6	42c 7	210a 1	210b 2	56a 8	56b 9	84a 11	84b 12	336a 2	336b 1	105a 13	105b 14	378a 1	378b 2	168a 15	168b 16	189a 17	189b 18	
8a ⊗ 56a	1	.	1	1	1	1	.
19a ⊗ 56a	1	1	1	.	.	1	.	.	.	1	1
47a ⊗ 56a	1	.	1	.	.	1	.	1	.	1	.	1	1	2	.	1	.	1	.	1	3	1
56a ⊗ 56a	1	.	1	.	1	.	.	1	1	1	1	.	1	.	1	1	.	1	1	.	2	1	1	1	1	.	2	2	
70a ⊗ 56a	.	.	1	1	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	1	1	1	1	2	2
84a ⊗ 56a	1	.	.	1	1	.	1	.	1	2	1	2	1	2	1	1	.	2	1	3	2	3	2
101a ⊗ 56a	1	1	.	1	1	.	1	1	1	.	2	1	2	2	2	1	2	1	3	2	3	3	2
105a ⊗ 56a	.	.	1	.	1	.	.	2	.	2	1	.	2	.	2	1	1	.	2	1	5	1	2	1	2	1	5	3	3
115a ⊗ 56a	1	.	1	.	1	2	.	1	.	1	1	2	1	2	1	2	1	2	1	3	2	4	3	3	3
168a ⊗ 56a	1	.	1	1	1	1	1	.	1	.	3	2	3	3	3	2	1	4	3	6	5	5	4
189a ⊗ 56a	.	.	1	.	1	1	1	2	1	2	2	1	3	1	2	3	2	3	2	3	2	5	3	3	3	5	4	6	5
8a ⊗ 70a	1	1	1	1	1
19a ⊗ 70a	1	1	1	1	1	1	1	1
47a ⊗ 70a	1	1	1	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	3	3
70a ⊗ 70a	1	1	1	1	1	1	.	1	1	1	2	2	1	1	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	2	2	2
84a ⊗ 70a	2	1	1	.	.	1	1	2	2	2	2	2	1	1	2	2	3	3	3	3
101a ⊗ 70a	1	1	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	4	4	3	3	3
105a ⊗ 70a	1	1	.	1	1	2	.	.	1	1	2	2	1	1	2	2	3	3	2	2	2	2	2	5	5
115a ⊗ 70a	2	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	3	3	4	4	4	4	4
168a ⊗ 70a	2	.	.	2	1	1	1	1	1	3	3	4	4	4	2	2	4	4	6	6	6	6	6
189a ⊗ 70a	.	.	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	2	2	3	3	3	3	5	5	4	4	6	6	6	6	6
8a ⊗ 84a	1	1	1	.	1	.	.	.
19a ⊗ 84a	1	.	.	.	1	.	1	1	1	1	.	.	.	1	1	.	.
47a ⊗ 84a	1	.	1	1	.	1	1	.	1	.	1	1	1	1	1	1	2	.	2	1	2	2	2	2	1
84a ⊗ 84a	1	.	1	.	1	.	1	1	.	2	1	1	1	1	2	1	2	2	2	2	3	1	2	2	3	3	4	4	3
101a ⊗ 84a	1	1	1	1	.	2	1	1	1	1	2	1	2	2	3	2	3	2	3	2	4	3	5	4	4
105a ⊗ 84a	1	.	1	.	.	1	2	.	2	.	1	.	3	1	3	2	4	1	4	2	6	4	5	3	3
115a ⊗ 84a	.	.	1	.	.	.	1	2	.	2	1	1	2	1	2	1	2	2	3	2	4	2	3	3	5	4	6	5	5
168a ⊗ 84a	.	.	1	.	1	1	1	2	1	3	2	2	2	2	3	2	3	3	4	3	6	4	5	4	6	6	8	7	7
189a ⊗ 84a	1	.	2	1	1	3	2	1	2	1	3	2	4	3	5	4	5	3	6	5	8	7	9	8	8
8a ⊗ 105a	1	.	.	1	1	.	1	2	1	.	.
19a ⊗ 105a	.	.	1	1	.	1	1	.	1	.	1	.	.	1	.	1	2	.	1	.	1	.	2	.	.
47a ⊗ 105a	.	.	1	.	1	.	.	2	.	1	2	.	2	.	2	.	2	.	2	.	4	.	3	.	3	1	4	1	1
101a ⊗ 105a	1	.	1	1	.	2	2	1	2	.	2	1	3	2	3	3	4	1	4	3	6	5	6	5	5
105a ⊗ 105a	1	.	2	.	2	.	1	4	.	3	3	.	4	.	5	1	4	1	4	1	9	.	5	1	5	2	9	4	4
115a ⊗ 105a	1	.	2	1	.	2	2	.	3	.	2	1	4	2	4	3	5	1	5	3	7	5	7	5	5
168a ⊗ 105a	1	.	3	1	.	2	3	1	3	1	2	1	6	4	6	5	5	2	7	5	10	9	9	7	7
189a ⊗ 105a	.	.	1	.	2	.	2	3	1	5	3	1	4	1	5	3	5	3	6	5	9	4	7	5	9	7	13	10	10
8a ⊗ 168a	1	1	.	.	1	.	.	.	1	.	2	1	.	.	.
19a ⊗ 168a	1	.	1	.	.	.	1	1	1	1	1	.	1	1	1	2	2	2	1
47a ⊗ 168a	1	.	1	.	.	1	2	1	2	.	1	.	2	2	2	2	3	1	3	3	4	4	4	3	3
101a ⊗ 168a	.	.	1	.	1	1	2	2	1	4	2	2	2	2	3	3	4	3	5	4	6	5	6	5	8	7	9	9	9
115a ⊗ 168a	.	.	1	.	1	1	2	3	1	4	2	2	3	3	4	3	5	4	6	5	7	5	6	5	9	8	11	10	10
168a ⊗ 168a	1	.	2	1	2	2	3	4	3	6	3	3	4	4	6	5	6	6	8	7	10	9	9	8	12	11	16	15	15
189a ⊗ 168a	2	1	4	2	1	6	4	3	4	3	5	4	8	7	9	9	9	7	11	10	16	15	17	16	16
8a ⊗ 189a	1	1	.	.	.	1	.	1	.	1	.	.	.	2	1	1
19a ⊗ 189a	1	.	1	.	.	1	.	1	1	1	.	1	1	2	.	1	1	2	1	3	2	2
47a ⊗ 189a	1	.	1	1	.	3	1	.	1	.	3	1	2	1	3	2	4	1	4	2	4	3	6	5	5
101a ⊗ 189a	.	.	1	.	1	1	3	2	1	3	3	2	3	2	3	2	5	4	5	5	6	5	7	6	9	9	10	9	9
115a ⊗ 189a	.	.	1	.	1	1	2	2	1	4	3	2	4	2	3	3	6	5	7	6	7	5	7	6	11	10	12	10	10
189a ⊗ 189a	1	.	2	1	3	2	2	4	4	3	6	6	4	6	5	6	9	8	10	9	13	10	12	10	17	16	18	17	17

Tabelle A.87: Zerlegung der Tensorprodukte 4/4

A.8 \mathcal{S}_{10} **A.8.1** $\mathbb{F}_2\mathcal{S}_{10}$

Einf. Moduln	1^+	$8a$	$16a$	$26a$	$48a$	$128a$
Partition	(10)	(9,1)	(6,4)	(8,2)	(7,3)	(5,4,1)
Block	1	1	1	1	1	2
p -Ant.	0	3	4	1	3	7

Tabelle A.88: Einfache Moduln 1/2

Einf. Moduln	$160a$	$198a$	$200a$	$768a$
Partition	(7,2,1)	(6,3,1)	(5,3,2)	(4,3,2,1)
Block	2	1	1	3
p -Ant.	5	1	3	8

Tabelle A.89: Einfache Moduln 2/2

Bem.:

Einfache Produkte: $8a \otimes 16a$, $16a \otimes 48a$ Halbeinfaches Produkt: $8a \otimes 26a$ Unzerlegbare Produkte: $8a \otimes 8a$, $8a \otimes 48a$, $8a \otimes 198a$, $16a \otimes 16a$, $16a \otimes 26a$, $26a \otimes 26a$, $48a \otimes 48a$

M	p -Ant.	$M/\text{rad}(M)$	$\text{soc}(M)$	Loewyl.	proj.
64a	6	1^+	1^+	7	.
256a	8	1^+	1^+	13	.
384a	7	$26a$	$26a$	7	.
416a	5	$200a$	$200a$	3	.
448a	6	$160a$	$160a$	3	.
676a	2	$1^+ \oplus 26a$	$1^+ \oplus 26a$	9	.
736a	5	$128a$	$160a$	5	.
736b	5	$160a$	$128a$	5	.
768b	8	$160a$	$160a$	5	.
800a	5	$8a \oplus 198a$	$8a \oplus 198a$	9	.
832a	6	$200a$	$200a$	5	.
896a	7	$16a$	$16a$	6	.
896b	7	$160a$	$160a$	6	.
896c	7	$128a$	$160a$	6	.
896d	7	$160a$	$128a$	6	.
1024a	10	$128a$	$128a$	7	p
1052a	2	$48a \oplus 200a$	$48a \oplus 200a$	11	.
1120a	5	$26a$	$26a$	11	.
1120b	5	$8a \oplus 48a$	$8a \oplus 48a$	13	.
1280a	8	$8a$	$8a$	16	.
1584a	4	$198a$	$198a$	12	.
1664a	7	$200a$	$200a$	6	.
1792a	8	$160a$	$160a$	7	p
2136a	3	$26a$	$26a$	15	.
2304a	8	$1^+ \oplus 48a \oplus 198a$	$1^+ \oplus 48a \oplus 198a$	13	.
2400a	5	$198a \oplus 200a$	$198a \oplus 200a$	13	.
2432a	7	$198a$	$198a$	19	.
2432b	7	$198a$	$198a$	19	.
2432c	7	$26a \oplus 198a$	$26a \oplus 198a$	16	.
3136a	6	$26a$	$26a$	15	.
3536a	4	$16a \oplus 198a \oplus 200a$	$16a \oplus 198a \oplus 200a$	19	.
4608a	9	$200a$	$200a$	20	p
4640a	5	$26a \oplus 48a \oplus 200a$	$26a \oplus 48a \oplus 200a$	19	.
4736a	7	$48a \oplus 200a$	$48a \oplus 200a$	19	.
4864a	8	$198a$	$198a$	20	p
4864b	8	$48a$	$48a$	20	p
5376a	8	$26a$	$26a$	18	.
5408a	5	$1^+ \oplus 26a \oplus 198a$	$1^+ \oplus 26a \oplus 198a$	18	.
5888a	8	$1^+ \oplus 198a$	$1^+ \oplus 198a$	18	.
6272a	7	$26a$	$26a$	19	.
6528a	7	$198a \oplus 200a$	$198a \oplus 200a$	14	.
7972a	2	$1^+ \oplus 8a \oplus 16a \oplus 48a \oplus 198a \oplus 200a$	$1^+ \oplus 8a \oplus 16a \oplus 48a \oplus 198a \oplus 200a$	19	.
9008a	4	$16a \oplus 26a \oplus 48a \oplus 198a \oplus 200a$	$16a \oplus 26a \oplus 48a \oplus 198a \oplus 200a$	19	.
15424a	6	$1^+ \oplus 8a \oplus 26a \oplus 198a \oplus 200a$	$1^+ \oplus 8a \oplus 26a \oplus 198a \oplus 200a$	19	.

Tabelle A.90: Unzerlegbare Moduln

\otimes	15104a	5888b	7168a	12544a	4864a	1024a	1792a	4864b	4608a	768a
Block	1	1	1	1	1	2	2	1	1	3
$8a \otimes 768a$	1	2
$16a \otimes 768a$	1	.	1	1	.	1
$26a \otimes 768a$	2	.	1	2	5
$48a \otimes 768a$.	.	1	.	.	2	1	2	2	9
$128a \otimes 768a$.	.	.	2	2	.	8	6	2	14
$160a \otimes 768a$.	.	1	.	1	8	2	6	10	31
$198a \otimes 768a$.	.	1	1	2	6	6	8	9	33
$200a \otimes 768a$.	1	.	2	2	2	10	9	6	28
$768a \otimes 768a$	1	2	1	5	9	14	31	33	28	117

Tabelle A.91: Zerlegung der Tensorprodukte $1/4$

A.8.2 $\mathbb{F}_3\mathcal{S}_{10}$

Einf. Modul	1^+	1^-	$9a$	$9b \cong 1^- \otimes 9a$	$34a$	$34b \cong 1^- \otimes 34a$	$36a$	$36b \cong 1^- \otimes 36a$
Partition	(10)	(5^2)	(9,1)	(5,4,1)	(8,2)	($4^2,1^2$)	(8,1 ²)	($4^2,2$)
Block	1	1	2	3	1	1	3	2
p -Ant.	0	0	2	2	0	0	2	2

Tabelle A.96: Einfache Moduln 1/4

Einf. Modul	$41a$	$41b \cong 1^- \otimes 41a$	$84a$	$84b \cong 1^- \otimes 84a$	$90a$	$90b \cong 1^- \otimes 90a$
Partition	(7,3)	(4,3,2,1)	(7,2,1)	(4,3 ²)	(6,4)	(3 ² ,2 ²)
Block	1	1	1	1	2	3
p -Ant.	0	0	1	1	2	2

Tabelle A.97: Einfache Moduln 2/4

Einf. Modul	$126a$	$126b \cong 1^- \otimes 126a$	$224a$	$224b \cong 1^- \otimes 224a$
Partition	(6,2 ²)	(5,3,2)	(6,2,1 ²)	(5,2 ² ,1)
Block	2	3	1	1
p -Ant.	2	2	0	0

Tabelle A.98: Einfache Moduln 3/4

Einf. Modul	$279a$	$279b \cong 1^- \otimes 279a$	$567a$	$567b \cong 1^- \otimes 567a$
Partition	(6,3,1)	(3 ² ,2,1 ²)	(5,3,1 ²)	(4,2 ² ,1 ²)
Block	3	2	4	5
p -Ant.	2	2	4	4

Tabelle A.99: Einfache Moduln 4/4

Bem.:

Halbeinfaches Produkt: $9a \otimes 41a$

M	p -Ant.	$M/\text{rad}(M)$	$\text{soc}(M)$	Loewyl.	projektiv
36c	2	1^+	1^+	3	.
111a	1	$1^+ \oplus 34a$	$1^+ \oplus 34a$	3	.
117a	2	41a	41a	3	.
144a	2	9a	9a	3	.
198a	2	36a	36a	3	.
210a	1	84a	84a	3	.
253a	0	84a	84a	3	.
270a	3	34a	34a	5	.
270b	3	34b	34b	5	.
279c	2	$34b \oplus 84b$	$34b \oplus 84b$	3	.
279d	2	$34a \oplus 84a$	$34a \oplus 84a$	3	.
293a	0	34a	34a	3	.
297a	3	126a	126a	3	.
297b	3	126b	126b	3	.
306a	2	90a	90a	3	.
306b	2	41a	41a	3	.
324a	4	$9a \oplus 90a$	$9a \oplus 90a$	3	.
341a	0	34a	34a	3	.
351a	3	36a	36a	3	.
351b	3	126a	126a	3	.
567c	4	90a	90a	5	p
567d	4	90b	90b	5	p
594a	3	84a	84a	5	.
594b	3	84b	84b	5	.
603a	2	279a	279a	3	.
603b	2	279b	279b	3	.
882a	2	$84a \oplus 224a$	$84a \oplus 224a$	3	.
882b	2	$84b \oplus 224b$	$84b \oplus 224b$	3	.
891a	4	$126b \oplus 279a$	$126b \oplus 279a$	3	.
927a	2	41a	41a	5	.
927b	2	41b	41b	5	.
972a	5	9a	9a	5	p
990a	2	$126b \oplus 279a$	$126b \oplus 279a$	3	.
990b	2	$126a \oplus 279b$	$126a \oplus 279b$	3	.
993a	1	$34a \oplus 84a \oplus 224a$	$34a \oplus 84a \oplus 224a$	3	.
1053a	4	279a	279a	5	p
1053b	4	279b	279b	5	p
1053c	4	126a	126a	5	p
1053d	4	126b	126b	5	p
1053e	4	36a	36a	5	p
1053f	4	36b	36b	5	p
1116a	2	41a	41a	5	.
1323a	3	224a	224a	5	.
1323b	3	224b	224b	5	.
1440a	2	$34a \oplus 84a$	$34a \oplus 84a$	5	.
1623a	1	224b	224b	5	.
1782a	4	84a	84a	7	p
1782b	4	84b	84b	7	p
1824a	1	$41a \oplus 279a$	$41a \oplus 279a$	5	.
1863a	4	34a	34a	7	p
1863b	4	34b	34b	7	p
2079a	3	$84a \oplus 224a$	$84a \oplus 224a$	5	.
2430a	5	41a	41a	7	p
2430b	5	41b	41b	7	p
2461a	0	$84a \oplus 224a$	$84a \oplus 224a$	5	.
2654a	0	$41a \oplus 84b \oplus 224b$	$41a \oplus 84b \oplus 224b$	5	.
2916a	6	224a	224a	7	p
2916b	6	224b	224b	7	p
2916c	6	1^+	1^+	?	p
3123a	2	$41a \oplus 84b \oplus 224b$	$41a \oplus 84b \oplus 224b$	5	.
3507a	1	$34a \oplus 41a \oplus 84b \oplus 224a \oplus 224b$	$34a \oplus 41a \oplus 84b \oplus 224a \oplus 224b$	5	.

Tabelle A.100: Unzerlegbare Moduln

\otimes	1 ⁺	9a	36a	36c	90a	117a	126a	126b	198a	210a	224b	253a	270a	279a	279d	293a	297a	306a	306b	324a	341a	351a	351b	
Block	1	2	3	1	2	1	2	3	3	1	1	1	1	3	1	1	2	2	1	2	1	3	2	
9a \otimes 9a	.	1	1	1
9a \otimes 34a	.	.	1	1
9a \otimes 36a	.	1	1	1
9a \otimes 41a	1	1
9a \otimes 84a	.	.	1	.	.	.	1
9a \otimes 90a	1	1
9a \otimes 126a	1	1
9a \otimes 224a	1
9a \otimes 279a	1	1	1
34a \otimes 34a	1	1	.	.	1	1	.	1	.	.
34a \otimes 36a	.	1	1	1	.
34a \otimes 41a	1	.	.
34a \otimes 84a	1	1
34a \otimes 90a	1
34a \otimes 126a	1	1
34a \otimes 224a	1	1	1
34a \otimes 279a	1
36a \otimes 36a	.	1	1	1	1	1
36a \otimes 41a	1
36a \otimes 84a	.	1	1	1	1	1
36a \otimes 90a	1
36a \otimes 126a	1	1	1	.
36a \otimes 224a	1	1
36a \otimes 279a	1	.	.	.	1
41a \otimes 41a	1	1	.	.	.	1
41a \otimes 84a
41a \otimes 90a	.	1	1
41a \otimes 126a	1
41a \otimes 224a
41a \otimes 279a	.	1	1	1

Tabelle A.101: Zerlegung der Tensorprodukte 1/4 a

\otimes	567a	567b	567c	594a	603a	882a	882b	891a	927a	990a	993a	1053a	1053c	1116a	1323a	1323b	1782a	1824a	1863a	2430a	2461a	2916	
Block	4	5	2	1	3	1	1	3	1	3	1	3	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
9a \otimes 9a
9a \otimes 34a
9a \otimes 36a
9a \otimes 41a
9a \otimes 84a	.	.	.	1
9a \otimes 90a	1
9a \otimes 126a	1
9a \otimes 224a	1	1
9a \otimes 279a	1	1
34a \otimes 34a
34a \otimes 36a	.	.	.	1
34a \otimes 41a	1
34a \otimes 84a	1	.	.	1	1
34a \otimes 90a	1	.	1	.	1	1
34a \otimes 126a	1	.	.	1	1	1
34a \otimes 224a	2	1	1	1	a
34a \otimes 279a	3	.	1	3	.	.	1	1	.	.
36a \otimes 36a	.	.	.	1
36a \otimes 41a	1	.	.	.	1
36a \otimes 84a	.	.	.	1	1
36a \otimes 90a	1	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	1
36a \otimes 126a	1	1	.	1	.	.	1	1
36a \otimes 224a	2	1	.	1	1	.	.	1	b
36a \otimes 279a	3	.	1	3	.	1	a
41a \otimes 41a	1	.	1
41a \otimes 84a	1	1	1
41a \otimes 90a	1	1	.	.
41a \otimes 126a	1	1	1	a
41a \otimes 224a	2	1	1	1	1	b
41a \otimes 279a	2	1	1	2	1	.	1	.	.	.	a

Tabelle A.102: Zerlegung der Tensorprodukte 1/4 b

\otimes	9a	36a	36b	36c	84b	90a	111a	126a	126b	144a	198a	270a	306a	324a	351a	351b	567a	567b	567c	594a	594b
Block	2	3	2	1	1	2	1	2	3	2	3	1	2	2	3	2	4	5	2	1	1
84a \otimes 84a	1	.	1	1	.	1	1	1	1	1	.	1	.
84a \otimes 90a	1	3	.	1	1	.
84a \otimes 126a	1	.	1	.	.	1	.	.	1	.	.	1	.	.	1	1	2	2	.	1	1
84a \otimes 224a	1	1	3	3	1	1	.
84a \otimes 279a	1	.	.	.	6	2	1	1	.
90a \otimes 90a	1	1	.	1	2	.	2	.	.
90a \otimes 126a	1	1	3	1	.	.	.
90a \otimes 224a	1	4	3	.	.	.
90a \otimes 279a	1	1	5	2	2	.	.

Tabelle A.103: Zerlegung der
Tensorprodukte 2/4 a

\otimes	603a	603b	882a	891a	990a	1053a	1053b	1053c	1053d	1053e	1323a	1440a	1623a	1782a	1863a	2430a	2916a	2916b	3507a
Block	3	2	1	3	3	3	2	2	3	3	1	1	1	1	1	1	1	1	1
84a \otimes 84a	.	.	.	1	1	.	1
84a \otimes 90a	1	1	1	.	.
84a \otimes 126a	.	1	.	.	.	1	1	1	.
84a \otimes 224a	2	1	.	1	1	1	1
84a \otimes 279a	1	4	.	1	1	2	1	.
90a \otimes 90a	2	1	1
90a \otimes 126a	.	.	1	.	.	1	.	1	1	1	.
90a \otimes 224a	2	.	1	1	.	1	.	.	1	.	.	2	1	.
90a \otimes 279a	4	.	1	.	1	.	1	.	1	1	1	2	.	.

Tabelle A.104: Zerlegung der
Tensorprodukte 2/4 b

\otimes	1 ⁺	9a	9b	34b	36a	36b	36c	90a	90b	117a	210a	270a	270b	279c	297a	297b	324a	351	567a	567b	567c	567d	594a
Block	1	2	3	1	3	2	1	2	3	1	1	1	1	1	2	3	2	3/2	4	5	2	3	1
126a \otimes 126a	.	1	1	.	1	1	1	1	1	1	.	1	.	1	.	.	.	b	2	2	1	.	1
126a \otimes 224a	.	1	.	.	.	1	.	1	.	.	.	1	1	a	4	4	1	1	1
126a \otimes 279a	7	5	1	.	.
224a \otimes 224a	1	.	.	1	1	1	1	a	8	7	2	1	.
224a \otimes 279a	1	12	8	2	.	.
279a \otimes 279a	.	1	.	.	1	.	1	1	1	.	.	15	8	4	.	.

\otimes	603	927b	972a	990	1053a	1053b	1053c	1053d	1053e	1053f	1782a	1782b	1863a	2079a	2430a	2430b	2654a	2916a	2916b	3123a	
Block	3/2	1	2	3/2	3	2	2	3	3	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
126a \otimes 126a	a+b	1	.	.	1	1	.	1	1	1	.
126a \otimes 224a	b	.	.	.	3	2	1	1	.	.	.	1	.	.	1	.	.	.	1	2	.
126a \otimes 279a	.	.	.	a+b	3	1	1	1	.	.	1	3	2	1
224a \otimes 224a	5	4	1	2	.	1	1	1	1	.	.	1	1	.	.	5	.
224a \otimes 279a	.	.	.	a	5	3	3	2	1	.	2	1	.	.	1	.	.	.	5	4	.
279a \otimes 279a	.	.	1	.	9	1	3	1	3	.	4	.	3	1	2	.	.	.	5	3	.

\otimes	2916c	972a	1863a	1863b	1053e	1053f	2430a	2430b	1782a	1782b	567c	567d	1053c	1053d	2916a	2916b	1053a	1053b	567a	567b
Block	1	2	1	1	3	2	1	1	1	1	2	3	2	3	1	1	3	2	4	5
9a \otimes 567a	1	.	1	.	2	.
34a \otimes 567a	1	.	1	.	1	.	2	1	3	.	5	2
36a \otimes 567a	1	.	.	.	1	.	1	1	2	1	3	.	4	2
41a \otimes 567a	1	.	1	.	1	.	.	.	1	1	2	1	2	1	4	3
84a \otimes 567a	.	.	1	.	.	.	1	.	1	1	3	.	2	2	3	3	6	2	8	6
90a \otimes 567a	.	.	1	.	1	.	.	.	3	.	2	.	3	1	4	3	5	2	11	6
126a \otimes 567a	.	.	1	.	1	1	1	1	2	2	3	1	2	2	4	4	7	5	12	11
224a \otimes 567a	.	1	2	1	2	1	2	1	3	3	4	3	4	4	8	7	12	8	20	19
279a \otimes 567a	.	1	3	.	3	.	2	1	6	2	5	2	7	5	12	8	15	8	28	21
567a \otimes 567a	1	2	5	2	4	2	4	3	8	6	11	6	12	11	20	19	28	21	53	46

Tabelle A.105: Zerlegung
der Tensorprodukte 3/4 a

Tabelle A.106: Zerlegung
der Tensorprodukte 3/4 b

Tabelle A.107: Zerlegung der
Tensorprodukte 4/4

A.8.3 $\mathbb{F}_5\mathcal{S}_{10}$

Einf. Modul	1^+	1^-	$8a$	$8b \cong 1^- \otimes 8a$	$28a$	$28b \cong 1^- \otimes 28a$	$34a$	$34b \cong 1^- \otimes 34a$
Partition	(10)	$(3^2, 2^2)$	(9, 1)	$(3, 2^3, 1)$	$(8, 1^2)$	$(4, 2^2, 1^2)$	(5^2)	$(4^2, 2)$
Block	1	1	1	1	1	1	1	1
p -Ant.	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabelle A.108: Einfache Moduln 1/5

Einf. Modul	$35a$	$35b \cong 1^- \otimes 35a$	$55a$	$55b \cong 1^- \otimes 55a$	$56a$	$56b \cong 1^- \otimes 56a$	$70a$	$75a$
Partition	(8, 2)	$(2^4, 1^2)$	(6, 4)	$(4, 3^2)$	$(7, 1^3)$	$(5, 2, 1^3)$	$(6, 1^4)$	$(7, 3)$
Block	2	3	2	3	1	1	1	4
p -Ant.	1	1	1	1	0	0	1	2

Tabelle A.109: Einfache Moduln 2/5

Einf. Modul	$75b \cong 1^- \otimes 75a$	$155a$	$155b \cong 1^- \otimes 155a$	$160a$	$160b \cong 1^- \otimes 160a$	$217a$
Partition	$(2^3, 1^4)$	(6, 3, 1)	$(3^3, 1)$	$(7, 2, 1)$	$(3, 2^2, 1^3)$	$(5, 4, 1)$
Block	5	3	2	3	2	1
p -Ant.	2	1	1	1	1	0

Tabelle A.110: Einfache Moduln 3/5

Einf. Modul	$217b \cong 1^- \otimes 217a$	$225a$	$225b \cong 1^- \otimes 225a$	$266a$	$300a$	$300b \cong 1^- \otimes 300a$
Partition	$(4, 3, 2, 1)$	$(6, 2^2)$	$(3^2, 1^4)$	$(5, 3, 1^2)$	$(4^2, 1^2)$	$(4, 2^3)$
Block	1	6	7	1	8	9
p -Ant.	0	2	2	0	2	2

Tabelle A.111: Einfache Moduln 4/5

Einf. Modul	$350a$	$350b \cong 1^- \otimes 350a$	$450a$	$450b \cong 1^- \otimes 450a$	$525a$	$525b \cong 1^- \otimes 525a$
Partition	$(6, 2, 1^2)$	$(4, 2, 1^4)$	$(5, 3, 2)$	$(3^2, 2, 1^2)$	$(5, 2^2, 1)$	$(4, 3, 1^3)$
Block	10	11	12	13	14	15
p -Ant.	2	2	2	2	2	2

Tabelle A.112: Einfache Moduln 5/5

Bem.:

Halbeinfache Produkte: $8a \otimes 8a$, $8a \otimes 28a$, $8a \otimes 34a$, $8a \otimes 56a$, $28a \otimes 28a$ Unzerlegbares Produkt: $8a \otimes 70a$

M	p -Ant.	$M/\text{rad}(M)$	$\text{soc}(M)$	Loewyl.	proj.
<u>10a</u>	1	1^+	1^+	3	.
45a	1	$8a$	$8a$	3	.
120a	1	$8a$	$8a$	3	.
120b	1	$28a$	$28a$	3	.
<u>125a</u>	3	$35a$	$35a$	3	p
<u>125b</u>	3	$35b$	$35b$	3	p
210a	1	$8a$	$8a$	3	.
210b	1	$56a$	$56a$	3	.
<u>285a</u>	1	$34a$	$34a$	3	.
<u>285b</u>	1	$34b$	$34b$	3	.
300c	2	$55a$	$55a$	3	p
300d	2	$55b$	$55b$	3	p
375a	2	$8a$	$8a$	5	p
375b	2	$8b$	$8b$	5	p
406a	0	$56a$	$56a$	3	.
<u>475a</u>	2	$160a$	$160a$	3	p
<u>475b</u>	2	$160b$	$160b$	3	p
525c	2	$155a$	$155a$	3	p
525d	2	$155b$	$155b$	3	p
530a	1	$217a$	$217a$	3	.
530b	1	$217b$	$217b$	3	.
550a	2	1^+	1^+	5	p
550b	2	1^-	1^-	5	p
560a	1	$56a \oplus 56b$	$56a \oplus 56b$	3	.
586a	0	$34a \oplus 34b$	$34a \oplus 34b$	3	.
590a	1	$1^+ \oplus 1^- \oplus 34a \oplus 34b$	$1^+ \oplus 1^- \oplus 34a \oplus 34b$	3	.
700a	2	$70a$	$70a$	5	p
735a	1	$217a$	$217a$	3	.
735b	1	$217b$	$217b$	3	.
797a	0	$217a$	$217a$	3	.
797b	0	$217b$	$217b$	3	.
805a	1	$266a$	$266a$	3	.
805b	1	$266a$	$266a$	3	.
814a	0	$8a \oplus 217a$	$8a \oplus 217a$	3	.
814b	0	$8b \oplus 217b$	$8b \oplus 217b$	3	.
975a	2	$28a$	$28a$	5	p
975b	2	$28b$	$28b$	5	p
1078a	0	$266a$	$266a$	3	.
1154a	0	$34a \oplus 266a$	$34a \oplus 266a$	3	.
1190a	1	$28a \oplus 28b \oplus 266a$	$28a \oplus 28b \oplus 266a$	3	.
1225a	2	$56a$	$56a$	5	p
1225b	2	$56b$	$56b$	5	p
1260a	1	$217a \oplus 217b$	$217a \oplus 217b$	3	.
1328a	0	$217a \oplus 217b$	$217a \oplus 217b$	3	.
1338a	0	$28a \oplus 70a \oplus 266a$	$28a \oplus 70a \oplus 266a$	3	.
1350a	2	$34a$	$34a$	5	p
1350b	2	$34b$	$34b$	5	p
1360a	1	$8a \oplus 8b \oplus 217a \oplus 217b$	$8a \oplus 8b \oplus 217a \oplus 217b$	3	.
1875a	4	$217a$	$217a$	5	p
1875b	4	$217b$	$217b$	5	p
1944a	0	$56a \oplus 56b \oplus 217a \oplus 217b$	$56a \oplus 56b \oplus 217a \oplus 217b$	3	.
2350a	2	$266a$	$266a$	5	p
2633a	0	$8a \oplus 56a \oplus 56b \oplus 70a \oplus 217a \oplus 217b$	$8a \oplus 56a \oplus 56b \oplus 70a \oplus 217a \oplus 217b$	4	.
3806a	0	$266a \oplus 217a \oplus 217b$	$266a \oplus 217a \oplus 217b$	4	.
4980a	1	$34a \oplus 34b \oplus 217a \oplus 217b \oplus 266a$	$34a \oplus 34b \oplus 217a \oplus 217b \oplus 266a$	4	.

Tabelle A.113: Unzerlegbare Moduln

Tabelle A.114: Zerlegung der
Tensorprodukte 1/10

	1 ⁺	8a	28a	34a	35a	45a	55a	56a	70a	75a	120a	155a	160a	217a	225a	285a	300a	350a	450a	475a	525a	525b		
Block	1	1	1	1	2	1	2	1	1	4	1	3	3	1	6	1	8	10	12	3	14	15	1	
8a ⊗ 8a	1	.	1	.	1
8a ⊗ 28a	.	1	1	1
8a ⊗ 34a	1	1
8a ⊗ 35a	1	.	.	.	1	.	.	1
8a ⊗ 55a	1	.	.	.	1
8a ⊗ 56a	.	.	1	1	1
8a ⊗ 70a	560a
8a ⊗ 155a	1	1	735a
8a ⊗ 160a	1	1	1	.	.	.	1	.	.	1	.	1
8a ⊗ 217a	.	.	.	1	1	1	.	1	797a
8a ⊗ 266a	1	1	1078a

Tabelle A.115: Zerlegung der
Tensorprodukte 2/10 a

	1 ⁺	8a	28a	35a	45a	55a	70a	75a	120a	125a	155a	160a	217a	225a	225b	285a
Block	1	1	1	2	1	2	1	4	1	2	3	3	1	6	7	1
28a ⊗ 28a	1	.	1	1	.	.	1	1	1	.	.
28a ⊗ 34a	1
28a ⊗ 35a	.	.	.	1	1
28a ⊗ 55a	1
28a ⊗ 56a	.	1
28a ⊗ 70a	1
28a ⊗ 155a	1	.	.	1	.	1
28a ⊗ 160a	1	.	.	1	.	1	.	1	.	1	.	.
28a ⊗ 217a	1	1	.	.	.
28a ⊗ 266a	1	1	1	.

Tabelle A.116: Zerlegung der
Tensorprodukte 2/10 b

	300a	300b	350a	350b	450a	450b	475a	525a	525b	525c	560a	735a	
Block	8	9	10	11	12	13	3	14	15	3	1	1	1
28a ⊗ 28a	.	.	1
28a ⊗ 34a	797a
28a ⊗ 35a	.	.	1	.	.	.	1
28a ⊗ 55a	1	.	.	.	1	1	.
28a ⊗ 56a	1	1	.	.	1	.	.
28a ⊗ 70a	.	.	1	1	1190a
28a ⊗ 155a	1	.	.	.	1	.	.	1	1	.	.	.	1875a
28a ⊗ 160a	.	.	2	.	1	.	2	1	1225a
28a ⊗ 217a	1	.	.	.	2	.	.	1	1	1	.	.	1154a ⊕ 1875a
28a ⊗ 266a	1	1	1	1	1	1	.	1	1	.	.	.	1328a ⊕ 2350a

Tabelle A.119: Zerlegung der Tensorprodukte 4/10 a

	1 ⁺	10a	35a	45a	55a	55b	70a	75a	120a	120b	125a	155a	155b	160a	160b	210b	225a	225b	285a	285b	300a	300b	300c
Block	1	1	2	1	2	3	1	4	1	1	2	3	2	3	2	1	6	7	1	1	8	9	2
55a ⊗ 55a	.	1	1	.	.	1	.	.	1	.	.	.	1	1	.	.	1	.	.	1	.	1	.
55a ⊗ 56a	1
55a ⊗ 70a	1	1	.
55a ⊗ 155a	.	.	1	1	.	1	.	1	1	1	.	1	1	1	.
55a ⊗ 160a	1	1	1	.	1	.	2	.	.
55a ⊗ 217a	.	.	2	1	.	1	.	.	2	.	.	.	2	.	.	1	.	2	.
55a ⊗ 266a	1	1	1	1	.	1	1	.	.	1	1	.
56a ⊗ 56a	1	1	1	.	.	1	1	1	.
56a ⊗ 70a
56a ⊗ 155a	1	1	.	.	2	1	.
56a ⊗ 160a	.	.	1	1	2
56a ⊗ 217a	1	1	.	.	.	1	1	1
56a ⊗ 266a	1	1	.	.	1	1	.

Tabelle A.120: Zerlegung der Tensorprodukte 4/10 b

	350a	350b	450a	450b	475a	475b	525a	525b	525c	525d	530b	560a	586a	700a	735b	797a	805a	805b	975a		
Block	10	11	12	13	3	2	14	15	3	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1		
55a ⊗ 55a	1	1	1
55a ⊗ 56a	1	1	1875a
55a ⊗ 70a	.	.	1	1	2350a
55a ⊗ 155a	2	.	1	1	1	.	2	1	.	.	1	.	.	.	1	2350a
55a ⊗ 160a	.	.	3	.	.	.	1	1	1	1	.	.	2 * 1875a
55a ⊗ 217a	2	.	1	2	2	.	2	1	1225a ⊕ 1875b ⊕ 2350a
55a ⊗ 266a	2	2	2	2	.	.	2	2	1	1	.	.	.	1	1875a ⊕ 1875b ⊕ 2350a
56a ⊗ 56a	1	1	1	1190a
56a ⊗ 70a	1	1	1	1	.	.	.	1	1360a
56a ⊗ 155a	1	.	2	1	.	.	1	1	1	1875a ⊕ 2350a
56a ⊗ 160a	3	1	1	.	2	.	2	1	1	1	.	2350a
56a ⊗ 217a	1	1	2	1	.	.	2	2	1	1	1260a ⊕ 1875a ⊕ 2350a
56a ⊗ 266a	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	.	1	1	1875a ⊕ 1875b ⊕ 2350a

Tabelle A.121: Zerlegung der
Tensorprodukte 5/10

	70a	75a	75b	125a	125b	225a	225b	300a	300b	300c	300d	350a	350b	450a	450b	475a	475b	525a	525b	525c	525d		
Block	1	4	5	2	3	6	7	8	9	2	3	10	11	12	13	3	2	14	15	3	2	1	
$70a \otimes 70a$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	1	1	1	1	$590a \oplus 1190a$
$70a \otimes 155a$	1	1	1	1	.	.	2	2	1	1	.	$1875a \oplus 1875b$ $\oplus 2350a$
$70a \otimes 160a$	1	1	1	1	.	.	2	2	1	1	1	1	2	2	.	.	.	$1225a \oplus 1225b$ $\oplus 2350a$
$70a \otimes 217a$	1	1	2	2	.	.	1	1	2	2	.	.	2	2	1	1	.	$560a \oplus 2350a$ $\oplus 4980a$
$70a \otimes 266a$	1	1	1	.	.	1	1	1	1	1	1	2	2	3	3	1	1	2	2	1	1	.	$1190a \oplus 1260a$ $\oplus 1875a \oplus 1875b$ $\oplus 2350a$

Tabelle A.122: Zerlegung der
Tensorprodukte 6/10 a

	10a	35a	35b	45a	55a	55b	75a	75b	120b	125a	155a	155b	160a	225a	225b	285a	285b	300a	300b	300c	300d
Block	1	2	3	1	2	3	4	5	1	2	3	2	3	6	7	1	1	8	9	2	3
$155a \otimes 155a$	1	1	.	.	.	1	2	.	1	1	.	1	1	3	1	.	1	1	3	.	.
$155a \otimes 160a$	1	1	.	.	2	.	.	.	4	1	1	.
$155a \otimes 217a$.	.	.	1	.	2	2	.	.	1	.	.	2	3	1	.	.	2	3	.	.
$155a \otimes 266a$.	1	1	.	.	.	1	1	.	.	1	1	.	3	3	.	.	3	3	1	1
$160a \otimes 160a$	1	1	5	.	1	3	.	.	1	6	.	.	.	1	1	.	.
$160a \otimes 217a$	1	.	.	.	2	.	.	3	1	1	.	5	2	2	.
$160a \otimes 266a$	1	1	2	2	.	.	4	4	.	.

Tabelle A.123: Zerlegung der
Tensorprodukte 6/10 b

	350a	350b	375a	450a	450b	475a	475b	525a	525b	525c	525d	530a	700a	735a	735b	805a	975a	
Block	10	11	1	12	13	3	2	14	15	3	2	1	1	1	1	1	1	1
$155a \otimes 155a$	4	1	.	3	3	2	.	4	3	1	1	.	1	.	.	1	.	$1225a \oplus 1875a$ $\oplus 2 * 1875b \oplus 2350a$
$155a \otimes 160a$	2	1	.	6	1	1	.	4	3	2	.	1	.	1	.	.	.	$1350a \oplus 3 * 1875a \oplus 2 * 2350a$
$155a \otimes 217a$	6	2	.	4	4	3	.	6	4	1	2	.	1	.	1	.	1	$1225a \oplus 1875a \oplus 3 * 1875b$ $\oplus 2 * 2350a$
$155a \otimes 266a$	4	4	.	5	5	2	2	6	6	1	1	.	1	$1225a \oplus 1225b \oplus 1350a \oplus 1350b$ $2 * 1875a \oplus 2 * 1875b$ $\oplus 3 * 2350a$
$160a \otimes 160a$	9	.	1	5	.	8	.	5	1	1	.	.	1	.	.	.	2	$2 * 1225a \oplus 1875a \oplus 2350a$
$160a \otimes 217a$	3	1	.	8	2	1	.	5	4	3	$1350a \oplus 5 * 1875a \oplus 3 * 2350a$
$160a \otimes 266a$	4	4	.	5	5	1	1	7	7	2	2	.	1	$1225a \oplus 1225b \oplus 3 * 1875a$ $3 * 1875b \oplus 3 * 2350a$

	1^+	1^-	$28a$	$34b$	$35a$	$70a$	$75a$	$75b$	$125a$	$125b$	$155b$	$225a$	$225b$	$300a$	$300b$	$300c$	$300d$	$350a$	$350b$	$406a$
Block	1	1	1	1	2	1	4	5	2	3	2	6	7	8	9	2	3	10	11	1
$217a \otimes 217a$	1	·	1	1	1	·	2	·	2	·	1	6	2	3	6	·	1	7	3	1
$217a \otimes 266a$	·	·	·	·	·	·	1	1	·	·	·	3	3	4	4	1	1	6	6	·
$266a \otimes 266a$	1	1	·	·	·	1	3	3	2	2	·	5	5	7	7	1	1	6	6	·

Tabelle A.124: Zerlegung der
Tensorprodukte 7/10 a

	$450a$	$450b$	$475a$	$475b$	$525a$	$525b$	$525c$	$525d$	$700a$	$797b$	$814a$	$814b$	$975a$	$975b$	
Block	12	13	3	2	14	15	3	2	1	1	1	1	1	1	
$217a \otimes 217a$	5	6	5	·	7	5	1	3	·	1	·	·	1	·	$1225a \oplus 1350a \oplus 1875a \oplus 2 * 1875b$ $\oplus 4 * 2350a \oplus 2633a$
$217a \otimes 266a$	7	7	3	3	9	9	2	2	1	·	·	·	·	·	$1225a \oplus 1225b \oplus 4 * 1875a$ $\oplus 4 * 1875b \oplus 3 * 2350a \oplus 3122a$
$266a \otimes 266a$	9	9	3	3	10	10	3	3	1	·	1	1	1	1	$1225a \oplus 1225b \oplus 1350a \oplus 1350b$ $\oplus 3 * 1875a \oplus 3 * 1875b \oplus 4 * 2350a \oplus 3806a$

Tabelle A.125: Zerlegung der
Tensorprodukte 7/10 b

Tabelle A.126: Zerlegung der Tensorprodukte $8/10a$

Block	550a	550b	375a	375b	975a	975b	1350a	1350b	125a	125b	700a	300c	300d	1225a	1225b	75a	75b
	1	1	1	1	1	1	1	1	2	3	1	2	3	1	1	4	5
$8a \otimes 75a$	1
$28a \otimes 75a$	1	1	.
$34a \otimes 75a$
$35a \otimes 75a$.	.	1	1	2	.
$55a \otimes 75a$
$56a \otimes 75a$	1	.	.	.
$70a \otimes 75a$	1
$75a \otimes 75a$	1	.	.	.	1	.	.	.	2	2	.
$155a \otimes 75a$	1	.	.	.	1	.
$160a \otimes 75a$.	.	1	.	1	.	.	.	2	1	.	2	.
$217a \otimes 75a$	1	1
$225a \otimes 75a$	1	.	1	.	1	.	1	2	.
$266a \otimes 75a$	1
$300a \otimes 75a$	1	.	1	.	.	.
$350a \otimes 75a$	1	.	.	.	1	.	1	.	.	2	.	1	.
$450a \otimes 75a$	1	.	1	.	.	2	.	1	.	2	.
$525a \otimes 75a$	1	1	.	1	1	1	.
$8a \otimes 225a$
$28a \otimes 225a$	1	1	.
$34a \otimes 225a$	1	1	.
$35a \otimes 225a$	1	1	.	1	.
$55a \otimes 225a$	1
$56a \otimes 225a$	1	1	.	.	.
$70a \otimes 225a$	1	1	1
$155a \otimes 225a$	1	.	1	1	.	.	1	1	.
$160a \otimes 225a$.	.	1	.	1	.	.	.	2	.	1	1	.	2	.	3	.
$217a \otimes 225a$	1	.	1	2	.	1	.	1	.
$225a \otimes 225a$	1	.	.	.	1	.	1	1	3	.	2	1	.	2	.	3	.
$266a \otimes 225a$	1	1	1	1	.	.	1	1	1	1	1	1	1
$300a \otimes 225a$	2	.	.	1	1	1	1	1	1	2	1
$350a \otimes 225a$.	.	1	.	2	.	1	.	2	.	2	1	1	2	1	4	.
$450a \otimes 225a$.	.	1	.	1	.	2	.	2	.	2	2	1	2	1	4	.
$525a \otimes 225a$.	.	1	.	1	.	1	1	2	.	3	2	2	2	2	4	1

Tabelle A.127: Zerlegung der Tensorprodukte 8/10 b

	2350a	525c	525d	475a	475b	1875a	1875b	225a	225b	300a	300b	350a	350b	450a	450b	525a	525b
Block	1	3	2	3	2	1	1	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
8a ⊗ 75a	.	.	.	1
28a ⊗ 75a	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	1
34a ⊗ 75a	1	.	1	1	.	.	.
35a ⊗ 75a	.	.	.	2	.	.	.	1	.	.	.	1	.	1	.	.	.
55a ⊗ 75a	.	1	.	.	.	1	.	.	.	1	.	.	.	2	.	1	.
56a ⊗ 75a	.	.	.	1	1	.	2	.	1	.	1	1
70a ⊗ 75a	1	1	1	.	.	1	1	.	.	1	1
75a ⊗ 75a	.	1	.	2	.	.	.	2	.	.	.	1	.	2	.	1	.
155a ⊗ 75a	1	2	.	.	.	2	.	1	.	1	1	1	.	3	.	2	1
160a ⊗ 75a	.	.	.	5	.	1	.	3	.	1	.	4	.	3	.	2	.
217a ⊗ 75a	1	2	.	1	.	2	.	1	.	3	1	2	.	4	1	3	2
225a ⊗ 75a	1	1	.	3	.	1	.	3	.	2	1	4	.	4	.	4	1
266a ⊗ 75a	3	1	1	.	.	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3
300a ⊗ 75a	1	1	1	1	.	3	1	2	1	3	2	2	1	3	3	3	4
350a ⊗ 75a	2	1	.	4	.	2	.	4	.	2	1	7	1	4	1	5	3
450a ⊗ 75a	2	3	.	3	.	4	1	4	.	3	3	4	1	7	2	6	3
525a ⊗ 75a	3	2	1	2	.	3	2	4	1	3	4	5	3	6	3	8	5
8a ⊗ 225a	.	.	.	1	1	.	1	.	1	.
28a ⊗ 225a	1	1	.	1	.	.	.	1	.	.	.	2	.	1	.	1	.
34a ⊗ 225a	1	1	1	1	2	.	1	.	2	.	1	1
35a ⊗ 225a	.	.	.	2	.	1	.	3	.	.	1	2	.	2	.	2	.
55a ⊗ 225a	1	1	.	1	.	2	.	1	.	1	1	1	1	2	1	2	2
56a ⊗ 225a	1	.	1	2	.	1	.	2	.	1	1	2	1	2	1	2	2
70a ⊗ 225a	1	.	.	1	1	1	1	2	2	1	1	2	2	2	2	3	3
155a ⊗ 225a	3	3	1	2	.	3	1	2	1	4	2	4	2	6	3	5	4
160a ⊗ 225a	2	2	.	6	.	3	1	5	.	3	2	8	1	7	1	7	3
217a ⊗ 225a	3	3	1	3	1	6	2	4	1	4	4	5	3	8	5	8	7
225a ⊗ 225a	3	2	1	5	.	4	1	7	1	4	5	7	3	8	4	8	7
266a ⊗ 225a	5	3	3	2	2	3	3	3	3	5	5	6	6	7	7	8	8
300a ⊗ 225a	5	4	2	3	2	4	4	4	5	8	4	8	4	11	7	11	9
350a ⊗ 225a	6	4	2	8	1	5	3	7	3	8	4	13	5	12	6	13	10
450a ⊗ 225a	7	6	3	7	1	8	5	8	4	11	7	12	6	17	9	16	13
525a ⊗ 225a	8	5	4	7	3	8	7	8	7	11	9	13	10	16	13	18	17

Tabelle A.128: Zerlegung der Tensorprodukte $9/10$ a

	550a	550b	375a	375b	975a	975b	1350a	1350b	125a	125b	700a	300c	300d	1225a	1225b	75a	75b
Block	1	1	1	1	1	1	1	1	2	3	1	2	3	1	1	4	5
$8a \otimes 300a$
$28a \otimes 300a$	1
$34a \otimes 300a$	1	1	1	.	.	.
$35a \otimes 300a$	1
$55a \otimes 300a$	1	1	.	1	.	.	1	.
$56a \otimes 300a$	1	1	1	.
$70a \otimes 300a$	1	1	1
$155a \otimes 300a$	1	.	.	1	1	.	.	.	1	2	1	1	1
$160a \otimes 300a$	1	.	.	.	1	2	.	.	.	1	.
$217a \otimes 300a$.	.	1	.	1	.	.	.	1	.	2	.	2	1	1	3	1
$266a \otimes 300a$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$300a \otimes 300a$	1	.	.	.	1	1	.	2	3	.	2	1	1	2	1	3	2
$350a \otimes 300a$	1	1	1	1	.	2	3	1	1	1	2	1
$450a \otimes 300a$	2	1	1	2	2	1	3	2	2	3	1	3	3
$525a \otimes 300a$.	.	.	1	1	1	1	1	1	2	3	3	2	3	2	3	4

Tabelle A.129: Zerlegung der Tensorprodukte $9/10$ b

	2350a	525c	525d	475a	475b	1875a	1875b	225a	225b	300a	300b	350a	350b	450a	450b	525a	525b
Block	1	3	2	3	2	1	1	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$8a \otimes 300a$	1	1
$28a \otimes 300a$	1	1	.	.	.	1	.	.	.	1	1	.	1	2	1	1	1
$34a \otimes 300a$	1	.	1	1	.	.	.	2	.	.	2	1	1	1	2	1	1
$35a \otimes 300a$	1	1	.	.	.	1	.	.	1	3	.	1	.	2	1	1	2
$55a \otimes 300a$	1	.	1	2	.	.	2	1	1	1	1	3	1	2	2	3	2
$56a \otimes 300a$	1	2	1	.	.	1	1	1	1	2	1	1	1	3	1	3	2
$70a \otimes 300a$	1	.	.	1	1	2	2	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3
$155a \otimes 300a$	3	1	3	4	1	2	3	4	2	3	5	6	4	5	6	7	6
$160a \otimes 300a$	4	4	1	1	1	5	2	3	2	5	3	4	3	8	5	7	7
$217a \otimes 300a$	4	2	3	5	2	3	6	4	4	5	4	9	5	8	7	11	9
$266a \otimes 300a$	7	3	3	4	4	4	4	5	5	7	7	8	8	10	10	11	11
$300a \otimes 300a$	7	3	5	5	3	5	4	8	4	5	10	8	10	10	12	13	13
$350a \otimes 300a$	8	6	4	4	3	9	5	8	4	8	10	9	9	15	12	16	14
$450a \otimes 300a$	10	5	6	8	5	8	7	11	7	10	12	15	12	17	16	20	19
$525a \otimes 300a$	11	7	6	7	7	11	9	11	9	13	13	16	14	20	19	24	23

	550a	550b	375a	375b	975a	975b	1350a	1350b	125a	125b	700a	300c	300d	1225a	1225b	75a	75b
Block	1	1	1	1	1	1	1	1	2	3	1	2	3	1	1	4	5
8a ⊗ 350a	1	.	.	.
28a ⊗ 350a	1	.	.	.	1	.	1	1	.
34a ⊗ 350a	1
35a ⊗ 350a	1	1	.	.	1	.	1	.
55a ⊗ 350a	1	1
56a ⊗ 350a	.	.	1	1	1	1	2	.
70a ⊗ 350a	1	1	.	.	1	1	1	1	1
155a ⊗ 350a	1	.	.	.	1	2	.	1	.	1	.
160a ⊗ 350a	.	.	1	.	2	.	.	.	3	.	2	.	.	3	1	4	.
217a ⊗ 350a	2	.	.	.	1	2	.	1	1	2	.
266a ⊗ 350a	1	1	1	1	1	1	2	2	2	1	1	2	2
350a ⊗ 350a	1	.	1	.	3	1	1	1	5	.	3	2	1	3	2	7	1
450a ⊗ 350a	2	.	2	1	2	.	3	4	1	3	1	4	1
525a ⊗ 350a	.	.	1	.	2	1	2	2	3	1	3	3	3	4	2	5	3
8a ⊗ 450a
28a ⊗ 450a	1
34a ⊗ 450a	1	1	.	1	.
35a ⊗ 450a	1	1	.	.	.	1	.
55a ⊗ 450a	1	.	.	.	1	.	1	2	.
56a ⊗ 450a	1	1	.	1	.
70a ⊗ 450a	1	1	1
155a ⊗ 450a	.	.	1	.	1	.	.	1	2	.	1	1	1	2	1	3	.
160a ⊗ 450a	1	.	2	.	1	.	1	3	.	1	.	3	.
217a ⊗ 450a	.	.	1	.	2	.	1	1	2	.	2	1	2	2	1	4	1
266a ⊗ 450a	1	1	1	1	1	1	3	2	2	2	2	2	2
450a ⊗ 450a	1	.	1	.	3	1	2	2	5	.	4	3	3	4	2	7	2
525a ⊗ 450a	.	.	1	.	2	1	2	2	3	1	5	4	3	4	4	6	3
8a ⊗ 525a
28a ⊗ 525a	1	.	.	.
34a ⊗ 525a	1	1
35a ⊗ 525a	1
55a ⊗ 525a	1	1	.	1	1	1	.
56a ⊗ 525a	1	1	1	1	.	.	1	1
70a ⊗ 525a	1	1	1	1	.	.	.	1	1	1	1
155a ⊗ 525a	1	1	1	.	1	.	2	2	1	1	1	2	1
160a ⊗ 525a	1	.	1	1	1	.	2	1	1	2	1	2	.
217a ⊗ 525a	1	1	2	1	1	1	2	2	1	2	2	3	2
266a ⊗ 525a	.	.	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	3	3
525a ⊗ 525a	1	.	1	.	3	2	3	3	5	2	5	4	4	4	4	8	5

Tabelle A.130: Zerlegung der Tensorprodukte 10/10 a

	2350a	525c	525d	475a	475b	1875a	1875b	225a	225b	300a	300b	350a	350b	450a	450b	525a	525b
Block	1	3	2	3	2	1	1	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
8a ⊗ 350a	·	·	·	1	·	·	·	1	·	·	·	1	·	·	·	1	·
28a ⊗ 350a	1	·	·	2	·	·	·	2	·	·	1	3	1	2	·	2	1
34a ⊗ 350a	1	1	·	·	·	2	·	1	·	1	1	1	1	2	1	2	2
35a ⊗ 350a	1	·	·	3	·	·	·	2	·	1	·	5	·	2	·	3	1
55a ⊗ 350a	2	2	·	·	·	2	·	1	1	3	1	2	1	4	1	3	3
56a ⊗ 350a	1	1	·	3	1	1	1	2	1	1	1	3	2	3	1	4	2
70a ⊗ 350a	2	1	1	2	2	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3
155a ⊗ 350a	4	4	1	2	1	6	2	4	2	6	4	5	3	9	5	8	8
160a ⊗ 350a	4	2	1	9	·	3	1	8	1	4	3	13	4	9	2	11	6
217a ⊗ 350a	6	6	2	3	1	7	3	5	3	9	5	7	4	13	7	12	10
266a ⊗ 350a	6	4	4	4	4	6	6	6	6	8	8	9	9	12	12	13	13
350a ⊗ 350a	9	5	3	13	4	7	4	13	5	9	9	18	11	18	10	20	15
450a ⊗ 350a	12	9	5	9	2	13	7	12	6	15	12	18	10	24	16	24	22
525a ⊗ 350a	13	8	8	11	6	12	10	13	10	16	14	20	15	24	22	26	26
8a ⊗ 450a	·	1	·	·	·	1	·	1	·	·	·	·	·	1	·	1	·
28a ⊗ 450a	1	1	·	1	·	2	·	1	·	2	1	2	·	3	1	2	1
34a ⊗ 450a	1	·	1	2	·	1	1	2	·	1	2	2	1	2	2	2	2
35a ⊗ 450a	1	2	·	1	·	2	·	2	·	2	1	2	·	5	·	3	1
55a ⊗ 450a	2	1	1	3	·	1	2	2	1	2	2	4	1	3	3	4	3
56a ⊗ 450a	2	2	1	1	·	2	1	2	1	3	1	3	1	4	2	4	4
70a ⊗ 450a	3	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4	5	5
155a ⊗ 450a	5	3	3	6	1	4	4	6	3	5	6	9	5	9	8	11	9
160a ⊗ 450a	5	6	1	5	·	8	2	7	1	8	5	9	2	14	5	12	8
217a ⊗ 450a	7	4	4	8	2	5	6	8	5	8	7	13	7	13	10	16	13
266a ⊗ 450a	9	5	5	5	5	7	7	7	7	10	10	12	12	15	15	17	17
450a ⊗ 450a	15	9	8	14	5	13	10	17	9	17	16	24	16	29	21	31	27
525a ⊗ 450a	17	11	9	12	8	16	13	16	13	20	19	24	22	31	27	35	34
8a ⊗ 525a	1	·	·	·	·	·	·	1	·	·	1	1	·	1	·	1	·
28a ⊗ 525a	1	1	1	1	·	1	1	1	·	1	1	2	1	2	1	3	2
34a ⊗ 525a	1	1	·	1	1	2	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3
35a ⊗ 525a	2	1	·	1	·	1	1	2	·	1	2	3	1	3	1	5	2
55a ⊗ 525a	2	2	1	1	1	2	1	2	2	3	2	3	3	4	3	4	4
56a ⊗ 525a	2	1	1	2	1	2	2	2	2	3	2	4	2	4	4	4	4
70a ⊗ 525a	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	5	5	5	5
155a ⊗ 525a	6	4	3	4	3	6	4	5	4	7	6	8	8	11	9	12	12
160a ⊗ 525a	7	4	3	5	1	5	4	7	3	7	7	11	6	12	8	14	11
217a ⊗ 525a	9	6	4	5	4	7	5	8	7	11	9	12	10	16	13	16	16
266a ⊗ 525a	10	6	6	7	7	9	9	8	8	11	11	13	13	17	17	20	20
525a ⊗ 525a	20	12	12	14	11	16	16	18	17	24	23	26	26	35	34	39	40

Tabelle A.131: Zerlegung der Tensorprodukte 10/10 b

Anhang B

GAP-Routinen

In diesem Abschnitt sind die implementierten GAP-Routinen aufgeführt.

B.1 Die Mullineuxabbildung

In Abschnitt 3.1 wird einer p -regulären Partition λ das Mullineuxsymbol $G_p(\lambda)$ zugeordnet. Mit der Abbildung m_n bekommt man ein weiteres Mullineuxsymbol $G_p(m_n(\lambda))$, das wieder zu einer p -regulären Partition gehört. Die zu $G_p(m_n(\lambda))$ gehörende Partition entspricht genau der Partition des zu D^λ assoziierten Moduls (man vergleiche dazu [6]). Diese Methode half unter anderem alle einfachen Modul zu parametrisieren.

Der hier implementierte Algorithmus, um aus λ das Mullineuxsymbol $G_p(\lambda)$ zu bestimmen und umgekehrt aus $G_p(m_n(\lambda))$ die zugehörige Partition zu finden, ist aus [6] entnommen. Das Programm `Mullineux` besteht aus hauptsächlich zwei Unterprogrammen, `Pseg` und `Rekon`. Das Programm `Pseg` gibt zur Partition λ und Primzahl p die Anzahl der Ecken aller p -Segmente und die Partition, welche durch Entfernen der p -Kante von λ entsteht, aus. Damit kann man dann nach und nach $G_p(\lambda)$ bestimmen. Daraus bekommt man dann $G_p(m_n(\lambda))$. Anschließend wird mit `Rekon` aus $G_p(m_n(\lambda))$ die entsprechende Partition hergestellt.

Programm : **Mullineux**
Eingabe : p eine Primzahl
 λ eine p -reguläre Partition von n
Ausgabe : ν , die Partition zum assoziierten Moduln von D^λ

```
Mullineux := function(p, lb)
local i, j, l, s, A, R, S, my, ny;

A:=[]; #Anzahl der entfernten Ecken der p-Segmente
R:=[]; #Länge der Partitionen die man aus lb erhält
S:=[]; #Länge der der Zeilen der Partitionen die man für ny braucht
my:=lb;
ny:=[]; #Ergebnis

while Size(my) > 0 do
  Append(R, [Size(my)]); #Länge der Partitionen
  s:=Pseg(my, p);
  my:=s[1]; #Partition nach Entfernen des p-Segmentes
  Append(A, [s[2]]); #Größe des entfernten p-Segmentes
od;

#(A,R) entspricht dem Mullineuxsymbol von lb.

l:=Size(A);
for j in [1..l] do
  if A[j] mod p = 0 then
    S[j]:=A[j]-R[j];
  else
    S[j]:=A[j]+1-R[j]; fi;
od;
```

```

#(A,S) entspricht dem Mullineuxsymbol von ny.
for i in [1..l] do #Konstruktion von ny aus (A,S).
  ny:=Rekon(ny,A[l-i+1],S[l-i+1],p);
od;

return [ny];

end;

```

Nun zum Unterprogramm `Pseg`, das die Partition berechnet, welche man aus λ durch Entfernen der p -Kante erhält.

Programm : **Pseg**
Eingabe : p eine Primzahl
 λ eine p -reguläre Partition
Ausgabe : π , die Partition, die man aus λ durch Entfernen der p -Kante erhält,
 s Anzahl der Ecken aller p -Segmente

```

Pseg := function(lb,p)

local d, i, j, k, l, s, my, ny, res;

#pseg berechnet die Anzahl der Ecken aller  $p$ -Segmente von lb und die Partition nach Entfernen
aller  $p$ -Segmente von lb.

i:=0; #Steht für die Länge eines  $p$ -Segmentes.
l:=Size(lb);
my:=[];
ny:=lb;
ny[l+1]:=0;
s:=0; #Hier werden die entfernten Ecken gezählt.
pi:=[];

if l=1 then
#Falls die Länge 1 ist, kann genau ein  $p$ -Segment entnommen werden, dass höchstens die Länge  $p$ 
hat.
d:=ny[1];

if d > p-1 then #Ein  $p$ -Segment der Länge  $p$  kann entnommen werden.
  my[1]:=ny[1]-p; #Das  $p$ -Segment wird abgezogen.
  i:=p;
  s:=p;

else #Das  $p$ -Segment hat Länge d, die Ausgabe ist my=[].
  i:=p;
  s:=d;
fi;

else
for j in [1..l] do
d:=ny[j]-ny[j+1];
if d > p-1 then
if i=0 then #In diesem Fall ziehe  $p$  ab.
  my[j]:=ny[j]-p;
  i:=p; #Das  $p$ -Segment ist vollständig.

elif i <> 0 mod p then
  my[j]:=ny[j]-p+i; #Man braucht nur das  $p$ -Segment aufzufüllen.
  i:=p;
fi;

else
if d+i > p-1 then
  my[j]:=ny[j]-p+i; #Man muss nur das  $p$ -Segment aufüllen.
  i:=p;

else
if j = l then #Zum Schluss kommt alles rein.
  my[1]:=0;
  i:=i+d; #Das  $p$  Segment hat die Grösse i+d.

```

```

        else
            my[j]:=ny[j]-d-1; #Es wird d+1 dazugegeben.
            i:=i+d+1;
            fi;
            fi;
            fi;

        if i = p then
#Ist das Segment voll und ist man noch nicht am Ende, so wird das Segment geleert, um das nächste
anzufangen
            if j<>1 then
                i:=0;
                s:=s+p;
                fi;
            fi;

            if j = 1 then #Am Schluss kommt der Rest rein.
                s:=s+i;
                fi;
            od;
        fi;

for k in [1..Size(my)] do
    if my[k] > 0 then
        pi[k]:=my[k];
        fi;
    od;

#pi gibt die Partition nach Entfernen aller p-Segmente an, s ist die Anzahl der entfernten Ecken.

return [pi,s];
end;

```

Rekon konstruiert aus λ eine Partition μ mit Rz Einträgen, indem man p -Segmente hinzufügt mit Az Punkten.

Programm : **Rekon**
Eingabe : λ eine p -reguläre Partition von n
Az Anzahl der Ecken, die hinzugefügt werden
Rz Länge der Partition μ
Ausgabe : μ , entsteht aus λ durch Hinzufügen der p -Kante mit Az Punkten
 μ hat die Länge Rz

```

Rekon := function(lb,Az,Rz,p)

local i, l, r, s, z, az, my;

az:=Az; #Die Punkte die verteilt werden müssen.
my:=lb;
s:=Size(lb);
z:=Rz; #Man fängt von hinten an die Partition zu füllen.

#my ist ein Liste mit Nullen der Länge Rz+s.

if s <> Rz then
    for i in [1..Rz-s] do
        my[s+i]:=0;
    od;
fi;

#Nach und nach werden die p-Segmente angebracht.

while az > 0 do
    r:= az mod p;
    if r <> 0 then
        l:=r; #Das p-Segment was jetzt angebracht wird hat Länge r < p.
        az:=az-r; #Es sind noch az-r Punkte zu verteilen.

    else
        l:=p; #Das p-Segment hat Länge p.
        az:=az-p; #Es sind noch az-p Punkte zu verteilen.
    fi;
end;

```

```
while l > 0 do
  if z=1 then
#Ist man am ersten Eintrag, dann wird alles zu diesem getan.
    my[z]:=my[z]+1;
    l:=l-1;

  else
    if my[z] < my[z-1]+1 then

#Ist der vorhergehende Eintrag grösser, so wird alles auf die jetzige
      my[z]:=my[z]+1; #Position getan
      l:=l-1;

    else
      if z <> 1 then #Ist der vorhergehende Eintrag kleiner, so geht man einen Schritt voraus.
        z:=z-1;
      fi;
    fi;
  fi;
od;

z:=z-1; #Ist ein  $p$ -Segment angebracht so geht man zur vorhergehenden Eintrag.

od;

return my;

end;
```

B.2 Dimensionsberechnung von kondensierten Moduln

Es sei $H \leq \mathcal{S}_n$ mit $\text{char}(k) \nmid |H|$ und M ein $k\mathcal{S}_n$ -Modul mit Brauercharakter φ . Nach Lemma 4.2.9 ist die Dimension von $Me_H = (1_H, \varphi_M \downarrow_H)$. Um die Dimensionen der kondensierten einfachen $k\mathcal{S}_n$ -Moduln zu bestimmen, wird die Untergruppe H und die Brauercharaktertafel von \mathcal{S}_n , mit den Zykeltypen der Konjugiertenklassen benötigt. Das Programm `Kgrad`, welches die Dimensionen der kondensierten Moduln berechnet, besteht aus zwei Unterprogrammen. Das Programm `Vert` fasst alle Konjugiertenklassen von H zusammen, die in \mathcal{S}_n in einer Konjugiertenklasse liegen.

Mit `Mkcycle` wird zu einer Partition der zugehörige Zykeltyp bestimmt. Das Programm `ClassParameters` liefert zu jeder Konjugiertenklasse von \mathcal{S}_n die zugehörige Partition. Durch `Mkcycle` kann man somit jeder Konjugiertenklasse den Zykeltyp zuordnen. Zum Schluss wird dann mit Hilfe der Charaktertafel das Skalarprodukt des eingeschränkten Charakters mit dem trivialen Charakter berechnet.

Programm : **Kgrad**
Eingabe : H Untergruppe von \mathcal{S}_n
 IBr Brauercharaktertafel von \mathcal{S}_n
Ausgabe : Die Dimensionen der einfachen kondensierten Moduln

```
Kgrad := function(H, IBr)
local C, CP, Grad, K, S, s, v, i, j, ver, n, p, m, pp;

C:=ConjugacyClasses(H);
ver:=Vert(c); #Die Konjugiertenklassen von H werden zusammengefasst.
CP:=ClassParameters(irr);
s:=Size(cp);
S:=Size(ver);
K:=Size(H);
v:=[1..s]*0;

for i in [1..s] do
  p:=cp[i];
  m:=Mkcycle(p[2]);

#Man erhält die Zykelstruktur der zu der Konjugiertenklasse gehörenden Zykel.

for j in [1..S] do
  pp:=ver[j];
  if m==pp[2] then
    v[i]:=pp[1];

#Stimmen die Zykeltypen überein, so wird die Anzahl übernommen.

fi;
od;
od;

n:=TransposedMat(TransposedMat(Irr(IBr)));

#Für alle eingeschränkten irreduziblen Charaktere wird das Skalarprodukt mit dem trivialen Charakter
von H gebildet.

Grad:=1/K*n*v;

return Grad;

end;
```

Um die Einschränkung von Charakteren von \mathcal{S}_n auf H zu berechnen, wird die Klassenverteilung der Konjugiertenklassen von H in \mathcal{S}_n benötigt. Das Zusammenzählen der Elemente von H in einer Konjugiertenklasse von \mathcal{S}_n macht das Programm `Vert`.

Programm : **Vert**
Eingabe : C , die Konjugiertenklassen von H
Ausgabe : Anzahl der Zykel eines Zykeltyps

```
Vert:= function(C)
```

```

local s, r, k, t, l, ll, x, y;

s:=Size(C);
l:=[];
ll:=[];

for x in [1..s] do
  r:= Representative(C[x]);
  t:=CycleStructurePerm(r);

  if t in ll then
    for y in [1..Size(l)] do
      k:=l[y];
      if t=k[2] then
        k[1]:=k[1]+Size(C[x]);
#Stimmen der Zykeltyp einer Klasse mit einem vorhandenem überein, so wird die Größe der Klasse
#hinzugefügt.
        fi;
        l[y]:=k;
      od;

    else
      Append(ll, [t]);
      l[Size(l)+1]:= [Size(C[x]),t];
    fi;
  od;

return l;
#Für alle Zykeltypen wird die Anzahl der Zykel mit diesem Typ ausgegeben.

end;

```

Ein weiteres Hilfsprogramm ist `Mkcycle`, welches aus einer Partition λ die zugehörige Zykelstruktur bestimmt.

Programm : **Mkcycle**
Eingabe : λ eine Partition von n
Ausgabe : Die zu λ gehörende Zykelstruktur

```

Mkcycle:= function(lb)

local r, s, t, n, l, x, y, z, v;

l:=Length(p);
s:=0;
r:=();
z:=0;

for x in [1..l] do
  if lb[x]=1 then #Der Zykel ist fertig.
    return CycleStructurePerm(r);
  fi;
end;

#Erstelle nacheinander die Teilzykel.

n:=[1..p[x]]*0;
t:=[1..p[x]]*0;
for y in [1..p[x]] do
  t[y]:=y+1;
  n[y]:=z;
od;
t[lb[x]]:=1;
t:=t+n;
v:=[1..z];
Append(v, t);
r:=r*PermList(v);
z:=z+p[x];
od;

return CycleStructurePerm(r);

end;

```


Literaturverzeichnis

- [1] ALPERIN, JOHN: *Local Representation Theory*. Cambridge, 1993.
- [2] BESSENRODT, CHRISTINE UND KLESHCHEV, ALEXANDER: *On tensor products of modular representations of symmetric groups*. Bull. London Math. Soc., 32(3):292–296, 2000.
- [3] CHEN, HUI-XIANG UND HISS, GERHARD: *Projective summands in tensor products of simple modules of finite dimensional Hopf algebras*. Communications in Algebra, 32(11):4247–4264, 2004.
- [4] CURTIS, CHARLES UND REINER, IRVING: *Methods of representation theory*. Wiley, 1981.
- [5] FEIT, WALTER: *The Representation Theory of Finite Groups*. North-Holland, 1982.
- [6] FORD, BEN UND KLESHCHEV, ALEXANDER: *A proof of the Mullineux conjecture*. Math. Z., 226(2):267–308, 1997.
- [7] THE GAP GROUP: *GAP – Groups, Algorithms and Programming, Version 4.4*, 2005. (www.gap-system.org).
- [8] GOW, RODERICK UND KLESHCHEV, ALEXANDER: *Connections between the representations of the symmetric group and the symplectic group in characteristic 2*. J. Algebra, 221(1):60–89, 1999.
- [9] GRAHAM, JOHN UND JAMES, GORDON: *On a conjecture of Gow and Kleshchev concerning tensor products*. J. Algebra, 227(2):767–782, 2000.
- [10] HUPPERT, BERTRAM UND BLACKBURN, NORMAN: *Finite Groups II*. Springer, 1982.
- [11] JAMES, GORDON UND KERBER, ADALBERT: *The representation theory of the symmetric group*. Addison-Wesley, 1981.
- [12] JAMES, GORDON: *The representation theory of the symmetric groups*. Springer, Berlin, 1978.
- [13] JAMES, GORDON: *Trivial source modules for symmetric groups*. Arch. Math. (Basel), 41(4):294–300, 1983.
- [14] KLESHCHEV, ALEXANDER: *Branching rules for modular representations of symmetric groups. III. Some corollaries and a problem of Mullineux*. J. London Math. Soc. (2), 54(1):25–38, 1996.
- [15] LANDROCK, PETER: *Finite Group Algebras and their Modules*. Cambridge University Press, 1983.
- [16] MAGAARD, KAY UND MALLE, GUNTER: *Irreducibility of alternating and symmetric squares*. Manuscripta Math., 95(2):169–180, 1998.
- [17] MULLINEUX, GLEN: *Bijections of p -regular partitions and p -modular irreducibles of the symmetric groups*. J. London Math. Soc. (2), 20(1):60–66, 1979.
- [18] NAGAO, HIROSI UND TSUSHIMA, YUKIO: *Representations of finite groups*. Academic Press Inc., 1989. Translated from the Japanese.
- [19] NOESKE, FELIX: *Morita-Äquivalenzen in der algorithmischen Darstellungstheorie*. Dissertation, RWTH Aachen, 2005.
- [20] PARKER, RICHARD: *The computer calculation of modular characters (the meat-axe)*. Computational group theory (Durham, 1982), 267–274, 1984.

- [21] SZÖKE, MAGDOLNA: *Examining Green Correspondents of Weight Modules*. Wissenschaftsverlag Mainz in Aachen, 1998.
- [22] ZISSER, ILAN: *Irreducible products of characters in A_n* . Israel J. Math., 84(1-2):147–151, 1993.

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und nur unter Benutzung der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe.